МИНИСТЕРСТВО НАРОДНОГО ОБРАЗОВАНИЯ БССР

ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Ф.СКОРИНЫ

Кафедра алгебры и геометрии

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

по курсу "Алгебра и теория чисел"
(раздел "Линейная алгебра", часть 3)
для студентов математического факультета

Гомель 1991

Составители: А.В.Бузланов, С.Ф.Каморников, А.П.Кармазин

Рекомендовано к печати методическим советом математического факультета Гомельского государственного университета им. Ф.Скорины

Предназначено для студентов математического факультета для изучения общего курса алгебры и теории чисел.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее издание завершает цикл лабораторных работ по линейной алгебре и содержит три лабораторные работы "Евклидовы пространства", "Линейные операторы в евклидовом пространстве" и "Квадратичные формы". Пособие предназначено, в первую очередь, для студентов первого курса математического факультета. Оно может быть использовано также студентами-заочниками при изучении линейной алгебры.

Структура настоящего пособия сохранена прежней, как и в первых двух частях лабораторных работ по линейной алгебре. Не изменяются и требования к оформлению лабораторных работ, а также критерии их оценки (см. введение к первой части).

При изучении линейной алгебры нами рекомендуются нижеследующие учебники и задачники. Отметим то, что в различных учебных пособиях материал излагается по-разному, имеется расхождения в обозначениях, терминах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Милованов М.В., Толкачев М.М., Тышкевич Р.И., Феденко А.С. Алгебра и аналитическая геометрия. Часть 2. – Мн.: Выш.шк., 1987.
2. Тышкевич Р.И., Феденко А.С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – Мн.: Выш.шк., 1976.
3. Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия. – М.: Наука, 1976.
4. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1979.
5. Бурдун А.А., Мурашко Е.А., Толкачев М.М., Феденко А.С. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии. – Мн.: Университетское, 1989.

6. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука, 1984.
7. Икрамов Х.Д. Задачник по линейной алгебре. – М.: Наука, 1975.
8. Бузланов А.В., Каморников С.Ф., Кармазин А.П. Лабораторные работы по курсу "Алгебра и теория чисел" (раздел "Линейная алгебра") для студентов математического факультета. Часть I и II – Гомель: Ротапринт ГГУ им.Ф.Скорины, 1990.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № I

ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Пусть V – действительное векторное пространство. Говорят, что на V задано скалярное произведение, если каждой паре векторов $a, b \in V$ поставлено в соответствие действительное число (a, b), причем выполняются следующие аксиомы:

1) $(a,b) = (b,a)$ для любых $a, b \in V$;
2) $(a+b,c) = (a,c)+(b,c)$ для любых $a, b, c \in V$;
3) $(\alpha a, b) = \alpha(a,b)$ для любых $a, b \in V$ и любого действительного числа α ;
4) $(a,a) > 0$ для любого ненулевого вектора $a \in V$.

Действительное линейное пространство с определенным на нем скалярным произведением называется евклидовым пространством.

Приведем несколько важных примеров евклидовых пространств.

1. Пусть $V = V^3$ – трехмерное пространство геометрических векторов. Скалярное произведение векторов на V^3 определим как произведение длин этих векторов на косинус угла между ними. Тогда V^3 – евклидово пространство.

2. Пусть $V = C_{[a,b]}$. Для любых двух функций $f, g \in C_{[a,b]}$ положим

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx. \qquad [1.1]$$

Эта формула и задает скалярное произведение на $C_{[a,b]}$. Значит, $C_{[a,b]}$ – евклидово пространство.

3. Пусть $V = \mathbb{R}^n$. Скалярное произведение для $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ определим формулой

$$(x,y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \qquad [1.2]$$

По определению, $\mathbb{R}^n$ – евклидово пространство.

В дальнейшем, говоря о евклидовых пространствах V^3, $C_{[a,b]}$ и $\mathbb{R}^n$ мы будем полагать, что скалярное произверение определено в них так, как это сделано в указанных выше примерах.

ТЕОРЕМА I.I. Любое конечномерное действительное линейное пространство можно превратить в евклидово пространство.

Д л и н о й в е к т о р а x в евклидовом пространстве V называется число

$$\| x \| = \sqrt{(x, x)}.$$

Введенное определение в пространстве V^3 согласуется с обычным определением длины вектора. В пространстве $\mathbb{R}^n$ длина вектора $x = (x_1, \ldots, x_n)$ выражается формулой

$$\| x \| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

В пространстве $C_{[a, b]}$ длина вектора выражается формулой

$$\| f \| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\, dx}.$$

Эту величину называют н о р м о й функции f.

Вектор, длина которого равна единице, называется н о р м и р о в а н н ы м. Умножение ненулевого вектора на число, обратное его длине, называется н о р м и р о в а н и е м вектора.

Следующая теорема устанавливает связь между скалярным произведением векторов и длинами этих векторов.

ТЕОРЕМА I.2. Для любых двух векторов a, b евклидова пространства

$$|(a, b)| \leqslant \|a\| \cdot \|b\|. \qquad [I.3]$$

Неравенство [I.3] называется н е р а в е н с т в о м К о ш и - Б у н я к о в с к о г о.

В силу неравенства Коши-Буняковского, $-1 \leqslant \frac{(a, b)}{\|a\| \|b\|} \leqslant 1$ для любых ненулевых векторов a, b евклидова пространства V. Поэтому существует единственный угол φ, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, такой, что

$$\cos \varphi = \frac{(a, b)}{\|a\| \|b\|}.$$

Этот угол называется у г л о м м е ж д у в е к т о р а м и a и b.

ТЕОРЕМА I.3. В евклидовом пространстве V для любых векторов a и b:

1) $\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\|a\| \|b\| \cos(a \wedge b)$;

2) $\|a + b\| \leqslant \|a\| + \|b\|$.

Первое утверждение теоремы I.3 называется т е о р е м о й к о с и н у с о в, второе - н е р а в е н с т в о м т р е у г о л ь н и к а.

Векторы a, b евклидова пространства V называются о р т о г о н а л ь н ы м и, если $(a, b) = 0$. Будем писать в этом случае $a \perp b$.

Система векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ евклидова пространства V называется о р т о г о н а л ь н о й, если любая пара векторов этой системы ортогональна, т.е. $e_i \perp e_j$ для всех $i \neq j$. Будем полагать, что система, состоящая из одного вектора, ортогональна. Ортогональная система нормированных векторов евклидова пространства называется о р т о н о р м и р о в а н н о й.

ТЕОРЕМА I.4. Ортогональная система ненулевых векторов евклидова пространства линейно независима.

Ввиду теоремы I.4 ортогональные системы играют в евклидовых пространствах фундаментальную роль. Поэтому представляется очень важной задача перехода от заданной системы векторов евклидова пространства V к некоторой ортогональной системе. Способ перехода к ортогональной системе векторов называется п р о ц е с с о м о р т о г о н а л и з а ц и и. Процесс ортогонализации, описанный ниже, называется п р о ц е с с о м о р т о г а н а л и з а ц и и Г р а м а - Ш м и д т а.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ - линейно независимая система векторов евклидова пространства V. По векторам этой системы будем последовательно строить ортогональную систему ненулевых векторов $b_1, b_2, \ldots, b_k$.

Полагаем $b_1 = a_1$. Если векторы $b_1, b_2, \dots, b_{r-1}$ уже построены, то вектор b_r находится по формуле

$$b_r = a_r + \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_{r-1} b_{r-1}, \qquad [1.4]$$

где

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{(a_r, b_1)}{(b_1, b_1)}, \\ \lambda_2 &= -\frac{(a_r, b_2)}{(b_2, b_2)}, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_{r-1} &= -\frac{(a_r, b_{r-1})}{(b_{r-1}, b_{r-1})}. \end{aligned}\right\} \qquad [1.5]$$

<u>ТЕОРЕМА 1.5.</u> В ненулевом конечномерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Пусть евклидовы пространства V и V' изоморфны как линейные пространства, то есть существует взаимно однозначное линейное отображение f пространства V на пространство V'. Если при этом отображении сохраняется скалярное произведение, т.е.

$$(f(x), f(y)) = (x, y)$$

для любых $x, y \in V$, то отображение f называется е в к л и д о в ы м и з о м о р ф и з м о м п р о с т р а н с т в V и V'. Сами пространства V и V' называются в этом случае е в к л и д о в о и з о м о р ф н ы м и п р о с т р а н с т в а м и.

<u>ТЕОРЕМА 1.6.</u> Два конечномерных евклидовых пространства евклидово изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности совпадают.

<u>СЛЕДСТВИЕ.</u> Каждое n-мерное евклидово пространство евклидово изоморфно пространству $\mathbb{R}^n$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАЧ

<u>ПРИМЕР 1.</u> Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$. Может ли функция $F(x, y) = (x_1 + \dots + x_n)(y_1 + \dots + y_n)$ служить скалярным произведением в $\mathbb{R}^n$. Если не может, то укажите, какие из свойств скалярного произведения не выполняются.

Р е ш е н и е. Очевидно, $F(x, y) = F(y, x)$. Значит, первое свойство скалярного произведения выполняется.

Положим $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$. Тогда $F(x+y, z) = ((x_1+y_1) + (x_2+y_2) + \dots + (x_n+y_n))(z_1 + \dots + z_n) = ((x_1 + \dots + x_n) + (y_1 + \dots + y_n))(z_1 + \dots + z_n) = (x_1 + \dots + x_n)(z_1 + \dots + z_n) + (y_1 + \dots + y_n)(z_1 + \dots + z_n) = F(x, z) + F(y, z)$. Значит, второе свойство скалярного произведения выполняется.

Так как $F(\alpha x, y) = (\alpha x_1 + \alpha x_2 + \dots + \alpha x_n)(y_1 + \dots + y_n) = \alpha(x_1 + \dots + x_n)(y_1 + \dots + y_n) = \alpha F(x, y)$, то третье свойство скалярного произведения выполняется.

Положим $x = (-1, 1, 0, \dots, 0)$. Тогда $F(x, x) = (-1+1)(-1+1) = 0$. Значит, четвертое свойство скалярного произведения не выполняется.

<u>ПРИМЕР 2.</u> Даны векторы e_1, e_2, e_3, образующие ортогональный базис евклидова пространства V. Найдите угол φ между векторами $a = e_1 + e_2 - e_3$ и $b = e_1 + e_2 + e_3$, если $\|e_1\| = 2$, $\|e_2\| = 1$, $\|e_3\| = 3$.

Р е ш е н и е. Так как векторы e_1, e_2, e_3 образуют ортогональный базис V, то $(e_1, e_2) = (e_1, e_3) = (e_2, e_3) = 0$. Поэтому $(a, a) = (e_1, e_1) + (e_2, e_2) + (e_3, e_3) = |e_1|^2 + |e_2|^2 + |e_3|^2 = 4 + 1 + 9 = 14$, $(b, b) = (e_1, e_1) + (e_2, e_2) + (e_3, e_3) = 14$, $(a, b) = (e_1, e_1) + (e_2, e_2) - (e_3, e_3) = 4 + 1 - 9 = -4$. Теперь

$$\cos\varphi = \frac{(a, b)}{\|a\| \|b\|} = \frac{-4}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = -\frac{2}{7}, \quad \varphi = \arccos\left(-\frac{2}{7}\right).$$

<u>ПРИМЕР 3.</u> Применяя процесс ортогонализации Грама–Шмидта, по заданному базису $x_1 = (1, -2, 2)$, $x_2 = (-1, 0, -1)$, $x_3 = (5, -3, -7)$ постройте ортонормированный базис y_1, y_2, y_3 пространства $\mathbb{R}^3$.

Р е ш е н и е. Построим сначала ортогональный базис

a_1, a_2, a_3 пространства $\mathbb{R}^3$. Положим $a_1 = x_1$.
Ввиду [I.4] и [I.5] имеем $a_2 = x_2 + \alpha a_1$, где
$\alpha = -\frac{(a_1, x_2)}{(a_1, a_1)} = -\frac{1\cdot(-1)+(-2)\cdot 0+2\cdot(-1)}{1\cdot 1+(-2)(-2)+2\cdot 2} = \frac{1}{3}$. Тогда
$a_2 = (-1, 0, -1) + \frac{1}{3}(1, -2, 2) = (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$.

Снова ввиду [I.4] и [I.5] имеем $a_3 = x_3 + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$,

где $\lambda_1 = -\frac{(a_1, x_3)}{(a_1, a_1)} = -\frac{1\cdot 5+(-2)(-3)+2(-7)}{9} = \frac{1}{3}$,

$$\lambda_2 = -\frac{(a_2, x_3)}{(a_2, a_2)} = -\frac{(-\frac{2}{3})\cdot 5+(-\frac{2}{3})\cdot(-3)+(-\frac{1}{3})(-7)}{(-\frac{2}{3})^2+(-\frac{2}{3})^2+(-\frac{1}{3})^2} = -1.$$

Тогда $a_3 = (5, -3, -7) + \frac{1}{3}(1, -2, 2) - (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}) = (6, -3, -6)$.

Пронормируем векторы a_1, a_2, a_3. Для этого найдем их длины:

$$\|a_1\| = \sqrt{(a_1, a_1)} = \sqrt{1^2+(-2)^2+2^2} = 3,$$

$$\|a_2\| = \sqrt{(a_2, a_2)} = \sqrt{(-\frac{2}{3})^2+(-\frac{2}{3})^2+(-\frac{1}{3})^2} = 1.$$

$$\|a_3\| = \sqrt{(a_3, a_3)} = \sqrt{6^2+(-3)^2+(-6)^2} = 9.$$

Теперь

$$y_1 = \frac{1}{3}a_1 = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}),$$
$$y_2 = a_2 = (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}),$$
$$y_3 = \frac{1}{9}a_3 = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}).$$

Векторы y_1, y_2, y_3 образуют ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^3$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

I. Определение евклидова пространства. Примеры евклидовых пространств.

I.1. Как задать евклидово пространство?

I.2. Докажите, что для любого вектора a евклидова пространства V имеет место равенство $(a, \Theta) = (\Theta, a) = 0$.

I.3. Докажите, что формула [I.1] определяет скалярное

произведение на $C[a, b]$.

I.4. Докажите, что формула [I.2] определяет скалярное произведение на $\mathbb{R}^n$.

I.5. Докажите, что в евклидовом пространстве V при любых $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in V$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}$
$(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j (x_i, y_j)$.

I.6. Как превратить конечномерное действительное линейное пространство в евклидово?

2. Неравенство Коши-Буняковского.

2.I. Как определяется длина вектора в евклидовом пространстве?

2.2. Как вычислить длину вектора в пространстве $\mathbb{R}^n$?

2.3. Как вычислить норму функции $f \in C[a, b]$?

2.4. Пусть a, b – векторы евклидова пространства V, $t \in \mathbb{R}$. Докажите, что квадратный трехчлен (относительно t)

$$(ta + b, ta + b)$$

неотрицателен тогда и только тогда, когда его дискриминант неположителен.

2.5. Докажите, что неравенство Коши-Буняковского обращается в равенство тогда и только тогда, когда векторы a и b линейно зависимы.

2.6. Какой вид принимает неравенство Коши-Буняковского в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $C[a, b]$?

2.7. Докажите, что в евклидовом пространстве V $\|\alpha a\| = |\alpha| \cdot \|a\|$ для любого $a \in V$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. Угол между векторами.

3.I. Как определяется угол между векторами в евклидовом пространстве?

3.2. Пусть a, b – ненулевые векторы евклидова пространства V, φ – угол между ними. Докажите, что:

I) угол φ не меняется при умножении обоих векторов на одно и то же число;

2) угол φ равен нулю или π тогда и только тогда, когда векторы a и b линейно зависимы.

3.3. Докажите теорему косинусов.

3.4. Выведите неравенство треугольника.

3.5. Какой вид принимает неравенство треугольника в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $C[a,b]$?

<u>4. Ортогональная система векторов.</u>

4.1. Сформулируйте определение ортогональной системы векторов евклидова пространства.

4.2. Какая система векторов евклидова пространства называется ортонормированной?

4.3. Докажите, что в евклидовом пространстве V :

I) нулевой вектор и только он ортогонален сам себе;

2) нулевой вектор и только он ортогонален любому вектору из V ;

3) если вектор a ортогонален каждому из векторов $b_1, b_2, \dots, b_k \in V$, то он ортогонален любой их линейной комбинации.

4.4. Докажите, что два вектора a, b евклидова пространства V ортогональны тогда и только тогда, когда $\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$ (теорема Пифагора).

4.5. Докажите, что ортогональная система ненулевых векторов евклидова пространства линейно независима.

<u>5. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.</u>

5.I. Изложите сущность процесса ортогонализации Грама-Шмидта.

5.2. Как перейти от ортогонального базиса евклидова пространства к ортонормированному базису?

5.3. Докажите, что любая ортонормированная система векторов евклидова пространства V либо является базисом V , либо может быть дополнена до ортонормированного базиса пространства V .

<u>6. Изоморфизм евклидовых пространств.</u>

6.I. Сформулируйте определение евклидова изоморфизма.

6.2. Покажите, что при евклидовом изоморфизме евклидовых пространств:

I) ортонормированный базис переходит в ортонормированный базис;

2) длины векторов сохраняются.

6.3. Как строится евклидов изоморфизм евклидовых пространств одинаковой размерности?

ЗАДАНИЕ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

<u>I.</u> Пусть a и b – векторы действительного линейного пространства V . Определите, может ли заданная функция $F(a,b)$ служить скалярным произведением, а в случае, если не может – укажите, какие из свойств скалярного произведения не выполняются.

I.I. $V=\mathbb{R}^2,\ a=(a_1,a_2),\ b=(b_1,b_2),$
$F(a,b)=2a_1b_1+3a_2b_2.$

I.2. $V=C[\alpha,\beta],\ a=u(x),\ b=v(x),$
$F(a,b)=\int_\alpha^\beta x^2u(x)v(x)\,dx.$

I.3. $V=M(2,\mathbb{R}),\ a=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix},$
$F(a,b)=\sum_{i=1}^{4}a_ib_i.$

I.4. $V=\mathbb{R}[x],\ a=m(x),\ b=n(x),$
$F(a,b)=deg(m(x),n(x)).$

I.5. $V=\mathbb{R}^3,\ a=(a_1,a_2,a_3),\ b=(b_1,b_2,b_3),$
$F(a,b)=a_1b_1+2a_2b_2+3a_3b_3.$

I.6. $V=\mathbb{C},\ F(a,b)=|ab|.$

I.7. $V=C[\alpha,\beta],\ a=u(x),\ b=v(x),$
$F(a,b)=\int_\alpha^\beta u(x)v'(x)\,dx.$

I.8. $V=\mathbb{R}^2,\ a=(a_1,a_2),\ b=(b_1,b_2),$
$F(a,b)=2a_1b_1+a_1b_2+a_2b_1+a_2b_2.$

I.9. $V=\mathbb{R}_n[x],\ a=f(x),\ b=g(x),$
$F(a,b)=(fg)(0).$

1.10. $V = M(n, \mathbb{R})$, $F(a, b) = tr(ab)$.

1.11. $V = \mathbb{R}^3$, $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$,
$F(a, b) = a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_3$.

1.12. $V = M(n, \mathbb{R})$, $F(a, b) = det(ab)$.

2. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите:
1) скалярное произведение векторов a, b;
2) угол между векторами a и b.

	a	b
2.1.	(1, 1, 1, 1),	(3, 5, 1, 1).
2.2.	(1, 0, 1, 2),	(3, -5, 1, 0).
2.3.	(2, -1, 0, 3),	(-1, 0, -1, 1).
2.4.	(2, 2, -1, 0),	(1, 1, -1, -1).
2.5.	(-3, 1, 0, 2),	(-1, 1, 0, 4).
2.6.	(1, -2, -3, 1),	(1, 2, 3, 4).
2.7.	(4, -2, 1, 2),	(1, 1, 0, 3).
2.8.	(5, 3, -4, 3),	(-1, -5, 0, 4).
2.9.	(1, 0, 0, 4),	(1, 2, -3, -7).
2.10.	(-3, -2, 1, 1),	(1, 2, 7, -5).
2.11.	(1, 0, -2, 1),	(3, -2, 0, 1).
2.12.	(2, -1, -1, 1),	(-1, 2, 1, 0).

3. В евклидовом пространстве $C_{[1,2]}$ найдите:
1) скалярное произведение векторов f и g;
2) длину вектора f.

3.1.	$f = x^{-2}$,	$g = 1 + \sqrt{x}$.
3.2.	$f = \sin x$,	$g = \cos x$.
3.3.	$f = x$,	$g = \cos x$.
3.4.	$f = x$,	$g = e^x$.

3.5.	$f = \sin x$,	$g = x$.
3.6.	$f = x + 1$,	$g = 3x$.
3.7.	$f = x^{-1}$,	$g = x^2 + 2x$.
3.8.	$f = \cos 3x$,	$g = 4$.
3.9.	$f = x$,	$g = \sin(x^2)$.
3.10.	$f = \sin x$,	$g = (\cos x)^{-2}$.
3.11.	$f = x^2 + 1$,	$g = 3$.
3.12.	$f = 2x - 1$,	$g = x + 2$.

4. Найдите нормированный вектор евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, ортогональный векторам a_1, a_2.

	a_1	a_2
4.1.	(1, 1, 1),	(1, -1, 1).
4.2.	(1, -1, 0),	(-2, 1, 2).
4.3.	(2, -1, 1),	(-3, 1, -1).
4.4.	(0, -3, 4),	(1, 2, 3).
4.5.	(1, 1, 2),	(0, 4, -3).
4.6.	(-1, 2, 3),	(3, 4, -1).
4.7.	(-3, 1, 2),	(2, 2, 0).
4.8.	(0, 1, 5),	(-1, -1, 0).
4.9.	(0, 2, 1),	(-1, 1, 0).
4.10.	(1, 0, 2),	(-3, 4, -1).
4.11.	(1, -1, -1),	(0, 3, 1).
4.12.	(2, 1, 1),	(1, 1, 0).

5. Дополните до ортонормированного базиса евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ систему векторов a_1, a_2.

	a_1	a_2
5.1.	(1,-2,2,-3),	(2,-3,2,4).
5.2.	(1,1,1,2),	(1,2,3,-3).
5.3.	(1,-1,1,-1),	(1,1,1,1).
5.4.	(1,-1,-1,3),	(1,1,-3,-1).
5.5.	(1,1,2,1),	(1,-1,-1,-2).
5.6.	(0,1,2,3),	(1,2,-1,0).
5.7.	(1,2,0,3),	(2,-1,2,0).
5.8.	(-1,1,1,2),	(-2,0,2,-2).
5.9.	(3,1,0,2),	(0,-2,4,1).
5.10.	(1,-1,2,0),	(3,-1,-2,3).
5.11.	(0,3,2,0),	(1,-2,-3,2).
5.12.	(2,0,1,3),	(-1,3,-1,1).

6. Применяя процесс ортогонализации Грама-Шмидта, по заданному базису b_1, b_2, b_3 евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ постройте ортонормированный базис. Сделайте проверку.

	b_1	b_2	b_3
6.1.	(1,1,1),	(1,2,3),	(1,1,2).
6.2.	(2,-1,3),	(3,2,-5),	(1,-1,1).
6.3.	(1,2,1),	(2,3,3),	(3,8,2).
6.4.	(-1,3,7),	(0,2,-1),	(1,-2,-8).
6.5.	(2,0,1),	(-1,2,3),	(-1,1,1).
6.6.	(0,1,-2),	(1,-1,1),	(-2,0,3).
6.7.	(1,0,2),	(3,-1,4),	(2,-2,1).
6.8.	(-2,3,1),	(0,2,1),	(1,2,1).
6.9.	(-3,0,1),	(0,2,3),	(-1,-1,-1).
6.10.	(3,1,-1),	(-2,0,1),	(2,7,3).
6.11.	(2,4,3),	(5,-1,4),	(-1,5,-1).
6.12.	(4,1,3),	(0,7,-2),	(4,8,0).

7. С помощью процесса ортогонализации Грама-Шмидта постройте ортонормированный базис линейной оболочки системы векторов a_1, a_2, a_3 евклидова пространства $\mathbb{R}^4$.

	a_1	a_2	a_3
7.1.	(1,2,2,-1),	(1,-1,0,3),	(0,3,2,-4).
7.2.	(1,1,-1,-2),	(3,0,-1,2),	(2,-1,0,4).
7.3.	(2,1,3,-1),	(1,1,-3,2),	(3,2,0,1).
7.4.	(-1,0,1,1),	(2,0,-1,3),	(1,0,0,4).
7.5.	(3,2,1,1),	(-1,2,1,-1),	(2,4,2,0).
7.6.	(1,1,2,3),	(1,1,-6,2),	(2,2,-4,5).
7.7.	(0,2,3,1),	(2,-1,-1,3),	(2,-3,-4,2).
7.8.	(2,1,2,2),	(-1,1,3,-3),	(1,2,5,-1).
7.9.	(-2,0,3,1),	(1,-2,-2,1),	(3,-2,-5,0).
7.10.	(1,4,-1,2),	(2,2,1,0),	(1,-2,2,-2).
7.11.	(0,1,1,-1),	(3,1,2,0),	(-3,0,-1,-1).
7.12.	(1,1,2,1),	(3,2,-1,1),	(4,3,1,2).

8. Скалярное произведение в $\mathbb{R}_1[x]$ определено равенством $(f(x), g(x)) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$. Применяя процесс ортогонализации Грама-Шмидта, по базису f_1, f_2 пространства $\mathbb{R}_1[x]$ постройте ортонормированный базис.

8.1.	$f_1 = x+1$,	$f_2 = 3$.
8.2.	$f_1 = 2x-1$,	$f_2 = x$.
8.3.	$f_1 = 3x$,	$f_2 = x-1$.
8.4.	$f_1 = x-2$,	$f_2 = -1$.
8.5.	$f_1 = 2x$,	$f_2 = x+1$.
8.6.	$f_1 = -x$,	$f_2 = x-2$.
8.7.	$f_1 = 2x-1$,	$f_2 = 3x$.
8.8.	$f_1 = -2x$,	$f_2 = x+2$.

8.9. $f_1 = 2x - 2$, $f_2 = x$.
8.10. $f_1 = x + 3$, $f_2 = 1$.
8.11. $f_1 = -x + 1$, $f_2 = 2x$.
8.12. $f_1 = -x$, $f_2 = 2x + 3$.

9. Докажите, что евклидовы пространства E и E' евклидово изоморфны.

9.1.-9.2. $E = \mathbb{R}^2$, $(a, b) = a_1 b_1 + a_2 b_2$ для $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2) \in E$;

$E' = \mathbb{R}^2$, $(x, y) = 2x_1 y_1 + 3x_2 y_2$ для $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in E'$.

9.3.-9.4. $E = M(2, \mathbb{R})$, $(A, B) = \sum_{i=1}^{4} a_i b_i$ для $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in E$;

$E' = \mathbb{R}_3[x]$, $(f(x), g(x)) = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx$ для $f(x), g(x) \in E'$.

9.5.-9.6. $E = \mathbb{R}^3$, $(a, b) = a_1 b_1 + 2a_2 b_2 + 3a_3 b_3$ для $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3) \in E$;

$E' = \mathbb{R}_2[x]$, $(f(x), g(x)) = \int_0^1 x^2 f(x) g(x)\, dx$ для $f(x), g(x) \in E'$.

9.7.-9.8. $E = \mathbb{R}_3[x]$, $(f(x), g(x)) = \int_{-1}^{1} x^2 f(x) g(x)\, dx$ для $f(x), g(x) \in E$;

$E' = M(2, \mathbb{R})$, $(A, B) = \sum_{i=1}^{4} i a_i b_i$ для $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in E'$.

9.9.-9.10. $E = \mathbb{R}^2$, $(a, b) = 2a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2$ для $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2) \in E$;

$E' = \mathbb{R}_1[x]$, $(f(x), g(x)) = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx$ для $f(x), g(x) \in E'$.

9.11-9.12. $E = \mathbb{R}_1[x]$, $(f(x), g(x)) = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx$ для $f(x), g(x) \in E$;

$E' = \mathbb{R}^2$, $(a, b) = a_1 b_1 + a_2 b_2$ для $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2) \in E'$.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Приведем сначала специальные типы линейных операторов евклидова пространства.

Пусть f - линейный оператор евклидова пространства V. Линейный оператор f^* называется сопряженным к f, если для любых двух векторов $x, y \in V$ выполняется равенство

$$(f(x), y) = (x, f^*(y)) \qquad [2.1]$$

ТЕОРЕМА 2.1. Для любого линейного оператора f конечномерного евклидова пространства V существует единственный сопряженный оператор f^*. При этом матрица оператора f^* в ортонормированном базисе будет транспонированной по отношению к матрице оператора f в этом базисе.

Линейный оператор f евклидова пространства V называется ортогональным, если он не изменяет скалярного произведения векторов, т.е.

$$(f(x), f(y)) = (x, y) \qquad [2.2]$$

для любых $x, y \in V$.

ТЕОРЕМА 2.2. (Первый критерий ортогональности линейного оператора). Линейный оператор f евклидова пространства V ортогонален тогда и только тогда, когда он сохраняет длины векторов.

ТЕОРЕМА 2.3. (Второй критерий ортогональности линейного оператора). Для того, чтобы линейный оператор f конечномерного евклидова пространства V был ортогонален, необходимо и достаточно, чтобы оператор f переводил ортонормированный базис пространства V снова в ортонормированный базис.

Действительная матрица A называется ортогональной, если $A^t A = E$.

ТЕОРЕМА 2.4. (Третий критерий ортогональности линейного оператора). Линейный оператор f конечномерного евклидова пространства V ортогонален тогда и только тогда, когда

ортогональна матрица оператора f в некотором ортонормированном базисе.

Линейный оператор f евклидова пространства V называется самосопряженным, если он совпадает со своим сопряженным оператором f^*.

Из определения следует, что если оператор f является самосопряженным, то выполняется равенство

$$(f(x), y) = (x, f(y))$$

для всех $x, y \in V$.

Квадратная матрица $A = (\alpha_{ij})$ называется симметрической, если $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для любых i, j. Очевидно, матрица A является симметрической тогда и только тогда, когда $A^t = A$.

ТЕОРЕМА 2.5. Линейный оператор f евклидова пространства V является самосопряженным тогда и только тогда, когда матрица его в ортонормированном базисе пространства V является симметрической.

На важную роль ортогональных и самосопряженных операторов в общей теории линейных операторов евклидовых пространств указывает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.6. Любой линейный оператор f конечномерного евклидова пространства V можно представить в виде $f = hg$, где h - ортогональный оператор, g - самосопряженный оператор пространства V.

Представление оператора f, следующее из теорема 2.6, называется полярным разложением.

СЛЕДСТВИЕ. Любую действительную квадратную матрицу можно представить в виде произведения ортогональной и симметрической матриц.

Ортогональным дополнением подпространства W евклидова пространства V называется множество $W^\perp$ всех векторов из V, каждый из которых ортогонален любому вектору из W:

$$W^\perp = \{x \in V \mid x \perp y \text{ для любого } y \in W\}.$$

ТЕОРЕМА 2.7. Для любого подпространства W евклидова пространства V множество $W^\perp$ является подпространством.

2) Если пространство V конечномерно, то $V = W \oplus W^{\perp}$.

<u>СЛЕДСТВИЕ.</u> Если W - подпространство конечномерного евклидова пространства V, то

$$\dim W^{\perp} = \dim V - \dim W.$$

<u>ЛЕММА 2.1.</u> Пусть f - самосопряженный линейный оператор конечномерного евклидова пространства V, W - подпространство V. Если подпространство W инвариантно относительно оператора f, то и подпространство $W^{\perp}$ инвариантно относительно f.

<u>ЛЕММА 2.2.</u> Собственные значения самосопряженного оператора в евклидовом или унитарном пространстве являются действительными числами.

<u>ТЕОРЕМА 2.8.</u> Линейный оператор f конечномерного евклидова пространства V является самосопряженным тогда и только тогда, когда в пространстве V существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора f.

<u>СЛЕДСТВИЕ.</u> Самосопряженный линейный оператор конечномерного евклидова пространства диагонализируем.

<u>ЛЕММА 2.3.</u> Матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису ортогональна.

<u>ТЕОРЕМА 2.9.</u> Для любой симметрической действительной матрицы A существует такая ортогональная действительная матрица T, что TAT^{-1} - диагональная матрица.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАЧ

<u>ПРИМЕР 1.</u> Линейный оператор f в некотором ортонормированном базисе e_1, e_2 евклидова пространства V имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу сопряженного оператора f^* в базисе $e_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} e_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} e_2$, $e_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} e_2$.

Р е ш е н и е. Выпишем матрицу перехода от базиса e_1, e_2 к базису e_1', e_2':

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Пусть B - матрица оператора f в базисе e_1', e_2'.

Тогда $B = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{7}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Так как $(e_1', e_2') = 0$, $\|e_1'\| = \|e_2'\| = 1$, то e_1', e_2' - ортонормированный базис евклидова пространства V. По теореме 2.1 матрицей оператора f^* в базисе e_1', e_2' будет матрица

$$B^t = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

<u>ПРИМЕР 2.</u> Пусть V^3 - трехмерное евклидово пространство геометрических векторов. Будет ли оператор g, действующий по формуле $g(x) = x \times a$ (a - фиксированный вектор V^3, $x \times a$ - векторное произведение векторов x и a), ортогональным оператором пространства V^3?

Р е ш е н и е. Ввиду теоремы 2.2 оператор f ортогонален тогда и только тогда, когда $|x| = |f(x)|$ для любого $x \in V$. В нашем случае равенство принимает вид $|x| = |x \times a|$. Отсюда следует, что $|x| = |x| \cdot |a| \cdot \sin(x \hat{,} a)$ для любого $x \in V^3$, что невозможно. Значит, оператор g не является ортогональным.

<u>ПРИМЕР 3.</u> Найдите базис ортогонального дополнения линейной оболочки системы векторов $M = \{(1,-1,1,-1), (1,1,1,1), (1,0,-1,0)\}$ из $\mathbb{R}^4$.

Р е ш е н и е. Обозначим $a_1 = (1,-1,1,-1)$, $a_2 = (1,1,1,1)$, $a_3 = (1,0,-1,0)$, $W = L(M)$. Тогда произвольный вектор $y \in W$ можно записать в виде $y = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ - произвольный вектор из $W^{\perp}$. Очевидно, что $x \perp y$ тогда и только тогда, когда $x \perp a_1$, $x \perp a_2$, $x \perp a_3$. Значит, координаты вектора x удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 \qquad - x_3 \qquad = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $x_1 = 0$, $x_2 = -\alpha$, $x_3 = 0$, $x_4 = \alpha$, где α – произвольное действительное число. Таким образом, $W^\perp = \{(0, -\alpha, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(0, -1, 0, 1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Значит, базис подпространства $W^\perp$ состоит из одного вектора $(0, -1, 0, 1)$.

<u>ПРИМЕР 4.</u> Для матрицы $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ найдите такую ортогональную матрицу T, что TCT^{-1} – диагональная матрица. Сделайте проверку.

Р е ш е н и е. Найдем собственные значения матрицы A. Решив уравнение

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 & 0 \\ 4 & -3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

получим $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 5$.

Найдем все собственные значения линейного оператора f пространства $\mathbb{R}^3$, имеющего в базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ матрицу C и принадлежащих собственному значению $\lambda_1 = -5$. Для этого решим систему

$$(x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = (0, 0, 0),$$

т.е. систему

$$\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 \qquad = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 \qquad = 0, \\ \qquad\qquad 9x_3 = 0. \end{cases}$$

Получим $x_1 = -\frac{\alpha}{2}$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Значит, собственными векторами оператора f будут векторы $(-\frac{\alpha}{2}, \alpha, 0)$,

$\alpha \in \mathbb{R}$. Один из них, например, $(-1, 2, 0)$ обозначим a_1.

Аналогично находим собственные векторы a_2 и a_3 оператора f, принадлежащие собственным значениям $\lambda_2 = 4$ и $\lambda_3 = 5$ соответственно:

$$a_2 = (0, 0, 1),$$
$$a_3 = (2, 1, 0).$$

Векторы a_1, a_2, a_3 попарно ортогональны. Пронормировав их, получим векторы $e_1' = (-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0)$, $e_2' = (0, 0, 1)$, $e_3' = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0)$, которые образуют ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^3$. В этом базисе матрица A оператора f имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Матрицы A и C связаны соотношением $A = TCT^{-1}$, где T – матрица перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису e_1', e_2', e_3'. Строками этой матрицы являются, очевидно, координаты векторов e_1', e_2', e_3', т.е.

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix}.$$

По лемме 2.3 матрица T ортогональна.

Сделаем проверку. Так как $T \cdot T^t =$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E,$$

то матрица T, действительно, ортогональна и

$$T^{-1} = T^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

. Отсюда имеем

$$\ldots = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & -[illegible] & [illegible] \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{2}} & \frac{5}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ -\frac{5}{\sqrt{2}} & \frac{5}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = A.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Сопряженный оператор.

1.1. Докажите, что оператор, сопряженный к оператору поворота евклидовой плоскости на угол α, есть оператор поворота на угол $(-\alpha)$.

1.2. Пусть ε – тождественный оператор евклидова пространства V. Найдите ε^*.

1.3. Пусть A – матрица линейного оператора f евклидова пространства V в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$; A^* – матрица оператора g в этом базисе. Всегда ли $g = f^*$?

1.4. Пусть f – произвольный оператор одномерного евклидова пространства V. Найдите f^*.

2. Первый критерий ортогональности линейного оператора.

2.1. Докажите, что тождественный оператор евклидова пространства ортогонален.

2.2. Докажите, что оператор поворота евклидовой плоскости на угол α является ортогональным.

2.3. Докажите, что каждое собственное значение ортогонального оператора по модулю равно единице.

2.4. Докажите, что ортогональный оператор сохраняет угол между векторами.

2.5. Докажите, что ядро ортогонального оператора нулевое.

3. Второй критерий ортогональности линейного оператора.

3.1. Докажите, что евклидов изоморфизм евклидова пространства V в себя является ортогональным оператором. Верно ли обратное?

3.2. Опишите все ортогональные операторы, действующие в одномерном евклидовом пространстве.

3.3. Докажите, что если два вектора x, y евклидова пространства имеют одинаковую длину, то существует ортогональный оператор f, переводящий x в y.

3.4. Пусть φ – ортогональный оператор евклидова пространства V. Будет ли оператор $-\varphi$ ортогональным?

4. Третий критерий ортогональности линейного оператора.

4.1. Чему равен определитель ортогональной матрицы?

4.2. Может ли вырожденная матрица быть ортогональной?

4.3. Пусть матрицы A и B ортогональны. Являются ли ортогональными матрицы AB и A^{-1}?

4.4. Докажите, что множество всех ортогональных операторов конечномерного евклидова пространства образует мультипликативную группу.

4.5. Какому условию должны удовлетворять действительные числа α и β, чтобы матрица $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ была ортогональна?

4.6. Может ли матрица ортогонального оператора в некотором базисе быть неортогональной?

5. Самосопряженный оператор.

5.1. Докажите, что оператор гомотетии H_α евклидова пространства является самосопряженным.

5.2. Может ли матрица самосопряженного линейного оператора в некотором базисе быть несимметрической?

5.3. Опишите все самосопряженные линейные операторы, действующие в одномерном евклидовом пространстве.

5.4. Что можно сказать о самосопряженном операторе f, если $(f(x), x) = 0$ для всех векторов x?

6. Свойства самосопряженного оператора.

6.1. Дайте определение ортогонального дополнения подпространства.

6.2. Докажите, что ортогональное дополнение пространства само является подпространством.

6.3. Докажите, что $\dim W^{\perp} = \dim V - \dim W$ для любого подпространства W конечномерного евклидова пространства V.

6.4. Покажите, что любой самосопряженный оператор евклидова пространства обладает собственными значениями.

7. Критерий самосопряженности линейного оператора.

7.1. Существует ли базис, составленный из неортогональных собственных векторов самосопряженного оператора?

7.2. Покажите, что всякий самосопряженный оператор конечномерного евклидова пространства диагонализируем.

7.3. Покажите, что всякая симметрическая матрица подобна диагональной матрице.

8. Диагонализируемость симметрических матриц.

8.1. Будет ли ортогональной матрица перехода от одного ортогонального базиса евклидова пространства к другому ортогональному базису?

8.2. Как найти ортогональную матрицу, диагонализирующую симметрическую матрицу.

ЗАДАНИЕ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

1. Докажите следующие свойства сопряженных линейных операторов евклидова пространства:

1.1 $(f^*)^* = f$;

1.2 $(f+g)^* = f^* + g^*$;

1.3 $(fg)^* = g^* f^*$;

1.4 $(\alpha f)^* = \alpha f^*$;

1.5 если оператор f обратим, то $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$;

1.6 $(f^n)^* = (f^*)^n$ для любого $n \in N$;

1.7 если операторы f и g перестановочны, то перестановочны и операторы f^* и g^*;

1.8 если подпространство W конечномерного евклидова пространства V инвариантно относительно линейного оператора f, то его ортогональное дополнение $W^{\perp}$ инвариантно относительно f^*;

1.9 ядро оператора f^* совпадает с ортогональным дополнением к образу оператора f;

1.10 $\operatorname{Ker}(ff^*) = \operatorname{Ker} f$.

1.11 если x – общий собственный вектор операторов f и f^*, то соответствующие вектору x собственные значения α и μ операторов f и f^* равны;

1.12 операторы f и f^* имеют одинаковые спектры.

2. В пространстве $\mathbb{R}_2[x]$ задано скалярное произведение: $(f,g) = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2$, где $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, $g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$. Пусть F – такой линейный оператор пространства $\mathbb{R}_2[x]$, что $F(f(x)) = f(x-a) - f(x-b)$. Найдите матрицу сопряженного оператора F^* в базисе $1, x, x^2$.

	a	b		a	b
2.1.	-1	2	2.7.	-1	3
2.2.	2	1	2.8.	3	-1
2.3.	1	-2	2.9.	-3	1
2.4.	2	3	2.10.	4	2
2.5.	-2	3	2.11.	-1	4
2.6.	3	-2	2.12.	3	4

3. Пусть e_1, e_2 – ортонормированный базис евклидова пространства V, A – матрица линейного оператора f в базисе $e_1' = e_1$, $e_2' = e_1 + e_2$. Найдите матрицу оператора f^* в базисе e_1', e_2'.

3.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

3.3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

3.4. $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$.

3.5. $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix}$.

3.6. $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\end{pmatrix}$.

3.7. $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$.

3.8. $A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$.

3.9. $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

3.10. $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

3.11. $A=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$.

3.12. $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

4. Найдите матрицу линейного оператора f^* в ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3, если f переводит векторы a_1, a_2, a_3 в векторы b_1, b_2, b_3 соответственно. Координаты всех векторов заданы в базисе e_1, e_2, e_3

	a_1	a_2	a_3
4.1.	(0 0 1),	(0 1 1),	(1 1 1).
4.2.	(2 3 5),	(0 1 2),	(1 0 0).
4.3.	(2 0 3),	(4 1 5),	(3 1 2).
4.4.	(1 1 1),	(0 1 0),	(1 0 2)
4.5.	(2 1 -3),	(3 2 -5),	(1 -1 1)
4.6.	(2 0 1),	(-1 2 3),	(-1 1 1).
4.7.	(1 0 0),	(1 1 0),	(1 1 1).
4.8.	(1 1 0)	(1 0 1),	(0 0 1).
4.9.	(-1 1 0),	(0,-1,2),	(0,0,-1).
4.10.	(-2 1 0),	(0 1 3),	(1 0 1).
4.11.	(1 1 1),	(0 0 -1),	(0 1 1).
4.12.	(-1 0 0),	(0 1 2),	(-2 -3 -5).

	b_1	b_2	b_3
4.1.	(1 2 1),	(3 1 2),	(7 -1 4).
4.2.	(1 1 1),	(1 1 -1),	(2 1 2).
4.3.	(1 2 -1),	(4 5 -2),	(1 -1 1).
4.4.	(1 1 1),	(0 1 0),	(1 0 1).
4.5.	(0 1 -2),	(-2 0 3),	(1 -1 1).
4.6.	(-3 0 1),	(0 2 3),	(1 1 1).
4.7.	(-1 -1 -1),	(-1 -1 1),	(0 1 0).
4.8.	(1 1 0),	(1 2 -1),	(0 1 3).
4.9.	(0 0 1),	(0 1 2),	(1 1 1).
4.10.	(1 0 1),	(2 1 0),	(1 0 3).
4.11.	(7 -1 4),	(-1 -2 -1),	(3 1 2).
4.12.	(-2 -1 -2),	(1 1 -1),	(-1 -1 -1).

5. Определите, является ли ортогональным линейный оператор φ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, действующий на векторы ортонормированного базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ по формулам:

5.1. $n=2$,
$\varphi(e_1)=e_1+e_2,\ \varphi(e_2)=e_2$.

5.2. $n=2$,
$\varphi(e_1)=e_1+e_2,\ \varphi(e_2)=e_1-e_2$.

5.3. $n=2$,
$\varphi(e_1)=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_2),\ \varphi(e_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1-e_2)$.

5.4. $n=2$,
$\varphi(e_1)=\frac{1}{13}(5e_1-12e_2),\ \varphi(e_2)=\frac{1}{13}(12e_1+5e_2)$.

5.5. $n=2$,
$\varphi(e_1)=\frac{1}{5}(3e_1+4e_2),\ \varphi(e_2)=\frac{1}{5}(4e_1+3e_2)$.

5.6. $n=3$, $\varphi(e_1)=e_1+2e_2+2e_3$,
$\varphi(e_2)=2e_1+e_2-2e_3,\ \varphi(e_3)=2e_1-2e_2+e_3$

5.7. $n=3$, $\varphi(e_1)=\frac{1}{3}(2e_1+e_2-2e_3)$,

$\varphi(e_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_3)$, $\varphi(e_3)=\frac{1}{3\sqrt{2}}(-e_1+4e_2+e_3)$.

5.8. $n=3$, $\varphi(e_1)=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_2)$,

$\varphi(e_2)=\frac{1}{2}(e_2+\sqrt{3}e_3)$, $\varphi(e_3)=\frac{1}{\sqrt{5}}(e_1-e_3)$.

5.9. $n=3$, $\varphi(e_1)=\frac{1}{5\sqrt{2}}(5e_1+4e_2-3e_3)$,

$\varphi(e_2)=\frac{1}{5\sqrt{2}}(5e_1-4e_2+3e_3)$, $\varphi(e_3)=\frac{1}{5}(3e_1+4e_3)$.

5.10. $n=2$,

$\varphi(e_1)=\frac{1}{3\sqrt{5}}(-6e_1+3e_2)$, $\varphi(e_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_2)$.

5.11. $n=2$,

$\varphi(e_1)=2e_1-\sqrt{3}e_2$, $\varphi(e_2)=-e_1+e_2$.

5.12. $n=2$,

$\varphi(e_1)=e_1$, $\varphi(e_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_2)$.

6. В ортонормированном базисе евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ линейный оператор задан матрицей B. Будет ли этот оператор ортогональным?

6.1. $B=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

6.2. $B=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

6.3. $B=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

6.4. $B=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

6.5. $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

6.6 $B=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

6.7. $B=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

6.8. $B=\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

6.9. $B=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

6.10. $B=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

6.11. $B=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

6.12. $B=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & 0 & -\frac{3}{\sqrt{13}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$.

7. Докажите следующие свойства самосопряженных линейных операторов евклидова пространства:

7.1 для любого линейного оператора f евклидова пространства оператор $f+f^*$ является самосопряженным;

7.2 для любого линейного оператора f евклидова пространства операторы ff^* и f^*f являются самосопряженными;

7.3 если операторы f и g являются самосопряженными, то оператор $f+g$ является самосопряженным;

7.4 если f и g – самосопряженные операторы и $fg=gf$, то fg – самосопряженный оператор;

7.5 если f и g – самосопряженные операторы, то $fg+gf$ – самосопряженный оператор;

7.6 если f – самосопряженный оператор, то αf – самосопряженный оператор для любого $\alpha \in \mathbb{R}$;

7.7 если оператор f является самосопряженным, то $ff^* = f^*f$;

7.8 если самосопряженный оператор f обратим, то f^{-1} – самосопряженный оператор;

7.9 если оператор f является самосопряженным, то и оператор f^n является самосопряженным для любого $n \in \mathbb{N}$;

7.10 линейная комбинация с действительными коэффициентами самосопряженных операторов является самосопряженным оператором;

7.11 множество всех самосопряженных линейных операторов евклидова пространства образует аддитивную группу;

7.12 в линейном пространстве $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}} V$ (V – конечномерное евклидово пространство) множество всех самосопряженных линейных операторов является линейным подпространством.

8. Найдите базис ортогонального дополнения линейной оболочки системы векторов M из $\mathbb{R}^4$.

8.1. $M=\{(1,0,2,1),(2,1,2,3),(0,1,-2,1)\}$.

8.2. $M=\{(1,1,1,1),(1,2,2,-1),(1,0,0,3)\}$.

8.3. $M=\{(2,1,1,-1),(1,1,3,0),(1,2,3,1)\}$.

8.4. $M=\{(1,2,2,2),(2,0,2,1),(1,-2,0,-1)\}$.

8.5. $M=\{(1,1,1,1),(-1,1,1,-1),(2,0,2,0)\}$.

8.6. $M=\{(1,-1,1,-1),(1,1,1,0),(0,1,0,-1)\}$.

8.7. $M=\{(1,-1,-1,1),(2,1,1,3),(0,1,-1,0)\}$.

8.8. $M=\{(0,1,-1,2),(2,-1,1,0),(0,0,1,1)\}$.

8.9. $M=\{(1,-1,1,0),(0,2,1,-1),(-1,-1,0,0)\}$.

8.10. $M=\{(-2,1,1,-1),(0,1,1,0),(-1,2,0,-1)\}$.

8.11. $M=\{(1,1,0,0),(1,2,1,-1),(0,1,0,1)\}$.

8.12. $M=\{(-1,2,0,1),(0,-1,1,0),(0,0,-1,1)\}$.

9. Для данной матрицы C найдите такую ортогональную матрицу T, что TCT^{-1} – диагональная матрица. Сделайте проверку.

9.1. $C=\begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$.

9.2. $C=\begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$.

9.3. $C=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

9.4. $C=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

9.5. $C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

9.6. $C=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

9.7. $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

9.8. $C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

9.9. $C=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

9.10. $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

9.11. $C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

9.12. $C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

10. Найдите собственные значения и ортонормированный базис e_1', e_2' из собственных векторов самосопряженного линейного оператора φ, заданного в некотором ортонормированном базисе e_1, e_2 матрицей D. Найдите матрицу оператора φ в базисе e_1', e_2'.

10.1. $D=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

10.2. $D=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

10.3. $D=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

10.4. $D=\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.

10.5. $D=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

10.6. $D=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$.

10.7. $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

10.8. $D = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 4 \end{pmatrix}$.

10.9. $D = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

10.10. $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

10.11. $D = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$

10.12. $D = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 1 \end{pmatrix}$.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

В дальнейшем будем рассматривать поле P, характеристика которого не равна 2.

Квадратичной формой от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **над полем** P называется многочлен от этих переменных с коэффициентами из поля P, каждое слагаемое которого второй степени.

Каждая квадратичная форма может быть записана в следующем симметричном виде:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = {} & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \\ & + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{2n}x_2x_n + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2, \end{aligned} \qquad [8.1]$$

где коэффициенты $a_{ij} \in P$ удовлетворяют условию

$$a_{ij} = a_{ji} \qquad [8.2]$$

Если в первоначальной записи квадратичной формы коэффициенты при x_ix_j и x_jx_i различны, то можно сложить их и, разделив сумму на 2, получить равные.

Матрица $A = (a_{ij})$, составленная из коэффициентов квадратичной формы $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, записанной в симметричном виде [8.1], называется **матрицей квадратичной формы** $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ранг матрицы A называется **рангом квадратичной формы** $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Из условия [8.2] следует, что матрица квадратичной формы является симметрической.

Квадратичную форму удобно записывать в матричной форме. Для этого введем в рассмотрение строку переменных $X = (x_1\, x_2 \ldots x_n)$. Тогда

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = XAX^t,$$

где A – матрица квадратичной формы $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Линейным преобразованием переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ над полем P называется переход от них к переменным $y_1, y_2, \dots y_n$ по формулам

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \dots + \alpha_{1n}y_n \\ x_2 &= \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \dots + \alpha_{2n}y_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= \alpha_{n1}y_1 + \alpha_{n2}y_2 + \dots + \alpha_{nn}y_n \end{aligned}\right\}, \qquad [8.3]$$

где $\alpha_{ij} \in P$. Матрица $A = (\alpha_{ij})$ называется матрицей линейного преобразования [8.3]. Линейное преобразование переменных с невырожденной матрицей называется невырожденным.

Если $X = (x_1\ x_2\ \dots\ x_n)$, $Y = (y_1\ y_2 \dots\ y_n)$, то система равенств [8.3] в матричной форме принимает вид

$$X^t = AY^t.$$

Если [8.3] – невырожденное линейное преобразование переменных, то можно выразить переменные $y_1, y_2, \dots, y_n$ через переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$Y^t = A^{-1}X^t. \qquad [8.4]$$

Линейное преобразование [8.4] переменных $y_1, y_2, \dots y_n$ называется обратным преобразованию [8.3].

Под произведением двух линейных преобразований переменных понимается их последовательное выполнение. Матрица произведения линейных преобразований переменных равна произведению матриц этих преобразований.

Квадратичная форма называется канонической, если она не содержит произведений различных переменных. Каноническим видом квадратичной формы $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется любая каноническая квадратичная форма $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$, в которую превращается форма $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в результате применения к входящим в нее переменным $x_1, x_2, \dots, x_n$ невырожденного линейного преобразования.

ТЕОРЕМА 8.1. Всякую квадратичную форму над полем P можно с помощью некоторого невырожденного линейного преобразования ее переменных над полем P привести к каноническому виду.

ТЕОРЕМА 8.2. Число ненулевых коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы над полем P не зависит от способа приведения квадратичной формы к этому виду и равно рангу квадратичной формы.

Теорема 8.2 позволяет ввести следующее определение. Число ненулевых коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы называется индексом инерции этой квадратичной формы.

Алгоритм приведения квадратичной формы к каноническому виду с помощью метода Лагранжа оказывается громоздким уже в случае, когда число переменных в квадратичной форме равно 4. В следующей теореме предлагается другой, более рациональный, способ приведения действительной квадратичной формы к каноническому виду.

ТЕОРЕМА 8.3. Для любой действительной квадратичной формы $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ существует линейное преобразование переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ с ортогональной матрицей, приводящее эту форму к каноническому виду; при этом коэффициенты при квадратах переменных будут корни характеристического многочлена матрицы квадратичной формы $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Нормальным видом комплексной квадратичной формы $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется такой ее канонический вид, в котором все ненулевые коэффициенты равны 1.

ТЕОРЕМА 8.4. Всякая комплексная квадратичная форма может быть приведена с помощью некоторого линейного невырожденного преобразования переменных к нормальному виду.

Нормальным видом действительной квадратичной формы $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется такой ее канонический вид, в котором все ненулевые коэффициенты равны либо 1, либо –1.

ТЕОРЕМА 8.5. Всякая действительная квадратичная форма может быть приведена с помощью некоторого линейного невырожденного преобразования переменных к нормальному виду.

Следующая теорема показывает, что нормальный вид действительной квадратичной формы определен однозначно (с точностью до наименования переменных), а число положительных и число отрицательных коэффициентов в нормальном виде являются инвариантами квадратичной формы.

ТЕОРЕМА 8.6. Число положительных и число отрицательных коэффициентов в нормальном виде действительной квадратичной формы не зависят от выбора невырожденного линейного преобразования переменных, приводящего эту форму к нормальному виду.

Число положительных коэффициентов в нормальном виде действительной квадратичной формы называется **положительным индексом инерции** этой квадратичной формы, а число отрицательных коэффициентов – ее **отрицательным индексом инерции**.

Действительная квадратичная форма $f(x_1,\dots,x_n)$ называется **положительно определенной**, если для любых n действительных чисел $a_1,a_2,\dots,a_n$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, имеет место неравенство

$$f(a_1,a_2,\dots,a_n)>0.$$

Действительная квадратичная форма $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ называется **отрицательно определенной**, если для любых n действительных чисел $a_1,a_2,\dots,a_n$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, имеет место неравенство

$$f(a_1,a_2,\dots,a_n)<0.$$

Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы называются **знакоопределенными**.

ЛЕММА 8.1. Если к переменным положительно определенной квадратичной формы применить невырожденное линейное преобразование, то полученная квадратичная форма также является положительно определенной.

ЛЕММА 8.2. Если к переменным отрицательно определенной квадратичной формы применить невырожденное линейное преобразование, то полученная квадратичная форма также является отрицательно определенной.

На следующих двух теоремах основаны способы распознавания характера определенности действительной квадратичной формы

путем приведения ее к каноническому виду.

ТЕОРЕМА 8.7. Для того, чтобы действительная квадратичная форма от n переменных была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы положительный индекс инерции этой квадратичной формы был равен n.

ТЕОРЕМА 8.8. Для того, чтобы действительная квадратичная форма от n переменных была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы отрицательный индекс инерции этой квадратичной формы был равен n.

Главными минорами квадратной матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называются миноры:

$$\Delta_1=|a_{11}|,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\dots,\quad \Delta_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

т.е. миноры, расположенные в левом верхнем углу матрицы A.

ЛЕММА 8.3. Знак определителя матрицы действительной квадратичной формы не меняется при применении к этой форме невырожденного линейного преобразования переменных.

СЛЕДСТВИЕ. Определитель матрицы положительно определенной квадратичной формы – положительное число.

ТЕОРЕМА 8.9. Действительная квадратичная форма является положительно определенной тогда и только тогда, когда все главные миноры ее матрицы положительны. Действительная квадратичная форма является отрицательно определенной тогда и только тогда, когда все главные миноры нечетного порядка ее матрицы отрицательны, а все главные миноры четного порядка положительны.

Способ распознавания характера определенности квадратичной формы, основанный на теореме 8.9, называется к р и т е р и е м С и л ь в е с т р а.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАЧ

ПРИМЕР I. Запишите в симметричном виде и найдите ранг квадратичной формы

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_1x_2+x_2^2-2x_3x_1-3x_2x_3+4x_1x_3.$$

Р е ш е н и е. Прежде всего, в квадратичной форме приведем подобные. Тогда квадратичная форма будет иметь следующий вид:

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_1x_2+2x_1x_3+x_2^2-3x_2x_3.$$

Запишем $f(x_1,x_2,x_3)$ в симметричном виде:

$$f(x_1,x_2,x_3)= x_1^2+2x_1x_2+x_1x_3+$$
$$+2x_2x_1+x_2^2-\tfrac{3}{2}x_2x_3+$$
$$+x_3x_1-\tfrac{3}{2}x_3x_2+0\cdot x_3^2.$$

Тогда матрицей квадратичной формы f будет матрица

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -\frac{3}{2}\\ 1 & -\frac{3}{2} & 0\end{pmatrix}.$$

Так как матрица A имеет ранг 3, то ранг квадратичной формы f равен трем.

ПРИМЕР 2. Методом Лагранжа приведите квадратичную форму f к нормальному виду над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. Укажите линейное преобразование переменных, приводящее к этому виду:

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-4x_2x_3.$$

Р е ш е н и е. I) Приведем квадратичную форму f к каноническому виду методом Лагранжа. Так как в f нет квадратов переменных, то сделаем замену переменных

$$x_1=y_1-y_2,$$
$$x_2=y_1+y_2,$$
$$x_3=y_3$$

с матрицей линейного преобразования

$$A_1=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Получим квадратичную форму

$$f(y_1,y_2,y_3)=2y_1^2-2y_2^2-4y_1y_3-4y_2y_3.$$

Теперь сделаем еще одно линейное преобразование переменных

$$z_1=2y_1-2y_3,\qquad\qquad y_1=\tfrac{1}{2}z_1+z_3,$$
$$z_2=y_2,\qquad \text{или}\qquad y_2=z_2,$$
$$z_3=y_3\qquad\qquad y_3=z_3$$

с матрицей линейного преобразования

$$A_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Получим квадратичную форму

$$f(z_1,z_2,z_3)=\tfrac{1}{2}z_1^2-2z_2^2-2z_3^2-4z_2z_3.$$

Наконец, преобразование переменных

$$t_1=z_1,\qquad\qquad z_1=t_1,$$
$$t_2=-2z_2-2z_3,\qquad \text{или}\qquad z_2=-\tfrac{1}{2}t_2-t_3,$$
$$t_3=z_3\qquad\qquad z_3=t_3$$

с матрицей преобразования

$$A_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

приводит квадратичную форму к каноническому виду

$$f(t_1,t_2,t_3)=\frac{1}{2}t_1^2-\frac{1}{2}t_2^2.$$

2) Найдем нормальный вид квадратичной формы f над полем $\mathbb{R}$. Для этого сделаем замену переменных

$$u_1=\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,t_1,\quad u_2=\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,t_2,\quad u_3=t_3 \qquad \text{или} \qquad t_1=\sqrt{2}\,u_1,\quad t_2=\sqrt{2}\,u_2,\quad t_3=u_3$$

с матрицей линейного преобразования

$$A_4=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Получим нормальный вид квадратичной формы f над полем $\mathbb{R}$:

$$f(u_1,u_2,u_3)=u_1^2-u_2^2.$$

Матрицей линейного преобразования переменных будет матрица

$$T=A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot A_4=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 2\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Невырожденное линейное преобразование переменных x_1,x_2,x_3, приводящее к нормальному виду над полем $\mathbb{R}$, следующее:

$$x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}u_1+\frac{\sqrt{2}}{2}u_2+2u_3,$$
$$x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}u_1-\frac{\sqrt{2}}{2}u_2,$$
$$x_3=u_3.$$

Нетрудно проверить непосредственно, что при этом преобразовании форма $f(x_1,x_2,x_3)$ примет вид формы $f(u_1,u_2,u_3)$.

3) Для нахождения нормального вида квадратичной формы f над полем $\mathbb{C}$ сделаем замену переменных

$$v_1=\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,t_1,\quad v_2=\sqrt{-\tfrac{1}{2}}\,t_2,\quad v_3=t_3 \qquad \text{или} \qquad t_1=\sqrt{2}\,v_1,\quad t_2=i\sqrt{2}\,v_2,\quad t_3=v_3$$

с матрицей линейного преобразования

$$B_4=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & i\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Получим нормальный вид квадратичной формы f над полем $\mathbb{C}$:

$$f(v_1,v_2,v_3)=v_1^2+v_2^2.$$

Матрицей линейного преобразования переменных x_1,x_2,x_3 будет матрица

$$T_1=A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot B_4=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & i\frac{\sqrt{2}}{2} & 2\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -i\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Линейное преобразование переменных x_1,x_2,x_3, приводящее к нормальному виду над $\mathbb{C}$, имеет вид

$$x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}v_1+i\frac{\sqrt{2}}{2}v_2+2v_3,$$
$$x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}v_1-i\frac{\sqrt{2}}{2}v_2,$$
$$x_3=v_3.$$

ПРИМЕР 3. При каких значениях λ квадратичная форма

$$f(x_1,x_2)=\lambda x_1^2-4x_1x_2+(\lambda+3)x_2^2$$

является отрицательно определенной?

Решение. Составим матрицу квадратичной формы f:

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & -2\\ -2 & \lambda+3\end{pmatrix}.$$

Матрица A имеет два главных минора

$$\Delta_1=|\lambda|=\lambda,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}\lambda & -2\\ -2 & \lambda+3\end{vmatrix}=\lambda^2+3\lambda-4.$$

Согласно критерию Сильвестра, квадратичная форма f является отрицательно определенной, если

$$\begin{cases}\Delta_1<0,\\ \Delta_2>0\end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases}\lambda<0,\\ \lambda^2+3\lambda-4>0.\end{cases}$$

Решая систему, найдем, что $\lambda \in (-\infty; -4)$.

Итак, при $\lambda \in (-\infty, -4)$ квадратичная форма $f(x_1, x_2)$ является отрицательно определенной.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

I. Определение квадратичной формы.

I.1. Запишите квадратичную форму $f(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 + x_1x_2 + 3x_2^2 - 3x_2x_1 - 4x_2x_3$ в симметричном виде.

I.2. Запишите квадратичную форму, если ее матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 21 \\ 2 & -3 & 3 \\ 21 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

I.3. Каким свойством обладает матрица квадратичной формы?

I.4. Запишите квадратичную форму $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в матричном виде.

2. Линейные преобразования переменных.

2.I. Запишите линейное преобразование переменных в матричном виде.

2.2. Всякое ли линейное преобразование переменных имеет обратное?

2.3. Найдите произведение линейных преобразований

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + y_2, \\ x_2 = -y_1 + 3y_2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y_1 = -z_1 + z_2, \\ y_2 = 2z_1 - 4z_2. \end{cases}$$

2.4. Найдите линейное преобразование переменных, обратное преобразованию

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + y_3, \\ x_2 = -y_1 + y_2 - y_3, \\ x_3 = -2y_1 \quad + y_3. \end{cases}$$

3. Приведение квадратичной формы к каноническому виду с помощью метода Лагранжа.

3.I. Какой вид имеет матрица канонической квадратичной формы?

3.2. На примере квадратичной формы $f(x_1, x_2) = x_1x_2$ покажите, что одна и та же квадратичная форма с помощью различных линейных невырожденных преобразований переменных может быть приведена к различным каноническим видам.

3.3. Изложите сущность метода Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду.

3.4. Как находится невырожденное линейное преобразование переменных, приводящее квадратичную форму к каноническому виду?

4. Индекс инерции квадратичной формы.

4.I. Как изменяется матрица квадратичной формы при линейном преобразовании переменных?

4.2. Не приводя квадратичную форму $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 - x_2x_3$ к каноническому виду, определите число ненулевых коэффициентов в каноническом виде этой формы.

4.3. Как определить индекс инерции квадратичной формы?

5. Приведение действительной квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования переменных.

5.I. Какое линейное преобразование переменных называется ортогональным?

5.2. Как построить ортогональное преобразование переменных, приводящее данную квадратичную форму к каноническому виду?

5.3. Как определить канонические коэффициенты квадратичной формы, приведенной к каноническому виду ортогональным преобразованием переменных?

6. Нормальный вид комплексной квадратичной формы.

6.I. Приведите квадратичную форму $f(x_1, x_2) = x_1x_2$ к нормальному виду над полем комплексных чисел.

6.2. Как по каноническому виду комплексной квадратичной формы построить ее нормальный вид?

6.3. Как определить число ненулевых коэффициентов в нормальном виде комплексной квадратичной формы, не приводя эту форму к каноническому виду?

7. Нормальный вид действительной квадратичной формы.

7.1. Приведите квадратичную форму $f(x_1, x_2) = 2x_1x_2$ к нормальному виду над полем действительных чисел.

7.2. Как по каноническому виду действительной квадратичной формы построить ее нормальный вид?

8. Закон инерции действительных квадратичных форм.

8.1. Зависит ли число положительных коэффициентов в каноническом виде действительной квадратичной формы от выбора преобразования переменных, приводящего квадратичную форму к каноническому виду?

8.2. Как связаны между собой положительный индекс инерции, отрицательный индекс инерции и ранг матрицы действительной квадратичной формы?

9. Знакоопределенные квадратичные формы.

9.1. Приведите примеры знакоопределенных квадратичных форм.

9.2. [illegible] является отрицательно [illegible] тогда и только [illegible] когда форма [illegible] является положительно [illegible].

9.3. [illegible] квадратичной формы [illegible] преобразования [illegible]?

9.4. [illegible]

10. Критерии определенности квадратичной формы.

10.1. Чему равен ранг матрицы положительно (отрицательно) определенной квадратичной формы?

10.2. Докажите, что матрица положительно (отрицательно) определенной квадратичной формы является невырожденной.

10.3. Докажите теорему 8.8.

10.4. Докажите, что для того, чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы в ее каноническом виде все коэффициенты были положительными.

11. Критерий Сильвестра.

11.1. Как определить характер определенности квадратичной формы, не применяя критерия Сильвестра?

11.2. Какие миноры квадратной матрицы называются главными?

11.3. Докажите критерий Сильвестра для отрицательно определенных квадратичных форм, опираясь на критерий Сильвестра для положительно определенных квадратичных форм.

ЗАДАНИЕ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

I. Запишите матрицы квадратичных форм F_1, F_2. Вычислите ранги этих квадратичных форм.

I.1. $F_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+2xy-2yz+6xz$;
$F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2+2x_1x_2-x_3^2-4x_2x_4$.

I.2. $F_1(x,y,z) = x^2-2xy+2z^2+4yz+5z^2$.
$F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4$.

I.3. $F_1(x,y,z) = x^2-4xy+2xz+4y^2+z^2$;
$F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4+x_2^2+2x_2x_3$.

I.4. $F_1(x,y,z) = 2x^2+9y^2-3z^2+6xy-4xz-10yz$;
$F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2+x_1x_2+x_3x_4$.

I.5. $F_1(x,y,z) = x^2+4y^2+4xy-2xz+z^2$,
$F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = 2x_1++x_1x_2-x_3^2+x_1x_3+x_4^2$.

I.6. $F_1(x,y,z) = x^2+2y^2+4xy-2xz-4yz-z^2$;
$F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2+x_1x_2+2x_3x_4+x_4^2$.

I.7. $F_1(x,y,z) = x^2+4y^2+9z^2-4xy+6xz-12yz$;
$F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = 2x_1x_2-6x_1x_3-6x_2x_4+2x_3x_4$.

I.8. $F_1(x,y,z) = y^2+2xy+4xz-2yz$;
$F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-2x_3^2-4x_3x_4-2x_4^2$.

I.9. $F_1(x,y,z) = xy+xz+yz+z^2$;
$F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = 9x_1^2+5x_3^2+8x_4^2+3x_2x_3-4x_2x_4$.

I.10. $F_1(x,y,z)=x^2+z^2-2y^2+4xy-10xz+4yz$,

$F_2(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2-3x_3^2+2x_1x_3-4x_2x_4$.

I.11. $F_1(x,y,z)=3x^2+xy-2yz+4xz$;

$F_2(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2-x_2^2+2x_3^2-x_1x_4+2x_3x_4$.

I.12. $F_1(x,y,z)=z^2-y^2+2x^2+3xy-2yz$;

$F_2(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+x_3^2-2x_4^2+x_1x_2-2x_4x_3$.

2. Методом Лагранжа приведите квадратичные формы G_1 и G_2 к каноническому виду. Укажите невырожденное линейное преобразование переменных, приводящее к этому виду. Сделайте проверку.

2.1. $G_1=x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$;

$G_2=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$.

2.2. $G_1=x_1^2-2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3$;

$G_2=2x_1x_3-4x_2x_3$.

2.3. $G_1=x_1^2-3x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-6x_2x_3$;

$G_2=2x_1x_4-x_3x_1+2x_2x_3$.

2.4. $G_1=x_1^2+5x_2^2-4x_3^2+2x_1x_3-4x_1x_2$;

$G_2=-4x_1x_2+2x_1x_3$.

2.5. $G_1=4x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-3x_2x_3$;

$G_2=x_1x_2-4x_2x_3+6x_1x_3$.

2.6. $G_1=x_1x_2+x_1x_3+4x_2x_3$;

$G_2=2x_1^2+4x_1x_2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_3$.

2.7. $G_1=2x_1^2+6x_2^2-4x_3^2-2x_1x_3+4x_1x_2-3x_2x_3$;

$G_2=x_2x_3-2x_1x_3$.

2.8. $G_1=2x_1^2+3x_2^2+4x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3-3x_2x_3$;

$G_2=x_1x_3-2x_2x_3$.

2.9. $G_1=3x_1^2-2x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2-3x_1x_3-x_2x_3$;

$G_2=2x_1x_3+4x_1x_2-2x_2x_3$.

2.10. $G_1=5x_1^2+6x_2^2+4x_1x_2-3x_3^2-2x_2x_3$;

$G_2=6x_2x_3-x_1x_2$.

2.11. $G_1=x_1x_2+x_2x_3$;

$G_2=3x_1^2-2x_2^2+2x_1x_3-4x_2x_3$.

2.12. $G_1=-2x_3^2+2x_1x_3-6x_1x_2+x_1^2$;

$G_2=6x_2x_3-4x_1x_2+x_1x_3$.

3. Определите индексы инерции квадратичных форм F_1, G_1, F_2, G_2 из заданий I и 2.

4. Найдите ортогональную матрицу T такую, что TAT^{-1} – диагональная матрица, где A – матрица квадратичной формы F. Сделайте проверку.

4.1. $F=x_1^2+2x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3$.

4.2. $F=17x_1^2+17x_2^2+11x_3^2-16x_1x_2+8x_1x_3-8x_2x_3$.

4.3. $F=5x_1^2+5x_2^2+5x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$.

4.4. $F=x_2^2+2x_1x_3$.

4.5. $F=2x_1^2-x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$.

4.6. $F=11x_1^2+5x_2^2+2x_3^2+16x_1x_2+4x_1x_3-20x_2x_3$.

4.7. $F=x_1^2+x_2^2+5x_3^2-6x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$.

4.8. $F=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$.

4.9. $F=x_1^2-5x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$.

4.10. $F=3x_1^2-3x_2^2+4x_3^2+8x_1x_2$.

4.11. $F=2x_1^2+2x_2^2-5x_3^2+2x_1x_2$.

4.12. $F=x_1^2+2x_2x_3+2x_1x_3+x_2^2$.

5. Найдите ортогональное преобразование переменных, приводящее квадратичную форму $F(x_1, x_2, x_3)$ к каноническому виду.

5.1. $F = x_1^2 + x_2^2 + [illegible]x_3^2 + 2x_1x_2.$

5.2. $F = 3x_1^2 - 7x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3.$

5.3. $F = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$

5.4. $F = 7x_1^2 + 7x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$

5.5. $F = x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$

5.6. $F = 3x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3.$

5.7. $F = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$

5.8. $F = x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$

5.9. $F = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3.$

5.10. $F = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3.$

5.11. $F = 2x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$

5.12. $F = 3x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 + 6x_1x_2.$

6. Найдите нормальный вид над полем $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ и невырожденное линейное преобразование переменных, приводящее к этому виду, для квадратичных форм F из заданий 4 и 5.

7. Вычислите положительный и отрицательный индексы инерции квадратичных форм G_1, G_2 из задания 2. Являются ли эти формы положительно определенными (отрицательно определенными)?

8. При каких значениях λ квадратичная форма F является положительно (отрицательно) определенной?

8.1. $F = 5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$

8.2. $F = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3.$

8.3. $F = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$

8.4. $F = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3.$

8.5. $F = x_1^2 - \lambda x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_2x_3.$

8.6. $F = \lambda x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$

8.7. $F = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3.$

8.8. $F = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 8\lambda x_1x_3 - 12x_2x_3 + x_2^2.$

8.9. $F = \lambda x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_3x_1 + x_2^2 + 4x_1^2.$

8.10. $F = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 2\lambda x_1x_2 + 4x_1x_3.$

8.11. $F = \lambda x_1^2 + 2x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_1x_2.$

8.12. $F = x_1^2 + \lambda x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3.$

СОДЕРЖАНИЕ

Лабораторные работы по курсу "Алгебра и теория чисел" (раздел "Линейная алгебра", часть 3) для студентов математического факультета

Составители: Бузланов Александр Васильевич
Каморников Сергей Федорович
Кармазин Александр Петрович

Ответственный за выпуск А.П.Кармазин

Редактор Е.Ф.Зайцева

Подписано в печать I4.03.9I. Формат 60x84 I/I6. Бумага писчая № I. Печать офсетная. Усл.п.л. 3,07. Уч.-изд.л.2,6. Тираж 200 экз. Заказ 32 Беспл.
Отпечатано на ротапринте ГГУ им. Ф.Скорины. г.Гомель, ул.Советская, I04.