МИНИСТЕРСТВО НАРОДНОГО ОБРАЗОВАНИЯ БССР

ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Ф.СКОРИНЫ

Кафедра алгебры и геометрии

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

по курсу "Алгебра и теория чисел"
(раздел "Линейная алгебра", часть I)
для студентов математического факультета

Гомель 1990

Составители: А.В.Бузланов, С.Ф.Каморников, А.П.Кармазин

Рекомендовано к печати методическим советом математического факультета Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины

Предназначено для студентов математического факультета при изучении общего курса алгебры и теории чисел.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее издание представляет собой первую часть задуманного цикла лабораторных работ по линейной алгебре. Эта часть посвящена фундаментальным понятиям теории линейных (векторных) пространств. Усвоению студентами этих понятий способствует следующая структура отдельной лабораторной работы: I) краткое, но полное изложение теоретического материала; 2) примеры решения и оформления типовых практических задач; 3) подборка вопросов для самоконтроля, с помощью которых студент может проверить усвоение материала; 4) двенадцать вариантов индивидуальных заданий.

Отметим, что теоретический материал, предшествующий лабораторной работе, подробно излагается на лекциях. В работе приводятся образцы решения лишь ключевых задач изучаемой темы, другие же задачи либо объясняются на практических занятиях, либо предлагаются для самостоятельного решения. Вопросы для самоконтроля разбиваются на несколько блоков, заглавия которых - вопросы экзаменационного билета. Таким образом, студент, готовясь к сдаче лабораторной работы, сможет заочно испытать силы перед экзаменом.

Выполнение лабораторных работ оценивается по четырехбалльной системе. Получение положительных оценок по всем лабораторным работам служит допуском к экзамену.

Лабораторная работа (ее практическая часть) выполняется студентом в отдельной тетради и перед зачетом сдается предварительно для проверки. На зачете проверяются не только умения и навыки в решении практических задач, но и выясняется знание студентом теоретического материала. Каждая лабораторная работа выполняется в определенные, заранее оговариваемые сроки, перенос которых недопустим.

По изучаемому курсу нами рекомендуются ниже следующие учебники и задачники по алгебре. Сразу обратим внимание на то, что в различных учебных пособиях материал излагается по-разному, имеются расхождения в обозначениях, терминах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Милованов М.В., Толкачев М.М., Тышкевич Р.И., Феденко А.С. Алгебра и аналитическая геометрия. Часть 2. - Мн.: Выш.шк., 1987.
2. Тышкевич Р.И., Феденко А.С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. - Мн.: Выш.шк., 1976.
3. Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия. - М: Наука, 1976.
4. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - М.: Наука, 1979.
5. Бурдун А.А., Мурашко Е.А., Толкачев М.М., Феденко А.С. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии. - Мн.: Университетское, 1989.
6. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. - М.: Наука, 1984.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ НАЧАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА

Линейным (векторным) пространством над полем P называется непустое множество V, удовлетворяющее следующим условиям:

1. Каждой паре (x, y) элементов $x, y \in V$ соответствует однозначно определенный элемент $x+y \in V$, называемый их **суммой**, причем

(1.1) $(x+y)+z = x+(y+z)$ для любых $x, y, z \in V$;

(1.2) в V существует такой элемент Θ, что $x+\Theta = \Theta+x = x$ для всех $x \in V$;

(1.3) для каждого элемента $x \in V$ существует элемент $y \in V$ такой, что $x+y = y+x = \Theta$;

(1.4) $x+y = y+x$ для любых $x, y \in V$.

2. Каждой паре (α, x), где $\alpha \in P$, $x \in V$, соответствует однозначно определенный элемент $\alpha x \in V$, называемый **произведением** элементов α и x, причем:

(2.1) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ для любых $\alpha, \beta \in P$ и любого $x \in V$;

(2.2) $1x = x$ для любого $x \in V$ (здесь 1 - единичный элемент поля P);

(2.3) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$ для любого $\alpha \in P$ и любых $x, y \in V$;

(2.4) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$ для любых $\alpha, \beta \in P$ и любого $x \in V$.

Если V - линейное пространство над полем P, то элементы из V называются **векторами**, а элементы поля P - **скалярами**. Вектор Θ называется **нулевым** вектором. **Противоположным** к вектору $x \in V$ называется такой вектор $y \in V$, что $x+y = y+x = \Theta$. Этот вектор удобно обозначать через $-x$.

Линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ называется **действительным**, над полем $\mathbb{C}$ - **комплексным**.

Из определения линейного пространства следует, что оно является абелевой группой относительно операции сложения векторов.

Приведем несколько важных примеров линейных пространств (в дальнейшем мы будем ссылаться на обозначения, которые вводятся в этих примерах).

1. Через V^3 обозначим множество всех геометрических векторов в трехмерном пространстве, т.е. множество направленных отрезков. Относительно операций сложения векторов и умножения их на действительные числа V^3 является линейным пространством над $\mathbb{R}$.

2. Действительным линейным пространством является V^2 – множество всех геометрических векторов на плоскости с обычными операциями – сложением векторов и умножением вектора на действительное число и V^1 – множество всех геометрических векторов на прямой.

3. Линейным пространством над полем P является множество, состоящее из одного элемента Θ, если сложение векторов и умножение вектора на произвольный скаляр $\alpha \in P$ определить следующим образом: $\Theta + \Theta = \Theta$, $\alpha\Theta = \Theta$. Это пространство называется *нулевым*.

4. Пусть P – поле и $P^n = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in P\}$ – n-я декартова степень множества P. Определим на множестве P^n сложение и умножение на скаляр следующим образом:

1) для любых $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$ из P^n
$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n);$$
2) для любого $x = (x_1, \dots, x_n) \in P^n$ и любого $\alpha \in P$
$$\alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n).$$

Относительно введенных операций P^n является линейным пространством над полем P. Пространство P^n называется *пространством n-мерных строк* над полем P. Пространство $\mathbb{R}^n$ называется *n-мерным арифметическим пространством*.

5. Множество $M(n, P)$ всех квадратных матриц n-го порядка над полем P с операциями сложения матриц и умножения матриц на скаляр является пространством над полем P.

6. Множество $C_{[a,b]}$ всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций действительной переменной x – линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, если сумма двух функций и произведение функции на действительное число определяются поточечно, т.е.
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

7. Множество $P[x]$ всех многочленов переменной x над полем P относительно сложения многочленов и умножения многочлена на скаляр поля P является линейным пространством над полем P.

8. Множество $P_n[x]$ всех многочленов переменной x над полем P, степени которых не превосходят натурального числа n, – линейное пространство над полем P.

ЛЕММА 1.1. Пусть V – линейное пространство над полем P. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) в V существует единственный нулевой вектор;

2) для каждого $x \in V$ существует единственный противоположный вектор;

3) $0x = \Theta$ для любого $x \in V$;

4) $(-1)x = -x$ для любого $x \in V$;

5) $\alpha\Theta = \Theta$ для любого $\alpha \in P$.

Все утверждения леммы 1.1 являются простыми следствиями аксиом линейного пространства.

Пусть V – линейное пространство над полем P. *Системой векторов* называется конечная последовательность векторов
$$a_1, a_2, \dots, a_n \qquad [1.1]$$
пространства V. Подпоследовательность этой последовательности называется *подсистемой*.

Если $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – некоторые элементы поля P, то вектор $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n$ называется *линейной комбинацией векторов* [1.1], а скаляры $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – *коэффициентами* этой линейной комбинации. Если для вектора $x \in V$ существуют такие скаляры $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, что $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n$, то говорят, что вектор x *линейно выражается через векторы системы* [1.1].

Система векторов [1.1] называется *линейно зависимой*, если существуют такие скаляры $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ из поля P, не все равные нулю, что
$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = \Theta \qquad [1.2].$$

Система векторов [1.1] называется *линейно независимой*, если равенство [1.2] имеет место лишь тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

ЛЕММА 1.2. Имеют место утверждения:

1) Если какая-то подсистема векторов линейно зависима, то и вся система векторов линейно зависима.

2) Если система векторов линейно независима, то и любая ее подсистема линейно независима.

ТЕОРЕМА 1.1. При $n>1$ система векторов [1.1] линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов этой системы линейно выражается через остальные.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть система векторов $a_1,\ldots,a_k,a_{k+1}$ линейно зависима, а ее подсистема $a_1,\ldots,a_k$ линейно независима. Тогда вектор a_{k+1} является линейной комбинацией векторов $a_1,\ldots,a_k$.

Два линейных пространства V и V' над одним и тем же полем P называются и з о м о р ф н ы м и , если существует биективное отображение $\varphi: V \to V'$ такое, что:

1) $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$ для всех $x,y\in V$;

2) $\varphi(\alpha x)=\alpha\varphi(x)$ для любого $x\in V$ и любого $\alpha\in P$.

Отображение φ в этом случае называется и з о м о р ф и з м о м векторных пространств V и V'. Если пространства V и V' изоморфны то пишут: $V\cong V'$.

ТЕОРЕМА 1.3. Отношение изоморфизма векторных пространств есть отношение эквивалентности на множестве всех пространств над одним и тем же полем.

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть $\varphi: V\to V'$ - изоморфизм линейных пространств V и V' над полем P . Тогда:

1) если Θ - нулевой вектор из V , то $\varphi(\Theta)$ - нулевой вектор пространства V' ;

2) если система $a_1,a_2,\ldots,a_n$ векторов пространства V линейно независима, то система векторов $\varphi(a_1),\varphi(a_2),\ldots,\varphi(a_n)$ пространства V' линейно независима.

П р и м е р ы   р е ш е н и я   и   о ф о р м л е н и я   з а д а ч

П р и м е р 1. Пусть $V=\mathbb{R}^2=\{(a_1,a_2)\mid a_1,a_2\in\mathbb{R}\}$. Сложение на V определим равенством $(a_1,a_2)+(b_1,b_2)=(a_1+b_1,a_2+b_2)$, умножение действительных чисел на элементы из V - равенством $\lambda(a_1,a_2)=(\lambda a_1,a_2)$. Является ли V действительным линейным пространством относительно заданных операций?

Р е ш е н и е . Проверим выполнение условий определения линейного пространства.

1. Любым двум элементам $(a_1,a_2),(b_1,b_2)$ множества V соответствует элемент (a_1+b_1,a_2+b_2) , который определяется однозначно и принадлежит множеству V .

(1.1) Для любых (a_1,a_2), (b_1,b_2) , (c_1,c_2) из множества V верно равенство

$$((a_1,a_2)+(b_1,b_2))+(c_1,c_2)=(a_1+b_1,a_2+b_2)+(c_1,c_2)=$$
$$=((a_1+b_1)+c_1,(a_2+b_2)+c_2)=(a_1+(b_1+c_1),a_2+(b_2+c_2))=$$
$$=(a_1,a_2)+(b_1+c_1,b_2+c_2)=(a_1,a_2)+((b_1,b_2)+(c_1,c_2)).$$

Здесь использован закон ассоциативности сложения действительных чисел.

(1.2) Нулевым элементом является $\Theta=(0,0)$. Он принадлежит V и для любого элемента (a_1,a_2) из V

$$(a_1,a_2)+(0,0)=(0,0)+(a_1,a_2)=(a_1,a_2).$$

(1.3) Для элемента $(a_1,a_2)\in V$ противоположным будет элемент $(-a_1,-a_2)$, так как он принадлежит V и

$$(a_1,a_2)+(-a_1,-a_2)=(-a_1,-a_2)+(a_1,a_2)=(0,0).$$

(1.4) Для любых элементов (a_1,a_2) и (b_1,b_2) из множества V верно равенство

$$(a_1,a_2)+(b_1,b_2)=(a_1+b_1,a_2+b_2)=$$
$$=(b_1+a_1,b_2+a_2)=(b_1,b_2)+(a_1,a_2).$$

Мы использовали свойство коммутативности сложения действительных чисел.

2. Любым двум элементам $\alpha\in\mathbb{R}$ и $(a_1,a_2)\in V$ соответствует однозначно определенный элемент $(\alpha a_1,a_2)$, принадлежащий V .

(2.1) Для любых $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ и любого элемента (a_1,a_2) из V верно

$$(\alpha\beta)(a_1,a_2)=((\alpha\beta)a_1,a_2)=(\alpha(\beta a_1),a_2)=$$
$$=\alpha(\beta a_1,a_2)=\alpha(\beta(a_1,a_2)).$$

В преобразовании использован закон ассоциативности умножения действительных чисел.

(2.2) $1\in\mathbb{R}$, (a_1,a_2) - любой элемент из V .

Тогда $1(a_1,a_2)=(1a_1,a_2)=(a_1,a_2)$.

(2.3) Для любого действительного числа α и любых элементов $(a_1,a_2),(b_1,b_2)$ множества V верно равенство

$$\alpha((a_1,a_2)+(b_1,b_2))=\alpha(a_1+b_1,a_2+b_2)=(\alpha(a_1+b_1),a_2+b_2)=$$
$$=(\alpha a_1+\alpha b_1,a_2+b_2)=(\alpha a_1,a_2)+(\alpha b_1,b_2)=\alpha(a_1,a_2)+$$
$$+\alpha(b_1,b_2).$$

(2.4) Возьмем любые α и β из $\mathbb{R}$ и (a_1, a_2) из V.

Тогда $(\alpha+\beta)(a_1,a_2) = ((\alpha+\beta)a_1, a_2) = (\alpha a_1 + \beta a_1, a_2)$,

но $\alpha(a_1,a_2) + \beta(a_1,a_2) = (\alpha a_1, a_2) + (\beta a_1, a_2) =$
$= (\alpha a_1 + \beta a_1, a_2 + a_2) = (\alpha a_1 + \beta a_1, 2a_2)$.

Значит, $(\alpha+\beta)(a_1,a_2) \neq \alpha(a_1,a_2) + \beta(a_1,a_2)$ и множество V не образует действительное линейное пространство относительно заданных операций.

Пример 2. Исследуйте, являются ли данные векторы линейно зависимыми:

а) $a_1 = (1,2,3,4), a_2 = (3,6,9,12), a_3 = (1,2,3,6)$ из $\mathbb{R}^4$;

б) $f_1(x) = 1, \ldots, f_{n+1}(x) = x^n$ из $\mathbb{R}_n[x]$.

Решение. а) Из равенства

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = \Theta,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – элементы поля $\mathbb{R}$, $\Theta = (0,0,0,0)$ – нулевой элемент пространства $\mathbb{R}^4$, легко получить систему линейных уравнений относительно $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, приравняв соответствующие элементы строк в обеих частях равенства:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_1 + 6\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 + 9\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0, \\ 4\alpha_1 + 12\alpha_2 + 6\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему методом Гаусса, находим $\alpha_1 = -3\alpha_2, \alpha_3 = 0$. Так как система имеет ненулевые решения (например, $\alpha_1 = -3, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0$), то векторы a_1, a_2, a_3 являются линейно зависимыми.

б) Продифференцируем обе части равенства

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \ldots + \alpha_n f_n(x) + \alpha_{n+1} f_{n+1}(x) = 0$$

n раз. Получим систему уравнений относительно действительных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 x + \ldots + \alpha_n x^{n-1} + \alpha_{n+1} x^n = 0, \\ \alpha_2 + \ldots + (n-1)\alpha_n x^{n-2} + n\alpha_{n+1} x^{n-1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (n-1)!\,\alpha_n + n!\,\alpha_{n+1} x = 0, \\ n!\,\alpha_{n+1} = 0. \end{cases}$$

Так как определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & \ldots & x^{n-1} & x^n \\ 0 & 1 & \ldots & (n-1)x^{n-2} & n x^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & (n-1)! & n!\,x \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & n! \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3! \cdot \ldots \cdot (n-1)!\, n! \neq 0,$$

то система имеет единственное решение. Ввиду того, что система однородная, имеем $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n+1} = 0$. Это означает, что векторы $f_1(x), \ldots, f_{n+1}(x)$ линейно независимы.

Пример 3. Докажите изоморфизм векторных пространств $\mathbb{R}_1[x]$ и $\mathbb{R}^2$.

Решение. Установим соответствие f между векторами данных пространств следующим образом:

$$f: ax + b \longmapsto (a, b),\ ax + b \in \mathbb{R}_1[x].$$

Легко показать, что f является биективным отображением.

Для любых $m(x) = a_1 x + b_1$ и $n(x) = a_2 x + b_2$, принадлежащих пространству $\mathbb{R}_1[x]$, и для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ верны равенства:

1) $f(m(x) + n(x)) = f((a_1 x + b_1) + (a_2 x + b_2)) =$
$= f((a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) = (a_1, b_1) +$
$+ (a_2, b_2) = f(a_1 x + b_1) + f(a_2 x + b_2) = f(m(x)) + f(n(x))$;

2) $f(\alpha m(x)) = f(\alpha(a_1 x + b_1)) = f(\alpha a_1 x + \alpha b_1) =$
$= (\alpha a_1, \alpha b_1) = \alpha(a_1, b_1) = \alpha f(a_1 x + b_1) = \alpha f(m(x))$.

Значит, f является изоморфизмом векторных пространств $\mathbb{R}_1[x]$ и $\mathbb{R}^2$.

Вопросы для самоконтроля

1. Определение линейного (векторного) пространства. Примеры линейных пространств.

1.1. Как задать линейное пространство над полем P?

1.2. Покажите, что поле P можно рассматривать как векторное пространство над полем P с операциями сложения и умножения, определенными в P.

1.3. Являются ли действительными линейными пространствами следующие множества чисел с обычными операциями сложения и умножения:

а) $\mathbb{N}$ - множество всех натуральных чисел;

б) $\mathbb{Z}$ - множество всех целых чисел;

в) $\mathbb{C}$ - множество всех комплексных чисел;

г) $\mathbb{R}_+$ - множество всех действительных положительных чисел?

1.4. Является ли действительным линейным пространством множество всех векторов, не параллельных данной прямой, если сложение векторов и умножение их на число определяются правилами векторной алгебры?

1.5. Докажите, что множества $V^3, V^2, V^1, P^n, M(n,P)$, $C_{[a,b]}$, $P[x]$, $P_n[x]$ с введенными на них операциями сложения и умножения на скаляры являются линейными пространствами.

2. Простейшие следствия из аксиом линейного пространства.

2.1. Докажите, что линейное пространство обладает единственным нулевым вектором.

2.2. Докажите, что для каждого $x \in V$ существует единственный противоположный.

2.3. Сколько решений в пространстве V имеет уравнение $a + x = b$?

2.4. Докажите, что $0a = \Theta$ для любого $a \in V$.

2.5. Всегда ли $\alpha\Theta = \Theta$?

2.6. Докажите, что $\alpha a \neq \Theta$ при любом $a \neq \Theta$ из V и $\alpha \neq 0$ из P.

3. Линейная зависимость векторов.

3.1. Что понимается под системой векторов?

3.2. Сформулируйте определение линейно независимой системы векторов.

3.3. Покажите, что два вектора из V^2 линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.

3.4. Покажите, что три вектора из V^3 линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

3.5. Может ли линейно независимая система содержать нулевой вектор?

3.6. Сформулируйте критерий линейной независимости системы, состоящей из одного вектора.

3.7. Может ли линейно независимая система содержать два равных вектора?

3.8. Докажите, что в пространстве $M(2,\mathbb{R})$ система векторов

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

линейно независима.

3.9. Верно ли, что если a, b, c - линейно независимые векторы, то этим свойством обладают векторы $a+b$, $b+c$, $c+a$?

4. Критерий линейной зависимости системы векторов.

4.1. Сформулируйте критерий линейной зависимости системы, состоящей из одного вектора.

4.2. Докажите, что если три вектора a_1, a_2, a_3 линейно зависимы и вектор a_3 не выражается линейно через векторы a_1 и a_2, то векторы a_1 и a_2 различаются между собой лишь скалярным множителем.

4.3. Докажите, что система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$, отличных от нуля, тогда и только тогда линейно независима, когда ни один из этих векторов не выражается через предыдущие.

5. Изоморфизм векторных пространств.

5.1. Какие линейные пространства называются изоморфными?

5.2. Пусть V и V' - линейные пространства над полем P, $f: V \to V'$ - изоморфизм V на V'. Докажите, что

а) $f^{-1}: V' \to V$ - изоморфизм V' на V;

б) $f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$.

5.3. Пусть $f: V \to V'$ - изоморфизм линейных пространств. Докажите, что система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из V линейно зависима тогда и только тогда, когда линейно зависима система их образов $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)$.

5.4. Пусть $f: V \to V'$ - биективное отображение линейных пространств V и V' над полем P. Докажите, что f является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ для любых $x, y \in V$ и любых $\alpha, \beta \in P$.

5.5. Докажите, что тождественное отображение $\varepsilon: x \mapsto x$ является изоморфизмом линейного пространства V на себя.

5.6. Пусть $f: V_1 \to V_2$ - изоморфизм V_1 в V_2, $g: V_2 \to V_3$ - изоморфизм V_2 в V_3. Докажите, что gf - изоморфизм пространств V_1 и V_3.

5.7. Докажите, что отношение изоморфизма является отношением эквивалентности на множестве всех линейных пространств над одним и том же полем.

Задания к лабораторной работе

I.I–I.6. Является ли действительным линейным пространством с операциями, определенными в n-мерном арифметическом пространстве, множество n-мерных строк $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i=1,\ldots,n$, у которых

I.I все координаты равны между собой;
I.2 первая координата α_1 равна нулю;
I.3 сумма координат равна нулю;
I.4 сумма координат равна единице;
I.5 координата α_n равна сумме всех остальных координат;
I.6 последняя координата α_n равна нулю?

I.7–I.I2. Является ли комплексным линейным пространством с операциями сложения матриц и умножения матрицы на элемент поля $\mathbb{C}$ множество квадратных матриц порядка n, принадлежащих $M(n,\mathbb{C})$, у которых

I.7 нулевая первая строка;
I.8 все элементы, не расположенные на главной диагонали, равны нулю (диагональные матрицы);
I.9 определитель равен нулю;
I.I0 все элементы ниже главной диагонали равны нулю;
I.II все элементы выше главной диагонали равны нулю;
I.I2 все элементы главной диагонали равны нулю?

2.I–2.6. Является ли комплексным линейным пространством с операциями сложения многочленов и умножения многочлена на комплексное число множество всех многочленов $f(x) \in \mathbb{C}_n[x]$, удовлетворяющих условию

2.I. $f(0)=1$;
2.2. $f(0)=0$;
2.3. $2f(0)-3f(1)=0$;
2.4. $f(1)+f(2)+\ldots+f(k)=0$;
2.5. $f(1)=0$;
2.6. $f(x)$ имеет только четные степени переменной x?

2.7–2.I2. Является ли действительным линейным пространством с операциями, определенными в $C_{[a,b]}$, множество функций

2.7. дифференцируемых на $[a,b]$;
2.8. вида $ax+b$, где a, b – любые действительные числа;
2.9. вида ax^2+bx+c, где a, b, c – любые действительные числа;
2.I0. таких, что $f(a)=0$;
2.II. неотрицательных на $[a,b]$;
2.I2. монотонных на $[a,b]$?

3. Докажите, что множество решений однородной системы линейных уравнений образует линейное пространство над $\mathbb{R}$:

3.I.
$$\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3-2x_4-9x_5=0, \\ 9x_1+2x_2+5x_3+2x_4+x_5=0, \\ 6x_1+x_2+2x_3-3x_5=0. \end{cases}$$

3.2.
$$\begin{cases} x_1+4x_2+x_3+2x_4=0, \\ 2x_1+7x_1-2x_3=0, \\ -x_1+3x_2-x_4=0. \end{cases}$$

3.3.
$$\begin{cases} 2x_1-x_3+x_4=0, \\ -2x_1+x_2-3x_3=0, \\ 4x_1-3x_2+2x_4=0. \end{cases}$$

3.4.
$$\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3-4x_4+x_5=0, \\ -x_1+x_2-x_4-2x_5=0, \\ 3x_1-2x_3+x_5=0. \end{cases}$$

3.5.
$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+4x_4=0, \\ -2x_1-3x_2+3x_3=0, \\ -x_1-x_2+2x_3+4x_4=0. \end{cases}$$

3.6.
$$\begin{cases} -2x_1+x_2-x_3+x_4-x_5=0, \\ x_1+x_3-3x_4=0, \\ 3x_1-x_2+2x_3+2x_5=0. \end{cases}$$

3.7.
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

3.8.
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

3.9.
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ -x_1 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

3.10.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_3 - 3x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

3.11.
$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

3.12.
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ -3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

4. Исследуйте, являются ли векторы a_1, a_2, a_3, a_4 пространства $\mathbb{R}^4$ линейно зависимыми. В случае утвердительного ответа найдите нетривиальную линейную комбинацию, равную нулю.

	a_1	a_2
4.1.	$(-1, 1, 1, 0)$;	$(2, -1, 1, 3)$;
4.2.	$(1, 1, -1, 0)$;	$(-1, 2, 2, -3)$;
4.3.	$(3, -1, 2, 1)$;	$(-2, 1, 4, 5)$;
4.4.	$(-2, 1, 3, 2)$;	$(-1, 1, 1, 1)$;

	a_1	a_2
4.5.	$(-3, 2, 1, 1)$;	$(-2, 3, 3, 4)$;
4.6.	$(-4, 4, 2, 1)$;	$(0, 3, 2, 1)$;
4.7.	$(0, 1, -1, 2)$;	$(-1, 1, 2, 2)$;
4.8.	$(4, 3, -2, 1)$;	$(-3, 3, 3, 0)$;
4.9.	$(-1, 1, 0, 2)$;	$(4, 5, 0, 1)$;
4.10.	$(0, 1, -4, 3)$;	$(-3, 2, 1, -1)$;
4.11.	$(-1, 1, 2, 0)$;	$(0, 0, 3, -1)$;
4.12.	$(0, -3, 2, 1)$;	$(-1, 0, 1, 2)$.

	a_3	a_4
4.1.	$(-1, 2, 1, 5)$;	$(2, 2, -1, 1)$;
4.2.	$(-2, 1, -1, 4)$;	$(-1, 1, 2, -2)$;
4.3.	$(4, 3, -2, 1)$;	$(-4, 4, -1, 2)$;
4.4.	$(3, -1, 2, 0)$;	$(5, 1, 1, -1)$;
4.5.	$(1, 1, 5, -2)$;	$(-3, 4, -2, 1)$;
4.6.	$(-1, 1, 1, -1)$;	$(4, 3, 2, 0)$;
4.7.	$(0, -1, 0, -1)$;	$(0, 1, 1, 2)$;
4.8.	$(-2, 0, 1, 1)$;	$(-1, 0, 1, 2)$;
4.9.	$(4, 5, -1, 2)$;	$(-1, 2, 5, 3)$;
4.10.	$(-2, -1, 1, 4)$;	$(-2, 3, -2, 1)$;
4.11.	$(0, -1, -2, -3)$;	$(0, 1, -1, 2)$;
4.12.	$(-1, 1, -1, 1)$;	$(4, 2, -2, 3)$.

5. Выясните, являются ли линейно зависимыми векторы z_1 и z_2 из пространства $\mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$:

	z_1	z_2
5.1.	$1 + 2i$;	$-2 - 4i$;
5.2.	$-3 + i$;	$2 + 3i$;
5.3.	$-2 + 3i$;	$-1 + i$;
5.4.	$-4i$;	$5 - 2i$;
5.5.	$1 + 4i$;	$-4 - i$;
5.6.	$-3 + 2i$;	$-2 + 3i$;

	z_1	z_2
5.7.	$-1+i$;	$1-i$;
5.8.	$1-i$;	$2-2i$;
5.9.	$-2-i$;	$4+2i$;
5.10.	$3-i$;	$1+3i$;
5.11.	$-1-i$;	$1-i$;
5.12.	$1+i$;	$3+3i$.

6. Исследуйте, является ли линейно зависимой система векторов пространства $C_{[a,b]}$:

6.1.	$\sin x, \cos x$;	6.7.	$1, \sin^2 x, \cos^2 x$;
6.2.	$1, \sin x, \cos x$;	6.8.	e^x, e^{2x}, e^{3x} ;
6.3.	$\sin x, \sin 2x$;	6.9.	$2^x, 3^x, 6^x$;
6.4.	$1, \cos x, \cos 2x$;	6.10.	x, e^x, xe^x ;
6.5.	$1, \sin x, \sin^2 x$;	6.11.	$\sin x, \cos x, \sin 2x$;
6.6.	$1, \cos x, \cos^2 x$;	6.12.	$\sin x, \sin(x+1), \cos x$.

7. Исследуйте, являются ли векторы $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ векторного пространства $\mathbb{R}_2[x]$ линейно зависимыми. В случае утвердительного ответа найдите нетривиальную линейную комбинацию, равную нулю.

	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
7.1.	x^2+5 ;	x^2-4x+3 ;	$x^2+16x+1$;
7.2.	$6x+9$;	$x^2-8x+12$;	$2x^2+1$;
7.3.	$3x^2-5$;	$2x+1$;	x^2-x-1 ;
7.4.	$2x^2+x$;	$6x^2-5x+3$;	$2x^2+1$;
7.5.	$6x+5$;	$2x^2+x+3$;	x^2-1 ;
7.6.	x^2+4 ;	$2x^2-x+4$;	$3x^2+2x+1$;
7.7.	$-x^2-x+3$;	$2x-5$;	$6x^2+3x+3$;
7.8.	$-x^2+2x$;	x^2+x+3 ;	$5x^2-x+2$;
7.9.	$4x^2+2x+4$;	$2x^2+x+2$;	$3x+6$;
7.10.	$-2x^2+5x-7$;	$4x^2+5x$;	$2x^2+10x-7$;
7.11.	$-3x^2+2x+1$;	$-x^2+x+2$;	$5x-6$;
7.12.	$-x^2+3x$;	$4x^2-4x+2$;	$-7x^2+1$.

8. Найдите все значения λ, при которых вектор c линейно выражается через векторы a_1, a_2, a_3:

	a_1	a_2	a_3	c
8.1.	$(1,2,3,-1)$;	$(0,1,-2,3)$;	$(-1,2,0,4)$;	$(1,1,2,\lambda)$;
8.2.	$(-1,0,2,5)$;	$(1,-1,2,0)$;	$(2,0,1,5)$;	$(-1,-2,\lambda,3)$;
8.3.	$(0,2,3,-4)$;	$(0,1,-3,2)$;	$(5,4,3,-2)$;	$(0,1,1,\lambda)$;
8.4.	$(-2,1,4,2)$;	$(1,2,4,-5)$;	$(1,1,-1,2)$;	$(-1,1,0,\lambda)$;
8.5.	$(0,3,2,1)$;	$(3,-2,1,0)$;	$(0,5,3,2)$;	$(0,2,-1,\lambda)$;
8.6.	$(-1,1,1,-1)$;	$(-4,2,5,3)$;	$(-4,-2,1,0)$;	$(-2,1,\lambda,0)$;
8.7.	$(-2,1,1,2)$;	$(-1,0,3,5)$;	$(-1,4,5,0)$;	$(-1,-1,\lambda,1)$;
8.8.	$(3,-4,5,2)$;	$(-1,1,2,4)$;	$(4,2,-2,4)$;	$(-2,2,\lambda,2)$,
8.9.	$(1,-2,2,0)$;	$(-1,3,-2,0)$;	$(-2,3,-3,1)$;	$(1,-1,-1,\lambda)$;
8.10.	$(3,2,-1,1)$;	$(-1,0,2,1)$;	$(-3,1,2,-1)$;	$(-3,2,\lambda,1)$;
8.11.	$(2,-2,3,-3)$;	$(-2,4,1,0)$;	$(4,-5,2,-1)$;	$(-2,3,1,\lambda)$;
8.12.	$(4,2,-1,0)$;	$(1,5,0,-1)$;	$(5,2,-1,0)$;	$(1,-1,1,\lambda)$.

9. Докажите, что линейные пространства V_1 и V_2 изоморфны.

9.1. $V_1 = M(2,\mathbb{R})$, $V_2 = \mathbb{R}_3[x]$.

9.2. $V_1 = \mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$, $V_2 = \mathbb{R}^2$.

9.3. $V_1 = \mathbb{R}^4$, $V_2 = \mathbb{R}_3[x]$.

9.4. $V_1 = M(2,\mathbb{R})$, $V_2 = \mathbb{R}^4$.

9.5. $V_1 = \mathbb{R}_2[x]$, $V_2 = V^3$.

9.6. $V_1 = \{(\alpha_1, 0, \alpha_2) \mid \alpha_i \in \mathbb{C}\}$ над $\mathbb{C}$, $V_2 = \mathbb{C}_1[x]$.

9.7. $V_1 = \left\{\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}\right\}$ над $\mathbb{C}$, $V_2 = \mathbb{C}^3$.

9.8. $V_1 = \mathbb{C}_1[x]$, $V_2 = \left\{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{C}\right\}$ над $\mathbb{C}$.

9.9. $V_1 = \mathbb{C}_3[x]$, $V_2 = \mathbb{C}^4$.

9.10. $V_1 = \mathbb{C}_3[x]$, $V_2 = M(2,\mathbb{C})$.

9.11. $V_1 = \mathbb{C}^3$, $V_2 = \mathbb{C}_2[x]$.

9.12. $V_1 = \left\{\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$ над $\mathbb{R}$, $V_2 = \mathbb{R}_1[x]$.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

БАЗИС И РАЗМЕРНОСТЬ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

Пусть V - линейное пространство над полем P. Система векторов

$$e_1, e_2, \ldots, e_n \qquad [2.1]$$

называется *базисом* пространства V, если

1) система [2.1] линейно независима;

2) любой вектор пространства V линейно выражается через векторы системы [2.1].

ТЕОРЕМА 2.1. В линейном пространстве V над полем P все базисы состоят из одного и того же числа векторов.

Теорема 2.1 позволяет ввести следующее важное определение.

Линейное пространство V над полем P называется *n-мерным*, если в нем есть базис, состоящий из n векторов. Число n называется *размерностью* пространства V. Нулевое пространство называется *нульмерным*. Все n-мерные пространства $(n=0,1,2,\ldots)$ называются *конечномерными*. Если пространство V содержит любое число линейно независимых векторов, то оно называется *бесконечномерным*.

Размерность пространства V обозначается $\dim V$. Мы будем обозначать также n-мерное пространство V через V_n. Если линейное пространство V бесконечномерно, то пишем $\dim V = \infty$.

Линейные пространства $V^3, V^2, V^1, P^n, M(n,P), P_n[x]$ конечномерны. Линейные пространства $P[x]$, $C_{[a,b]}$ являются бесконечномерными.

ТЕОРЕМА 2.2. В n-мерном линейном пространстве V_n:

1) каждую линейно независимую систему векторов можно дополнить до базиса;

2) любая линейно независимая система из n векторов является базисом.

Из теоремы 2.2 следует, что в линейном пространстве V_n любая система из $n+1$ вектора является линейно зависимой.

Следующая теорема показывает, что при фиксированном поле P и размерности n существует единственное с точностью до изоморфизма n-мерное линейное пространство над полем P.

ТЕОРЕМА 2.3. Два линейных пространства V и V' над одним и

тем же полем P изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.

Пусть V_n - линейное пространство над полем P, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ - базис пространства V_n. Тогда каждый вектор $x \in V_n$ можно представить в виде

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - некоторые элементы поля P. Такое представление вектора x называется *разложением его по векторам базиса* $e_1, e_2, \ldots, e_n$, а коэффициенты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - *координатами вектора* x *в базисе* $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

ТЕОРЕМА 2.4. Координаты вектора в заданном базисе определяются однозначно.

Разложение вектора по векторам базиса удобно записывать в матричной форме. Если обозначим

$$(x) = (x_1\ x_2 \ldots x_n), \quad [e] = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix},$$

то разложение $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ принимает вид

$$x = (x)[e].$$

Строка (x) называется *координатной строкой вектора* x, а столбец $[e]$ - *базисным столбцом базиса* $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

ТЕОРЕМА 2.5. 1) При сложении двух векторов, заданных в одном базисе, соответствующие координаты складываются.

2) При умножении вектора на скаляр его координаты умножаются на этот скаляр.

СЛЕДСТВИЕ. 1) Для любых векторов $x, y \in V_n$ $(x+y) = (x) + (y)$.

2) Для любого $\lambda \in P$ и любого $x \in V_n$ $(\lambda x) = \lambda (x)$.

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ - два базиса линейного пространства V_n над полем P. Разложим векторы системы $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ по векторам базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$:

$$\begin{cases} e_1' = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \ldots + a_{1n}e_n, \\ e_2' = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{2n}e_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n' = a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n. \end{cases}$$

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется **м а т р и ц е й п е р е х о д а** от базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ к базису $e_1', \ldots, e_n'$.

Если введем базисные столбцы

$$[e] = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad [e'] = \begin{pmatrix} e_1' \\ \vdots \\ e_n' \end{pmatrix},$$

то указанная выше система в матричной форме будет иметь вид $[e'] = A[e]$.

ТЕОРЕМА 2.6. Матрица перехода от одного базиса линейного пространства к другому невырожденная.

Из теоремы 2.6 следует, что матрица перехода от одного базиса линейного пространства к другому обратима. Более того, если A – матрица перехода от "старого" базиса к "новому", то A^{-1} – матрица перехода от "нового" базиса к "старому"

Следующая теорема устанавливает связь между координатами вектора x в разных базисах.

ТЕОРЕМА 2.7. Пусть (x) – координатная строка вектора x в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$, (x') – координатная строка вектора x в базисе $e_1', e_2', \ldots, e_n'$. Если A – матрица перехода от базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ к базису $e_1', e_2', \ldots, e_n'$, то

$$(x) = (x')A,$$
$$(x') = (x)A^{-1}.$$

СЛЕДСТВИЕ. "Старая" координатная строка вектора равна "новой" координатной строке этого вектора, умноженной на матрицу перехода от "старого" базиса к "новому".

СЛЕДСТВИЕ. "Новая" координатная строка вектора равна "старой" координатной строке этого вектора, умноженной на матрицу, обратную к матрице перехода от "старого" базиса к "новому".

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАЧ

П р и м е р 1. Докажите, что комплексные числа $z_1 = -2 + i$ и $z_2 = -3 + 2i$ образуют базис действительного линейного пространства $\mathbb{C}$.

Р е ш е н и е. Покажем, что векторы z_1 и z_2 линейно независимы и любой вектор линейного пространства $\mathbb{C}$ линейно выражается через z_1 и z_2.

Из равенства

$$\alpha_1(-2+i) + \alpha_2(-3+2i) = 0$$

легко получить систему уравнений относительно скаляров α_1 и α_2:

$$\begin{cases} -2\alpha_1 - 3\alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

поэтому система имеет единственное решение, которое, ввиду однородности системы, является нулевым, т.е. $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Это означает, что векторы z_1 и z_2 линейно независимы.

Пусть $z = a + bi$ – произвольный вектор линейного пространства $\mathbb{C}$. Покажем, что всегда можно найти скаляры β_1 и β_2 такие, что

$$\beta_1(-2+i) + \beta_2(-3+2i) = a + bi.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} -2\beta_1 - 3\beta_2 = a, \\ \beta_1 + 2\beta_2 = b, \end{cases}$$

получим

$$\beta_1 = a + 2b, \quad \beta_2 = -2a - 3b.$$

Следовательно, любой вектор $z \in \mathbb{C}$ линейно выражается через z_1 и z_2.

П р и м е р 2. Докажите, что векторы $a_1 = (1, -2, 3)$, $a_2 = (3, 2, -1)$, $a_3 = (1, 1, 0)$ из $\mathbb{R}^3$ образуют базис, найдите координаты вектора $c = (3, 5, 6)$ в этом базисе.

Р е ш е н и е. Так как линейное пространство $\mathbb{R}^3$ имеет размерность три, то, ввиду теоремы 2.2, достаточно проверить, что векторы a_1, a_2, a_3 линейно независимы.

$$\alpha_1(1,-2,3) + \alpha_2(3,2,-1) + \alpha_3(1,1,0) = (0,0,0)$$

Переходим к системе

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ -2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 \qquad = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, т.е. векторы a_1, a_2, a_3 линейно независимы и, значит, образуют базис $\mathbb{R}^3$.

Найдем координаты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ вектора c в базисе a_1, a_2, a_3

$$\alpha_1(1,-2,3) + \alpha_2(3,2,-1) + \alpha_3(1,1,0) = (3,5,6).$$

Из системы

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 3, \\ -2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 5, \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 \qquad = 6 \end{cases}$$

получим

$$\alpha_1 = \frac{2}{3}, \quad \alpha_2 = -4, \quad \alpha_3 = \frac{43}{3}.$$

П р и м е р 3. Найдите базис пространства решений следующей однородной системы линейных уравнений :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 \qquad = 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е . Найдем решения данной системы линейных уравнений.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 5 & -1 \\ 0 & 7 & 5 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Преобразованная система имеет вид

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ \qquad 7x_2 + 5x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Так как определитель из коэффициентов при x_1 и x_4

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

то можно выбрать x_1 и x_4 главными неизвестными. Тогда

$$x_1 = -5x_2 - 2x_3, \quad x_4 = 7x_2 + 5x_3,$$

x_2 и x_3 – любые действительные числа.

Каждое решение данной системы будем записывать в виде строки, т.е. $x = (-5x_2 - 2x_3, x_2, x_3, 7x_4 + 5x_3), x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

Тогда множество всех решений данной системы можно записать как множество

$$M = \{(-5\alpha - 2\beta, \alpha, \beta, 7\alpha + 5\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Нетрудно показать, что M образует действительное линейное пространство относительно операций сложения строк и умножения числа на строку.

Пусть $a = (-5\alpha_1 - 2\beta_1, \alpha_1, \beta_1, 7\alpha_1 + 5\beta_1)$ — произвольное решение данной системы. Тогда

$$a = (-5\alpha_1 - 2\beta_1, \alpha_1, \beta_1, 7\alpha_1 + 5\beta_1) = (-5\alpha_1, \alpha_1, 0, 7\alpha_1) + (-2\beta_1, 0, \beta_1, 5\beta_1) = \alpha_1(-5,1,0,7) + \beta_1(-2,0,1,5).$$

Строка $a_1 = (-5,1,0,7)$ является вектором пространства M (при $\alpha = 1$, $\beta = 0$). Строка $a_2 = (-2,0,1,5)$ также вектор из M (при $\alpha = 0$, $\beta = 1$). Итак, каждый вектор пространства M линейно выражается через векторы a_1 и a_2.

Легко проверить, что a_1 и a_2 – линейно независимые векторы. Значит, a_1 и a_2 образуют базис пространства M решений данной однородной системы.

П р и м е р 4. Матрица $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ является матрицей перехода от базиса e_1, e_2 к базису e_1', e_2' действительного линейного пространства. Найдите координатную строку вектора $a = -e_1 + e_2$ в базисе e_1', e_2'.

Р е ш е н и е . Координатная строка вектора a в базисе e_1, e_2 имеет вид $(-1 \ 1)$. Пусть $(a_1 \ a_2)$ – координатная строка вектора a в базисе e_1', e_2'. Тогда

$$(-1 \ 1) = (a_1 \ a_2) A.$$

Отсюда легко получить равенство

$$(a_1\, a_2) = (-1\ \ 1)\, A^{-1}.$$

Так как

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

то

$$(a_1\, a_2) = (-1\ 1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (0\ \ -1).$$

П р и м е р 5. В линейном пространстве $\mathbb{R}^2$ заданы два базиса $e_1 = (3,2)$, $e_2 = (1,-2)$ и $e_1' = (-2,-4)$, $e_2' = (-1,-6)$. Найдите матрицу перехода от базиса e_1, e_2 к базису e_1', e_2'.

Р е ш е н и е . Первый способ. Так как векторы e_1, e_2 образуют базис пространства, то векторы e_1' и e_2' можно линейно выразить через e_1, e_2 :

$$e_1' = \alpha_{11} e_1 + \alpha_{12} e_2,$$
$$e_2' = \alpha_{21} e_1 + \alpha_{22} e_2$$

или

$$(-2,-4) = \alpha_{11}(3,2) + \alpha_{12}(1,-2),$$
$$(-1,-6) = \alpha_{21}(3,2) + \alpha_{22}(1,-2).$$

Каждое из этих равенств можно заменить системой уравнений

$$\begin{cases} 3\alpha_{11} + \alpha_{12} = -2, \\ 2\alpha_{11} - 2\alpha_{12} = -4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\alpha_{21} + \alpha_{22} = -1, \\ 2\alpha_{21} - 2\alpha_{22} = -6. \end{cases}$$

Решая эти системы, получаем

$\alpha_{11} = -1$, $\alpha_{12} = 1$, $\alpha_{21} = -1$, $\alpha_{22} = 2$.

Тогда матрицей перехода от базиса e_1, e_2 к базису e_1', e_2' является матрица

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

●

Второй способ. Легко показать, что в пространстве $\mathbb{R}^2$ векторы $a_1 = (1,0)$ и $a_2 = (0,1)$ образуют базис. Действительно, они линейно независимы и любой вектор $(b,c) \in \mathbb{R}^2$ линейно выражается через a_1 и a_2 :

$$(b,c) = b(1,0) + c(0,1).$$

Тогда

$$e_1 = 3a_1 + 2a_2,$$
$$e_2 = a_1 - 2a_2$$

или

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

Аналогично

$$\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}. \qquad (**)$$

Пусть A - матрица перехода от базиса e_1, e_2 к базису e_1', e_2'. Тогда

$$\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}.$$

Из равенства $(*)$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}.$$

Обращаясь к равенству $(**)$, имеем

$$\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}.$$

Значит, искомая матрица перехода имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

В о п р о с ы д л я с а м о к о н т р о л я

I. Определение базиса линейного пространства. Равномощность базисов линейного пространства.

I.1. Для каждого из пространств $V^1, V^2, V^3, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_n[x], M(n,\mathbb{R})$ укажите один из базисов.

I.2. Опишите все базисы линейного пространства V^3.

I.3. Имеет ли нулевое пространство базис?

I.4. Пусть в линейном пространстве V даны n линейно независимых векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Что еще надо потребовать, чтобы указанная система векторов была базисом в данном линейном пространстве?

1.5. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базис линейного пространства V над полем P. Будет ли базисом в V система векторов $\lambda e_1, \lambda e_2, \ldots, \lambda e_n$ $(\lambda \in P, \lambda \neq 0)$?

1.6. Докажите, что в пространстве $\mathbb{R}[x]$ нет базиса.

1.7. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базис линейного пространства V, $x \in V$. Докажите, что система $x, e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейно зависима.

2. Размерность линейного пространства.

2.1. Какие линейные пространства называются конечномерными?

2.2. Как определяется размерность нулевого пространства?

2.3. Какие линейные пространства называются бесконечномерными?

2.4. Для каждого из действительных линейных пространств $V^1, V^2, V^3, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_n[x], M(n, \mathbb{R})$ укажите размерность.

2.5. Докажите, что пространства $C_{[a,b]}$ и $\mathbb{R}[x]$ бесконечномерны.

3. Изоморфизм линейных пространств одинаковой размерности

3.1. Пусть $f: V \to V'$ – изоморфизм линейных пространств V, V' над полем P, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базис пространства V. Докажите, что $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$ – базис пространства V'.

3.2. Как строится изоморфизм линейных пространств V и V' над полем P, имеющих одинаковую размерность?

3.3. Докажите, что любое ненулевое действительное конечномерное линейное пространство изоморфно некоторому арифметическому пространству.

3.4. Докажите, что изоморфизм n-мерных $(n \geq 1)$ действительных линейных пространств определяется неоднозначно.

3.5. Всякое ли действительное конечномерное линейное пространство V изоморфно пространству $M(n, \mathbb{R})$?

3.6. Докажите, что ненулевое действительное линейное пространство изоморфно некоторому линейному пространству $\mathbb{R}_n[x]$.

4. Координаты вектора

4.1. Докажите, что координаты вектора в заданном базисе определяются однозначно.

4.2. Приводит ли перестановка векторов в базисе к изменению базиса?

4.3. Докажите, что базисы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $e_2, e_1, \ldots, e_n$

различны.

4.4. Запишите разложение вектора $x \in V_n$ по векторам базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ в матричной форме.

4.5. Какие координаты имеет нулевой вектор в заданном базисе? Изменяются ли эти координаты при переходе к другому базису?

5. Связь между базисами линейного пространства.

5.1. Как определяется матрица перехода от одного базиса линейного пространства к другому?

5.2. Запишите матрицу перехода от базиса e_1, e_2, e_3 пространства V_3 к базису e_3, e_2, e_1.

5.3. Запишите систему формул перехода от одного базиса линейного пространства к другому в матричной форме.

5.4. Докажите, что матрица перехода от одного базиса линейного пространства к другому обратима.

6. Преобразование координат при изменении базиса

6.1. Как изменятся координаты вектора $x \in V_3$ при переходе от базиса e_1, e_2, e_3 к базису e_3, e_2, e_1?

6.2. Запишите формулы преобразования координат, если известна матрица перехода от "нового" базиса к "старому".

6.3. Запишите формулы преобразования координат в координатной форме.

З а д а н и я к л а б о р а т о р н о й р а б о т е

№1. Докажите, что в линейном пространстве многочлены $1, \ldots, (x-a)^n$ образуют базис; найдите координаты многочлена $f(x)$ в этом базисе.

	a	$f(x)$
1.1.	1 ;	$x^5 - 2x^3 + 5x^2 - 4$;
1.2.	–1 ;	$x^5 + 4x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 32x - 32$;
1.3.	2 ;	$x^5 + 4x^4 + 4x^3 - x^2 - 4x - 4$;
1.4.	–2 ;	$x^5 + 2x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 1$;
1.5.	3 ;	$x^5 + 2x^4 + 3x^3 - x^2 - 2x - 1$;
1.6.	–3 ;	$x^5 - 6x^4 + 9x^3 - x^2 + 6x - 9$;
1.7.	4 ;	$x^5 - 5x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 1$;

	a	
I.8.	-4 ;	$x^5+2x^4+x^3-x^2-2x-1$;
I.9.	5 ;	$x^5+3x^4+x^2-3x$;
I.10.	-5 ;	$x^5-2x^3+5x^2-4$;
I.11.	6 ;	$x^5-2x^4+x^2-4$;
I.12.	-6 ;	$x^5-x^3-x^2+x-1$.

№2. Докажите, что система векторов e_1, e_2, e_3 образует базис в пространстве $\mathbb{R}^3$, и найдите координаты вектора a в этом базисе.

	e_1	e_2	e_3	a
2.1	$(1,1,1)$;	$(1,1,2)$;	$(1,2,3)$;	$(6,9,14)$;
2.2	$(2,1,-3)$;	$(3,2,-5)$;	$(1,-1,1)$;	$(6,2,-7)$;
2.3	$(1,2,1)$;	$(2,3,3)$;	$(3,8,2)$;	$(3,5,8)$;
2.4.	$(3,5,8)$;	$(5,14,13)$;	$(1,9,2)$;	$(2,3,3)$;
2.5	$(2,0,1)$;	$(-1,2,3)$;	$(-1,1,1)$;	$(3,5,4)$;
2.6	$(0,1,-2)$;	$(-2,$ [illegible] $,3)$;	$(1,-1,1)$;	$(3,1,-1)$;
2.7	$(1,0,2)$;	$(3,-1,4)$;	$(2,-2,1)$;	$(3,2,0)$;
2.8	$(-2,3,1)$;	$(0,2,1)$;	$(1,2,1)$;	$(3,-4,2)$;
2.9	$(-3,0,1)$;	$(0,2,3)$;	$(-1,-1,-1)$;	$(5,6,9)$;
2.10	$(3,1,-1)$;	$(-2,0,1)$;	$(2,7,3)$;	$(10,-1,6)$;
2.11	$(4,0,5)$;	$(-2,1,3)$;	$(-5,1,-1)$;	$(-5,7,10)$;
2.12	$(-1,3,7)$;	$(0,2,-1)$;	$(1,-2,-8)$;	$(-1,2,7)$.

№3. Докажите, что комплексные числа z_1 и z_2 образуют базис действительного пространства комплексных чисел $\mathbb{C}$, и запишите координатную строку числа $-5+4i$ в этом базисе

	z_1	z_2
3.1	$-1+2i$;	$2-i$;
3.2	$2i$;	$3+2i$;
3.3	$2-3i$;	$1-i$;
3.4	$1+i$;	$-5i$;
3.5	$-2+i$;	$2+2i$;
3.6	$3-5i$;	$1+2i$;

	z_1	z_2
3.7	$4+2i$;	$-2i$;
3.8	$-3+i$;	$2-i$;
3.9	$-2-2i$;	$1+3i$;
3.10	$4-i$;	$1+4i$;
3.11	$-i$;	$2+3i$;
3.12	$1-2i$;	$3+4i$.

№4. Докажите, что матрицы E_1, E_2, E_3, E_4 образуют базис пространства $M(2,\mathbb{R})$, и запишите разложение вектора $A=\begin{pmatrix}-1&1\\2&-1\end{pmatrix}$ по векторам этого базиса.

	E_1	E_2	E_3	E_4
4.1	$\begin{pmatrix}1&2\\3&0\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}2&3\\5&1\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}-2&3\\0&-6\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}1&2\\4&1\end{pmatrix}$;
4.2	$\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}2&3\\4&3\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}3&4\\6&1\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}-1&4\\7&9\end{pmatrix}$;
4.3	$\begin{pmatrix}2&4\\-4&-6\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}3&-4\\4&1\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}-3&5\\-3&2\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}1&-2\\-4&-3\end{pmatrix}$;
4.4	$\begin{pmatrix}3&4\\2&1\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}4&5\\3&2\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}3&-3\\-4&3\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}-4&1\\2&-1\end{pmatrix}$;
4.5	$\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}0&3\\-5&5\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}2&0\\1&-3\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}-3&-1\\0&2\end{pmatrix}$;
4.6	$\begin{pmatrix}3&1\\2&0\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}1&3\\1&1\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}-2&2\\-1&5\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}4&3\\2&-4\end{pmatrix}$;
4.7	$\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}-1&-1\\1&2\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}2&3\\0&1\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}3&0\\-1&12\end{pmatrix}$;
4.8	$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$;
4.9	$\begin{pmatrix}1&1\\3&0\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}-2&3\\-10&2\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}3&2\\11&7\end{pmatrix}$;
4.10	$\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}1&1\\3&2\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}2&0\\7&3\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}4&1\\14&7\end{pmatrix}$;

	E_1	E_2	E_3	E_4
4.II	$\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}-1&2\\1&3\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}-1&-5\\2&5\end{pmatrix}$;
4.I2	$\begin{pmatrix}1&2\\5&1\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}1&1\\4&1\end{pmatrix}$.	$\begin{pmatrix}2&3\\1&5\end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix}1&2\\4&1\end{pmatrix}$.

№5. Базис пространства решений однородной системы линейных уравнений называется ф у н д а м е н т а л ь н о й с и с т е м о й р е ш е н и й. Найдите размерность и укажите фундаментальную систему решений пространства решений однородной системы линейных уравнений из лабораторной работы №1.

№6. Как изменится матрица перехода от одного базиса к другому, если

6.I поменять местами два первых вектора первого базиса;
6.2 поменять местами два последних вектора первого базиса;
6.3 поменять местами два произвольных вектора первого базиса;
6.4 поменять местами два первых вектора второго базиса;
6.5 поменять местами два последних вектора второго базиса;
6.6 поменять местами два произвольных вектора второго базиса;
6.7 записать векторы первого базиса в обратном порядке;
6.8 записать векторы второго базиса в обратном порядке;
6.9 записать векторы обоих базисов в обратном порядке;
6.10 поменять местами два вектора первого базиса и записать векторы второго базиса в обратном порядке;
6.II поменять местами два вектора второго базиса и записать векторы первого базиса в обратном порядке;
6.I2 второй базис сделать первым, первый – вторым.

№7. Даны векторы $e_1, e_2, e_3, a_1, a_2, a_3$ линейного пространства $\mathbb{R}^3$.

I) Докажите, что векторы e_1, e_2, e_3 и a_1, a_2, a_3 образуют базис пространства $\mathbb{R}^3$;

2) Найдите матрицу перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису a_1, a_2, a_3;

3) Найдите матрицу перехода от базиса a_1, a_2, a_3 к базису e_1, e_2, e_3;

4) Найдите координаты вектора $c = (2, 0, 1)$ в базисе e_1, e_2, e_3;

5) Найдите координаты вектора $x = e_1 - e_2 + 3e_3$ в базисе a_1, a_2, a_3.

	e_1	e_2	e_3
7.I	(2, 1, -3);	(3, 2, -5);	(1, -1, 1);
7.2	(1, 2, 1);	(2, 3, 3);	(3, 8, 2);
7.3	(3, 5, 8);	(5, 14, 13);	(1, 9, 2);
7.4	(2, 0, 1);	(-1, 2, 3);	(-1, 1, 1);
7.5	(0, 1, -2);	(-2, 0, 3);	(1, -1, 1);
7.6	(1, 0, 2);	(3, -1, 4);	(2, -2, 1);
7.7	(-2, 3, 1);	(0, 2, 1);	(1, 2, 1);
7.7	(-3, 0, 1);	(0, 2, 3);	(-1, -1, -1);
7.8	(3, 1, -1);	(-2, 0, 1);	(2, 7, 3);
7.9	(4, 0, 5);	(-2, 1, 3);	(-5, 1, -1);
7.II	(-1, 3, 7);	(0, 2, -1);	(1, -2, -8);
7.I2	(1, 1, 1);	(1, 1, 2);	(1, 2, 3).

	a_1	a_2	a_3
7.I	(0, 1, -2);	(-2, 0, 3);	(1, -1, 1);
7.2	(1, 0, 2);	(3, -1, 4);	(2, -2, 1);
7.3	(-2, 3, 1);	(0, 2, 1);	(1, 2, 1);
7.4	(-3, 0, 1);	(0, 2, 3);	(-1, -1, -1);
7.5	(3, 1, -1);	(-2, 0, 1);	(2, 7, 3);
7.6	(4, 0, 5);	(-2, 1, 3);	(-5, 1, -1);
7.7	(-1, 3, 7);	(0, 2, -1);	(1, -2, -8);
7.8	(1, 1, 1);	(1, 1, 2);	(1, 2, 3);
7.9	(2, 1, -3);	(3, 2, -5);	(1, -1, 1);
7.I0	(1, 2, 1);	(2, 3, 3);	(3, 8, 2);
7.II	(0, 3, -2);	(1, -1, -8);	(-1, 2, 7);
7.I2	(2, 0, 1);	(-1, 2, 3);	(-1, 1, 1).

№8. Пусть $(-3\ 2\ 0)$ – координатная строка вектора a в базисе e_1', e_2', e_3' действительного векторного пространства V,

A – матрица перехода от базиса e_1', e_2', e_3' пространства V к базису e_1, e_2, e_3. Найдите координаты вектора a в базисе e_1, e_2, e_3.

8.1
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

8.2
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

8.3
$$A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

8.4
$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

8.5
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

8.6
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

8.7
$$A = \begin{pmatrix} 6 & 7 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix};$$

8.8
$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -1 \\ -5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix};$$

8.9
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

8.10
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix};$$

8.11
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

8.12
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3

ПОДПРОСТРАНСТВА ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА

Непустое подмножество W векторов линейного пространства V над полем P называется **подпространством**, если

1) $x + y \in W$ для любых $x, y \in W$;
2) $\alpha x \in W$ для любого $\alpha \in P$ и любого $x \in W$.

Линейное пространство V является своим подпространством. Множество $\{\Theta\}$, содержащее лишь нулевой вектор Θ пространства V, является подпространством этого пространства. Его называют нулевым подпространством.

Введем на множестве всех подпространств линейного пространства V операции сложения подпространств и пересечения подпространств.

Пусть $W_1, W_2, \ldots, W_k$ – конечная система подпространств линейного пространства V над полем P. **Суммой этих подпространств** называется множество всех векторов $x \in V$, представимых в виде

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_k, \quad x_i \in W_i, \ i = 1, 2, \ldots, k.$$

Обозначается сумма подпространств символом $W_1 + W_2 + \ldots + W_k$ или $\sum_{i=1}^{k} W_i$. Итак, из определения следует, что

$$\sum_{i=1}^{k} W_i = \{x_1 + x_2 + \ldots + x_k \mid x_i \in W_i, i = 1, 2, \ldots, k\}.$$

Пересечением подпространств $W_1, W_2, \ldots, W_k$ называется множество всех векторов из V, которые принадлежат одновременно подпространствам $W_1, W_2, \ldots, W_k$. Обозначается пересечение подпространств символом $W_1 \cap W_2 \cap \ldots \cap W_k$ или $\bigcap_{i=1}^{k} W_i$.

Аналогично определяется пересечение произвольной (не обязательно конечной) системы подпространств линейного пространства, а именно:

$$\bigcap_{i \in I} W_i = \{x \in V \mid x \in W_i \text{ для всех } i \in I\}.$$

Лемма 3.1. Сумма конечного множества подпространств $W_1, W_2, \ldots, W_k$ линейного пространства V над полем P является его подпространством.

Лемма 3.2. Пересечение любого множества подпространств W_i, $i \in I$, линейного пространства V над полем P является его подпространством.

Всякое подпространство W линейного пространства V над полем P само является линейным пространством над этим полем, если выполнять операции сложения векторов из W и умножения их на скаляр из P по правилам, определенным для пространства V. Поэтому можно говорить о таких понятиях, как базис подпространства и размерность подпространства.

Л е м м а 3.3. Каждое подпространство W n-мерного линейного пространства V конечномерно, причем $\dim W \leq n$. Если $\dim W = n$, то $W = V$.

Т е о р е м а 3.1. Пусть U и W - конечномерные подпространства линейного пространства V над полем P. Тогда

$$\dim (U + W) = \dim U + \dim W - \dim (U \cap W).$$

Эта формула называется формулой Грассмана.

Сумма подпространств $W_1, W_2, \ldots, W_k$ линейного пространства V называется п р я м о й с у м м о й, если каждое подпространство W_i пересекается с суммой остальных подпространств по нулевому подпространству. Обозначается прямая сумма подпространств $W_1, W_2, \ldots, W_k$ символом $W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_k$ или $\oplus_{i=1}^{k} W_i$.

Т е о р е м а 3.2. Для того, чтобы сумма S подпространств $W_1, W_2, \ldots, W_k$ линейного пространства V над полем P была прямой, необходимо и достаточно, чтобы любой элемент $x \in S$ единственным образом представлялся в виде $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_k$, где $x_i \in W_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Т е о р е м а 3.3. Пусть S - прямая сумма подпространств $W_1, W_2, \ldots, W_k$ линейного пространства V над полем P. Если $a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}$ -базис W_1, $b_1, b_2, \ldots, b_{n_2}$ - базис W_2, $\ldots$, $c_1, c_2, \ldots, c_{n_k}$ - базис W_k, то $a_1, \ldots, a_{n_1}, b_1, \ldots$ $\ldots, c_1, \ldots, c_{n_k}$ - базис S. Размерность прямой суммы конечномерных подпространств равна сумме их размерностей.

Общий способ конструирования подпространств конечномерного линейного пространства основан на следующем определении. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ - система векторов линейного пространства V над полем P. Множество всех линейных комбинаций векторов системы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ с коэффициентами из поля P называется л и н е й н о й о б о л о ч к о й системы векторов $a_1, \ldots, a_n$ и обозначается через $L(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Л е м м а 3.4. Линейная оболочка $L(a_1, \ldots, a_n)$ системы

векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ линейного пространства V является подпространством пространства V.

Т е о р е м а 3.4. I. Если $e_1, e_2, \ldots, e_k$ - базис подпространства линейного пространства V, то $U = L(e_1, e_2, \ldots, e_k)$.

2. Если $U = L(a_1, \ldots, a_k)$, $W = L(b_1, \ldots, b_s)$, то $U + W = L(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_s)$.

П р и м е р ы р е ш е н и я и о ф о р м л е н и я з а д а ч

П р и м е р I. Является ли подпространством линейного пространства $\mathbb{R}^2$ множество всех векторов $a = (\alpha_1, \alpha_2)$, у которых $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$?

Р е ш е н и е. Пусть K - данное множество векторов, т.е.

$$K = \{ (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \}.$$

Пусть $a = (\alpha_1, \alpha_2)$ и $b = (\beta_1, \beta_2)$ - произвольные векторы из множества K. Тогда $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 = 0$. Следовательно, $a + b = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2)$ также принадлежит K, так как $(\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2) = (\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2) = 0 + 0 = 0$.

Аналогично, при любом скаляре γ вектор $\gamma a = (\gamma\alpha_1, \gamma\alpha_2)$ также принадлежит K, так как $\gamma\alpha_1 + \gamma\alpha_2 = \gamma(\alpha_1 + \alpha_2) = \gamma \cdot 0 = 0$.

Значит, K - подпространство пространства $\mathbb{R}^2$.

П р и м е р 2. Найти базис и размерность линейной оболочки подпространства $A + B$, а также размерность подпространства $A \cap B$, где $A = L(a_1, a_2)$, $B = L(b_1, b_2)$ - подпространства линейного пространства $\mathbb{R}^2$, и $a_1 = (1, 1)$, $a_2 = (1, 0)$, $b_1 = (2, 1)$, $b_2 = (-1, 1)$.

Р е ш е н и е. По теореме 3.4

$$A + B = L(a_1, a_2, b_1, b_2).$$

Найдем базис пространства $A + B$. Для этого будем из системы векторов a_1, a_2, b_1, b_2 последовательно удалять те векторы, которые линейно выражаются через предыдущие.

Возьмем вектор $a_1 = (1, 1)$. Так как он ненулевой, то система из одного вектора a_1 линейно независима. Рассмотрим теперь систему векторов a_1, a_2:

$$\alpha_1(1,1)+\alpha_2(1,0)=(0,0),$$

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=0,\\ \alpha_1=0,\end{cases}$$

$$\alpha_1=\alpha_2=0.$$

Значит, система из двух векторов a_1 и a_2 линейно независима. Следовательно, $\dim(A+B)\geq 2$. Но по лемме 3.3 $\dim(A+B)\leq 2$. Поэтому $\dim(A+B)=2$. По теореме 2.2 система векторов a_1, a_2 является базисом подпространства $(A+B)$. Заметим также, что $A+B=\mathbb{R}^2$.

Из формулы Грассмача

$$\dim(A\cap B)=\dim A+\dim B-\dim(A+B).$$

Так как система из двух векторов a_1 и a_2 линейно независима и любой вектор из подпространства $A=L(a_1,a_2)$ линейно выражается через a_1 и a_2, то векторы a_1 и a_2 образуют базис подпространства A.
Следовательно, $\dim A=2$.

Система из одного вектора b_1 линейно независима, так как вектор b_1 ненулевой. Система из двух векторов b_1 и b_2 также линейно независима, так как

$$\alpha_1(2,1)+\alpha_2(-1,1)=(0,0),$$

$$\begin{cases}2\alpha_1-\alpha_2=0,\\ \alpha_1+\alpha_2=0,\end{cases}$$

$$\alpha_1=\alpha_2=0.$$

Следовательно, b_1 и b_2 образуют базис подпространства $B=L(b_1,b_2)$. Поэтому $\dim B=2$.

Тогда $$\dim(A\cap B)=2+2-2=2.$$

Пример 3. Пусть $A=L(a_1,a_2,a_3)$ – подпространство пространства $\mathbb{R}^3$, $a_1=(1,1,-1)$, $a_2=(1,0,-1)$, $a_3=(2,1,-2)$. Принадлежит ли вектор $x=(2,0,1)$ подпространству A?

Решение. Если x - вектор из A, то x является линейной комбинацией векторов a_1,a_2,a_3. Выясним, существуют ли скаляры $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ такие, что

$$\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\alpha_3a_3=x\ ?$$

Переходя к системе

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3=2,\\ \alpha_1+\alpha_3=0,\\ -\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3=1\end{cases}$$

и решая ее,

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&2\\1&0&1&0\\-1&-1&-2&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&2\\0&-1&-1&-2\\0&0&0&3\end{array}\right)$$

получим, что система несовместна. Значит, вектор x не принадлежит подпространству A.

Пример 4. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$

$$A=L(a,b),\quad B=L(c).$$

Докажите, что $\mathbb{R}^3=A\oplus B$. Представьте вектор $x=(-1,1,2)$ в виде $x=x_1+x_2$, где $x_1\in A$, $x_2\in B$, если $a=(1,1,1)$, $b=(-1,-2,0)$, $c=(-1,-1,1)$.

Решение. Найдем базис и размерность подпространства $A+B$. По теореме 3.4 $A+B=L(a,b,c)$. Система из одного вектора $a=(1,1,1)$ линейно независима. Система из двух векторов a и b также линейно независима, так как

$$\alpha_1(1,1,1)+\alpha_2(-1,-2,0)=(0,0,0),$$

$$\begin{cases}\alpha_1-\alpha_2=0,\\ \alpha_1-2\alpha_2=0,\\ \alpha_1=0\end{cases}\Rightarrow\ \alpha_1=\alpha_2=0.$$

Рассмотрим систему из трех векторов a,b,c.

$$\alpha_1(1,1,1)+\alpha_2(-1,-2,0)+\alpha_3(-1,-1,1)=(0,0,0),$$

$$\begin{cases}\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3=0,\\ \alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3=0,\\ \alpha_1+\alpha_3=0,\end{cases}\quad \Delta=\begin{vmatrix}1&-1&-1\\1&-2&-1\\1&0&1\end{vmatrix}=-2\neq 0,$$

следовательно, система трех векторов a,b,c является линейно независимой.

Итак, векторы a, b, c образуют базис подпространства $A+B=L(a,b,c)$. Значит, $\dim(A+B)=3$.

Ввиду леммы 3.3 $\mathbb{R}^3 = A+B$.

Пусть вектор $d=(p_1,p_2,p_3)\in A\cap B$. Тогда $d\in A$ и $d\in B$. Так как $d\in A$, то
$$d=\alpha_1 a+\alpha_2 b.$$
Так как $d\in B$, то $d=\alpha_3 c$. Тогда
$$\alpha_1 a+\alpha_2 b=\alpha_3 c,$$
$$\alpha_1 a+\alpha_2 b-\alpha_3 c=\Theta.$$

Поскольку система векторов a, b, c линейно независима, то $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$, т.е.
$$d=0\cdot c=\Theta.$$

Значит, $A\cap B=\{\Theta\}$. Поэтому $\mathbb{R}^3=A\oplus B$.

Так как вектор $x\in\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^3=A\oplus B$, то x линейно выражается через a, b, c:
$$\alpha_1 a+\alpha_2 b+\alpha_3 c=x,$$
откуда
$$\begin{cases}\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3=-1,\\ \alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3=1,\\ \alpha_1+\alpha_3=2.\end{cases}$$

Решаем систему уравнений:
$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&-1\\1&-2&-1&1\\1&0&1&2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&-1\\0&-1&0&2\\0&1&2&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&-1\\0&-1&0&2\\0&0&2&5\end{array}\right),$$
$$\alpha_3=\frac{5}{2},\quad \alpha_2=-2,\quad \alpha_1=-\frac{1}{2}.$$

Итак, $x=-\frac{1}{2}a-2b+\frac{5}{2}c$.

Так как a и b принадлежат A, а c принадлежит B, то
$$x_1=-\frac{1}{2}a-2b=-\frac{1}{2}(1,1,1)-2(-1,-2,0)=\left(\frac{3}{2},\frac{7}{2},-\frac{1}{2}\right)\in A$$
и
$$x_2=\frac{5}{2}(-1,-1,1)=\left(-\frac{5}{2},-\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)\in B.$$

П р и м е р 5. Линейная оболочка векторов $a_1=(1,-1,1,0)$, $a_2=(1,1,0,1)$, $a_3=(2,0,1,1)$ из $\mathbb{R}^4$ является пространством решений некоторой однородной системы линейных уравнений. Найдите эту систему.

Р е ш е н и е . Пусть $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4$. Необходимо определить условия, связывающие x_1, x_2, x_3, x_4, при которых $x\in L(a_1,a_2,a_3)$.

Пусть существуют скаляры $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ такие, что
$$\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\alpha_3 a_3=x.$$
Перейдем к системе
$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3=x_1,\\ -\alpha_1+\alpha_2=x_2,\\ \alpha_1+\alpha_3=x_3,\\ \alpha_2+\alpha_3=x_4\end{cases}$$
и приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду
$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&x_1\\-1&1&0&x_2\\1&0&1&x_3\\0&1&1&x_4\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&x_1\\0&2&2&x_1+x_2\\0&-1&-1&-x_1+x_3\\0&1&1&x_4\end{array}\right)\sim$$
$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&x_1\\0&1&1&x_4\\0&2&2&x_1+x_2\\0&-1&-1&-x_1+x_3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&x_1\\0&1&1&x_4\\0&0&0&x_1+x_2-2x_4\\0&0&0&-x_1+x_3+x_4\end{array}\right).$$

Так как система имеет решение, то по теореме Кронекера-Капелли ранги матрицы системы и расширенной матрицы системы равны. Следовательно, должны выполняться равенства
$$\begin{cases}x_1+x_2-2x_4=0,\\ -x_1+x_3+x_4=0.\end{cases}$$

Эта система и является искомой системой уравнений.

Вопросы для самоконтроля

1. Подпространства линейного пространства. Операции на подпространствах.

1.1. Докажите, что всякое подпространство линейного пространства V над полем P само является линейным пространством относительно операций, определенных в V.

1.2. Докажите, что непустое подмножество W линейного пространства V над полем P является его подпространством тогда и только тогда, когда $\alpha x+\beta y \in W$ для любых $x, y \in W$ и любых $\alpha, \beta \in P$.

1.3. Докажите, что множество L всех многочленов $\mathbb{R}_n[x]$ $(n>1)$, имеющих данный действительный корень α, является подпространством $\mathbb{R}_n[x]$. Найдите $\dim L$.

1.4. Как определяется сумма двух подпространств линейного пространства?

1.5. Разложите пространство V^3 в сумму двух подпространств.

1.6. Разложите пространство V^3 в сумму трех подпространств.

1.7. Пусть W, U – подпространства линейного пространства V. Равны ли подпространства $W+U$ и $U+W$?

1.8. Докажите, что сумма конечного множества подпространств $W_1, W_2, \ldots, W_k$ пространства V совпадает с пересечением всех подпространств пространства V, содержащих $W_1, W_2, \ldots, W_k$.

2. Формула Грассмана

2.1. Докажите, что каждое подпространство конечномерного линейного пространства конечномерно.

2.2. Докажите, что базис подпространства W линейного пространства V можно дополнить до базиса пространства V.

2.3. Пусть W_1, W_2 – подпространства конечномерного линейного пространства V. Докажите, что если $\dim(W_1+W_2)=1+\dim(W_1\cap W_2)$, то сумма W_1+W_2 равна одному из этих подпространств, а пересечение $W_1\cap W_2$ – другому.

2.4. Пусть W_1, W_2 – подпространства конечномерного линейного пространства V. Докажите, что если $\dim W_1+\dim W_2>\dim V$, то $W_1\cap W_2 \neq \{\Theta\}$.

2.5. Изложите схему доказательства теоремы 3.1.

3. Прямая сумма подпространств линейного пространства.

3.1. Сформулируйте определение прямой суммы двух подпространств линейного пространства.

3.2. Сформулируйте определение прямой суммы трех подпространств линейного пространства.

3.3. Как построить базис прямой суммы подпространств, исходя из базисов этих подпространств?

3.4. Как вычислить размерность прямой суммы подпространств, зная размерности этих подпространств?

3.5. Разложите пространство V^3 в прямую сумму двух подпространств.

3.6. Разложите пространство V^3 в прямую сумму трех подпространств.

4. Линейная оболочка системы векторов.

4.1. Из каких векторов состоит подпространство $L(a)$?

4.2. Из каких векторов состоит подпространство $L(a, b)$?

4.3. Оцените размерность подпространства $L(a_1, \ldots, a_k)$.

4.4. Представьте подпространство U конечномерного линейного пространства V в виде линейной оболочки некоторой системы векторов из V.

4.5. Пусть $U=L(a_1,\ldots,a_k)$, $W=L(b_1,\ldots,b_s)$. Докажите, что $U+W=L(a_1,\ldots,a_k,b_1,\ldots,b_s)$.

4.6. Докажите, что для любого подпространства W n-мерного линейного пространства V найдется дополнительное подпространство, т.е. такое подпространство U, что $V=W\oplus U$.

Задания к лабораторной работе

1.1–1.6. Выясните, является ли подпространством линейного пространства $M(n, \mathbb{C})$ множество K:

1.1. невырожденных матриц порядка n;

1.2. вырожденных матриц порядка n;

1.3. квадратных матриц порядка n с определителем 1;

1.4. симметрических матриц порядка n;

1.5. кососимметрических матриц порядка n;

1.6. матриц порядка n, перестановочных с фиксированной квадратной матрицей A порядка n?

1.7–1.12. Докажите, что подпространством линейного пространства $\mathbb{C}^n$ является множество K векторов $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ пространства $\mathbb{C}^n$, у которых

I.7. $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=0$;

I.8. $\alpha_1=\alpha_n$;

I.9. $\alpha_1=\alpha_2=0$;

I.10. $\alpha_n=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}$;

I.11. $\alpha_1-\alpha_n=0$;

I.12. $\alpha_1=-(\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n)$.

2.I.-2.6. Докажите, что подпространством линейного пространства $C_{[a,b]}$ является множество H функций $f(x)$:

2.I. для которых $f(a)=0$;

2.2. если $f(x)=a+bx$, где $a,b\in\mathbb{R}$;

2.3. если $f(x)=a+b\sin^2x+c\cdot\cos^2x$, где $a,b,c\in\mathbb{R}$;

2.4. если $f(x)=a+b\sin x+c\cdot\cos x$, где $a,b,c\in\mathbb{R}$;

2.5. если $f(x)=ax^2+be^{-x}+c\sin x$, где $a,b,c\in\mathbb{R}$;

2.6. для которых $f'(b)=0$.

2.7-2.I2. Выясните, является ли подпространством линейного пространства $\mathbb{R}_n[x]$ множество H многочленов $f(x)$ из $\mathbb{R}_n[x]$, если

2.7. H - множество четных многочленов ($f(x)=f(-x)$);

2.8. H - множество нечетных многочленов ($f(-x)=-f(x)$);

2.9. $f(0)=0$;

2.I0. $2f(1)-f(2)=0$;

2.II. коэффициенты при четных степенях x равны нулю;

2.I2. все коэффициенты равны, т.е. $f(x)=ax^n+ax^{n-1}+\ldots+ax+a,\ a\in\mathbb{R}$?

3. Найдите размерность и базис линейной оболочки $L(a_1,a_2,a_3,a_4)$ системы векторов из $\mathbb{R}^4$.

	a_1	a_2	a_3	a_4
3.I.	(1,0,0,-1);	(2,1,1,0);	(1,1,1,1);	(1,2,3,4);
3.2.	(1,1,1,1);	(1,1,-1,-1);	(2,2,0,0);	(1,-1,-1,0);
3.3.	(1,2,1,2);	(2,1,2,1);	(1,-1,1,-1);	(1,1,1,1);
3.4.	(-1,1,0,1);	(2,0,1,-1);	(1,1,-1,1);	(0,2,-1,2);
3.5.	(0,1,1,2);	(-3,1,0,-1);	(-1,2,1,-1);	(2,1,1,0);
3.6.	(-1,1,2,1);	(-1,2,1,3);	(0,1,-1,2);	(3,2,0,1);
3.7.	(1,-1,1,-1);	(0,-1,2,2);	(1,-2,3,1);	(0,-1,1,1);
3.8.	(0,1,0,1);	(1,0,1,0);	(2,2,2,2);	(-1,1,1,-1);
3.9.	(0,-2,1,1);	(1,-1,2,1);	(1,-3,3,2);	(-2,2,1,3);
3.I0.	(4,1,0,-1);	(-2,1,2,3);	(-1,3,0,2);	(2,2,2,2);
3.II.	(-1,0,2,3);	(1,2,0,1);	(4,3,-1,2);	(0,1,3,2);
3.I2.	(2,-1,1,0);	(2,4,1,-1);	(4,3,2,-1);	(-1,1,1,2).

4.I.-4.4. Найдите размерность и базис линейной оболочки $L(a_1,a_2,a_3)$ векторов из $\mathbb{R}_2[x]$:

	a_1	a_2	a_3
4.I.	x^2+x+1;	x^2-x;	$-2x-1$;
4.2.	$3x^2-1$;	$2x+1$;	x^2+x-1;
4.3.	$2x-1$;	x^2+2x-1;	x^2+x;
4.4.	$-x^2+1$;	$2x^2+x+2$;	x^2-3x.

4.5-4.8. Найдите базис и размерность линейной оболочки $L(a_1,a_2,a_3)$ векторов из действительного линейного пространства $\mathbb{C}$:

	a_1	a_2	a_3
4.5.	$1+2i$;	$3-i$;	$5+2i$;
4.6.	$2-i$;	$5i$;	$1+i$;
4.7.	$-3+2i$;	$2+i$;	$1-i$;
4.8.	$-1-i$;	$3+4i$;	$-2i$.

4.9-4.I2. Найдите базис и размерность линейной оболочки $L(a_1,a_2,a_3)$ векторов из $M(2,\mathbb{R})$:

	a_1	a_2	a_3
4.9.	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$;
4.10.	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$;
4.11.	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$;
4.12.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$;	$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Найдите размерность и базис суммы, а также размерность пересечения подпространств $L(a_1, a_2, a_3)$ и $L(b_1, b_2)$ линейного пространства R^3. Выясните, принадлежит ли вектор x пространствам $L(a_1, a_2, a_3)$, $L(b_1, b_2)$?

	a_1	a_2	a_3
5.1.	(1,-1,2);	(3,0,2);	(2,1,0);
5.2.	(0,1,3);	(-1,2,0);	(-1,3,3);
5.3.	(-2,3,-1);	(1,1,-2);	(-3,2,1);
5.4.	(0,-1,1);	(1,2,-2);	(1,1,-1);
5.5.	(-2,1,0);	(0,1,-1);	(2,-2,1);
5.6.	(1,1,-1);	(-2,0,3);	(-1,1,2);
5.7.	(3,1,-1);	(-1,2,0);	(2,3,-1);
5.8.	(-1,0,1);	(2,-1,3);	(1,-1,4);
5.9.	(0,1,-1);	(-1,-1,2);	(-1,0,1);
5.10.	(4,-3,1);	(-3,2,0);	(1,-1,1);
5.11.	(0,-1,2);	(1,3,0);	(1,2,2);
5.12.	(-2,1,2);	(0,-2,-1);	(-2,-1,1).

	b_1	b_2	x
5.1.	(1,1,3);	(0,1,2);	(1,3,5);
5.2.	(-1,2,3);	(3,2,1);	(0,-1,2);

	b_1	b_2	x
5.3.	(3,2,3);	(-1,0,1);	(5,-4,1);
5.4.	(-2,1,2);	(3,0,1);	(-2,2,4);
5.5.	(1,1,-1);	(4,-1,0);	(-1,2,3);
5.6.	(0,1,3);	(2,1,0);	(4,3,2);
5.7.	(-1,3,1);	(4,0,2);	(5,1,3);
5.8.	(4,1,2);	(-1,2,4);	(3,2,0);
5.9.	(5,-1,2);	(-1,5,1);	(1,2,2);
5.10.	(-4,2,0);	(1,-1,3);	(0,1,1);
5.11.	(-3,2,1);	(4,3,-1);	(-1,-1,1);
5.12.	(3,2,0);	(-3,1,1);	(4,3,2).

6. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^4$

$$A = L(a_1, a_2), \quad B = L(a_3, a_4).$$

Докажите, что $\mathbb{R}^4 = A \oplus B$. Представьте вектор x в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in A$, $x_2 \in B$.

	a_1	a_2	a_3
6.1.	(1,1,-1,-1);	(3,-1,1,-2);	(2,1,2,-3);
6.2.	(1,2,3,-1);	(2,3,-4,4);	(3,-4,2,1);
6.3.	(1,2,-2,1);	(2,1,3,2);	(3,-4,1,-3);
6.4.	(2,3,-3,1);	(1,-4,5,-2);	(3,4,-3,-4);
6.5.	(3,4,3,-4);	(4,6,-3,1);	(2,3,-4,2);
6.6.	(1,0,2,-3);	(1,3,0,-1);	(2,-2,1,0);
6.7.	(3,1,-2,4);	(1,3,2,3);	(2,1,-1,2);
6.8.	(8,6,3,2);	(-4,-1,-1,1);	(4,1,2,2);
6.9.	(2,5,1,3);	(4,6,3,5)	(4,1,1,7);
6.10.	(2,5,4,1);	(1,3,2,1);	(2,10,9,7);
6.11.	(2,2,-1,1);	(4,3,-1,2);	(3,5,-3,4);
6.12.	(2,3,11,5);	(1,1,5,2);	(2,1,3,2).

	a_4	x
6.1.	(1,2,3,-3);	(0,2,0,-1);

	a_4	x
6.2.	$(2,-3,1,-4)$;	$(0,9,-3,2)$;
6.3.	$(4,1,3,1)$;	$(3,6,5,6)$;
6.4.	$(1,1,2,-3)$;	$(0,-5,5,3)$;
6.5.	$(1,2,3,-1)$;	$(3,4,4,-2)$;
6.6.	$(3,5,-3,2)$;	$(2,7,-2,-1)$;
6.7.	$(0,1,5,-4)$;	$(-1,-1,-4,2)$;
6.8.	$(0,2,5,1)$;	$(-4,-5,-2,-3)$;
6.9.	$(2,-3,3,2)$;	$(6,23,1,10)$;
6.10.	$(3,1,9,2)$;	$(-3,4,-4,4)$;
6.11.	$(3,2,-2,2)$;	$(-2,0,1,-1)$;
6.12.	$(1,1,3,2)$;	$(0,1,5,2)$.

7. Линейная оболочка системы векторов a_1, a_2, a_3 из задания 3 является пространством решений некоторой однородной системы линейных уравнений. Найдите эту систему уравнений.

Содержание

Лабораторные работы
по курсу "Алгебра и теория чисел"
(раздел "Линейная алгебра", часть I)
для студентов математического факультета

Составители: Бузланов Александр Васильевич
Каморников Сергей Федорович
Кармазин Александр Петрович

Ответственный за выпуск А.П.Кармазин

Редактор Е.Ф.Зайцева

Подписано в печать 03.10.90. Формат 60х84 1/16.
Бумага писчая № 1. Печать офсетная. Усл.п.л.3,35 Уч.-изд.л.2,4.
Тираж 200 экз. Заказ 151 . Бесплатно.

Отпечатано на ротапринте ГГУ им.Ф.Скорины. г.Гомель, ул.Советская 104.