Л. А. ШЕМЕТКОВ
А. Н. СКИБА

ФОРМАЦИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

СОВРЕМЕННАЯ
АЛГЕБРА

Л. А. ШЕМЕТКОВ
А. Н. СКИБА

ФОРМАЦИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1989

ББК 22.144
Ш46
УДК 512.5

Шеметков Л. А., Скиба А. Н. **Формации алгебраических систем.**— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.— (Соврем. алгебра).— 256 с.— ISBN 5-02-013918-1.

Первая в мировой литературе попытка изложения общей теории формаций алгебраических систем. Анализируются различные способы построения формаций алгебраических систем, рассматриваются связи между формациями и многообразиями, исследуются решетки формаций, описываются формации с ограничениями на систему подформаций.

Для математиков — аспирантов и научных работников. Может служить основой спецкурсов для студентов математических отделений университетов и пединститутов.

Библиогр. 186 назв.

Рецензенты:
доктор физико-математических наук *А. Ю. Ольшанский*,
доктор физико-математических наук *Д. М. Смирнов*

Ш $\frac{\mathbf{1602040000—020}}{\mathbf{053(02)\text{-}89}}$ **34-89**

ISBN 5-02-013918-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Изучение любой алгебраической системы неизбежно связано с необходимостью рассмотрения ее подсистем и факторсистем, обладающих теми или иными свойствами. При этом многие рассматриваемые свойства оказываются абстрактными, и поэтому успех исследования прямо зависит от знания особенностей соответствующих абстрактных классов алгебраических систем. Вряд ли кто-либо будет оспаривать это положение; оно может быть проиллюстрировано многочисленными «примерами из жизни» групп, колец и других старых, классических объектов алгебры.

Рассмотрение классов является характерной чертой и общей теории алгебраических систем, широкое развитие которой началось в 50-х годах нашего века. Большой вклад в развитие и пропаганду этой области внес, как известно, А. И. Мальцев. В докладах [46, 48] на IV Всесоюзном математическом съезде и на Международном конгрессе математиков в Москве в 1966 г. наряду с другими направлениями А. И. Мальцев рассматривает как одно из наиболее важных теорию классов алгебраических систем. Классам систем (в частности, многообразиям и квазимногообразиям) посвящен ряд работ А. И. Мальцева (см. [49]), а также значительная часть его монографии «Алгебраические системы» [50]. Напомним, что класс $\mathfrak{M}$ алгебраических систем называется многообразием, если существует такая совокупность Σ тождеств сигнатуры Ω, что $\mathfrak{M}$ состоит из тех и только тех систем сигнатуры Ω, в которых истинны все тождества из Σ. Эквивалентное определение — на языке свойств классов — дает теорема Биркгофа (если быть точным, следует отметить, что Биркгоф доказывал свою теорему для многообразий алгебр, а то, что она может быть распространена на произвольные алгебраические системы, замечено А. И. Мальцевым [50]). Согласно этой теореме непустой класс $\mathfrak{M}$ алгебраических систем сигнатуры Ω является многообразием тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия: 1) декартово произведение произвольной последовательности $\mathfrak{M}$-систем есть $\mathfrak{M}$-система; 2) любая подсистема произвольной $\mathfrak{M}$-системы является $\mathfrak{M}$-системой; 3) любой гомоморфный образ произвольной $\mathfrak{M}$-системы есть $\mathfrak{M}$-система. Аналогичный результат справедлив и для квазимногообразий (см. [50]); в частности, они также являются мультипликативно замкнутыми классами.

Ввиду последнего обстоятельства многие классы систем с условиями конечности не являются ни многообразиями, ни квазимногообразиями. Не являются ими, понятно, и ненаследственные классы. Так, например, не являются многообразиями классы конечномерных алгебр Ли, классы групп с главными рядами и др. При изучении алгебраических систем с условиями конечности (в частности, конечных систем) имеет смысл использовать классы, «похожие» на многообразия, но необязательно наследственные и необязательно замкнутые относительно бесконечных декартовых произведений. Таковыми как раз являются формации, которым посвящена настоящая книга.

Понятие формации было введено в 1963 г. Гашюцом [149] в связи с разработкой общих методов отыскания подгрупп в конечных разрешимых группах. В дальнейшем развитие так называемых формационных методов шло весьма интенсивно при изучении как разрешимых, так и неразрешимых конечных и бесконечных групп. Таким образом, в рамках теории групп возникло и вполне оформилось новое научное направление—теория формаций.

Формация групп—это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных поддекартовых произведений (как обычно, конечное произведение—это произведение с конечным числом множителей). Понятно, что это определение можно расширить и говорить о формациях колец, алгебр Ли и т. д. Но все же до конца семидесятых годов эпицентр теории формаций лежал в пределах теории конечных групп.

Переломным стал 1978 год. Именно в этом году была опубликована монография «Формации конечных групп» [107], которая подвела итоги предыдущего развития, и с этого же года в Гомельском государственном университете начал работать семинар по общей теории формаций алгебраических систем. Постепенно созрело убеждение в том, что многие идеи и конструкции из арсенала теории формаций конечных групп на самом деле носят универсальный характер и могут быть использованы при изучении других алгебраических систем. Другой важной особенностью деятельности семинара явилось пристальное внимание к разработке методов изучения самих формаций. К настоящему времени уже накоплен достаточно содержательный и богатый в идейном плане материал, позволяющий говорить об оформлении теории формаций в самостоятельное направление общей алгебры.

Предлагаемая читателю книга представляет собой попытку анализа и обобщения достижений указанного направления. Краткий обзор содержания глав книги дает представление о тех идейных целях, которые ставили перед собой авторы.

В главе 1 определены наиболее важные типы формаций, а также предложены способы задания и конструирования формаций. Здесь могут быть выделены три основных способа.

Первый из них состоит в использовании идеи выделения внутри фиксированного класса алгебраических систем совокупности систем, которые в определенном смысле правильным образом действуют на некотором множестве вспомогательных объектов. В § 2 эта идея детально реализуется в классе мультиколец. Под мультикольцом в данной книге понимается алгебра A сигнатуры $\{+, -, 0\} \cup \Omega$ такая, что $\langle A, +, -, 0\rangle$ — группа и при $\Omega \neq \varnothing$ каждая операция из Ω имеет ненулевую арность и связана с операцией $+$ законами дистрибутивности. Вводится понятие централизатора $C_A(H/K)$ фактора H/K мультикольца A, которое в случае колец эквивалентно понятию аннулятора, а в случае групп и алгебр Ли совпадает с обычным централизатором. Пусть f — функция, сопоставляющая каждому мультикольцу A фиксированной наследственной формации мультиколец $\mathfrak{X}$ ее подформацию $f(A)$. Нормальный фактор H/K мультикольца A называется f-центральным, если $A/C_A(H/K) \in f(H/K)$. Устанавливается, что совокупность $\langle f\rangle$ всех тех мультиколец из $\mathfrak{X}$, которые обладают нормальными рядами с f-центральными факторами, является формацией. При этом f называется экраном формации $\mathfrak{F} = \langle f\rangle$. Роль экранов проявляется двояким образом. С одной стороны, экраны позволяют с помощью имеющихся в наличии формаций строить новые формации с заданными свойствами. С другой стороны, важно изучать различные экраны фиксированной формации, поскольку нередко удается редуцировать решаемые задачи к значениям экранов.

Другой способ задания формации, рассмотренный в § 3, состоит в использовании идеи порождения. Пусть задана некоторая совокупность Θ формаций алгебраических систем. Если $\mathfrak{F}$—пересечение всех тех формаций из Θ, которые содержат данный класс $\mathfrak{X}$, то $\mathfrak{F}$ называется Θ-формацией, порожденной классом $\mathfrak{X}$, и обозначается через $\Theta\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$. При таком способе задания основное внимание уделяется тому, как свойства класса $\mathfrak{X}$ связаны со свойствами формации $\Theta\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$.

Класс $\mathfrak{F}$ алгебраических систем является наследственной формацией, когда он удовлетворяет следующим условиям: $\mathfrak{F}$ гомоморфно замкнут, наследственен и замкнут относительно взятия конечных декартовых произведений. Имея в виду отмеченную выше теорему Бирkгофа, естественно поставить задачу характеризации наследственных формаций с помощью тождеств. Эта задача решена в § 4 для класса конечных наследственных формаций (конечная формация—это формация, состоящая из конечных систем). Основная идея состоит в рассмотрении бесконечной последовательности множеств тождеств и в выделении тех алгебраических систем, в которых истинны тождества из почти всех множеств этой последовательности.

Глава 2 посвящена произведениям формаций и решеткам формаций. Напомним, что в работах [47, 48] А. И. Мальцев ввел понятие произведения произвольных классов алгебраических систем и обосновал необходимость выделения и изучения различных группоидов классов алгебраических систем. В дальнейшем это произведение получило название мальцевского $\mathfrak{M}$-произведения. Мальцевское $\mathfrak{M}$-произведение удобно использовать при перемножении наследственных формаций. В работе [113] было предложено понятие репличного $\mathfrak{M}$-произведения классов алгебраических систем. Оно оказывается более удобным при изучении необязательно наследственных формаций. В § 6 устанавливается связь между мальцевским и репличным $\mathfrak{M}$-произведениями классов и приводятся их общие свойства.

Пусть формация $\mathfrak{F}$ является репличным $\mathfrak{M}$-произведением двух формаций $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{H}$. Вполне естественно рассматривать задачу установления связей между свойствами формации $\mathfrak{F}$ и свойствами формаций $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{H}$. Важность этой задачи обусловлена тем, что большинство используемых классических формаций может быть построено с помощью операций произведения и пересечения из более просто устроенных формаций. В § 7 решается задача нахождения экранов формации $\mathfrak{F}$ с помощью экранов формаций $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{H}$. Параграф 8 посвящен проблеме изучения однопорожденных произведений формаций. Последняя проблема решена здесь в классе конечных групп, но из полученного решения вытекает известный результат [115] о кроссовых произведениях многообразий групп.

Рассмотрим теперь операции пересечения $\cap$ и объединения $\vee$ формаций. Через $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$ обозначается пересечение всех формаций, содержащих класс $\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H}$. Решеткой формаций называется всякое множество формаций, замкнутое относительно операций $\cap$ и $\vee$. Примером решетки формаций может служить множество F_{Ω} всех конечных формаций сигнатуры Ω. В § 9 изучена связь между решеткой F_{Ω} и решеткой M_{Ω} многообразий сигнатуры Ω в случае, когда Ω не содержит предикатных символов. Здесь, в частности, замечено, что всякая решетка локально конечных многообразий алгебр изоморфно вкладывается в решетку формаций конечных алгебр. Это означает, что решетка формаций конечных алгебр более сложно устроена, чем решетка локально конечных многообразий алгебр.

Вместо операции объединения $\vee$ можно рассматривать ее модификации в зависимости от типа рассматриваемых формаций. На этом пути мы приходим к новым типам решеток формаций. Примеры такого рода рассмотрены в § 10.

Глава 3 посвящена общей задаче изучения подсистем алгебраической системы A с помощью класса систем $\mathfrak{F}$. Можно выделить три круга вопросов. Первый из них состоит в изучении $\mathfrak{F}$-максимальных подсистем системы A, т. е. таких подсистем, которые входят в $\mathfrak{F}$ и не содержатся в других $\mathfrak{F}$-подсистемах из A. Широкий круг вопросов возникает при изучении максимальных подсистем системы A и их пересечений, в частности, в выявлении и исследовании $\mathfrak{F}$-подсистем, являющихся пересечением некоторых максимальных подсистем. Третий круг вопросов связан с изучением $\mathfrak{F}$-подсистем, соединенных с системой A цепью подсистем с определенными свойствами. Задачи такого рода решаются в главе 3 для алгебр из мальцевских многообразий (в частности, для мультиколец) с условиями минимальности и максимальности для подалгебр.

Силовские подгруппы и их обобщения (подгруппы Картера, Холла, $\mathfrak{F}$-проекторы и др.) сохраняют свои свойства в содержащих их подгруппах и при гомоморфизмах. Такова же ситуация с картановскими подалгебрами алгебр Ли. В параграфе 11 мы вводим определение $\mathfrak{F}$-полупроектора и $\mathfrak{F}$-проектора алгебры. Подалгебра H алгебры A называется $\mathfrak{F}$-полупроектором, если для любой конгруэнции π на A подалгебра $\pi H/\pi$ $\mathfrak{F}$-максимальна в A/π. Если $\mathfrak{F}$-полупроектор остается $\mathfrak{F}$-полупроектором и в любой содержащей его подалгебре, то он называется $\mathfrak{F}$-проектором алгебры. В § 11 мы выясняем условия существования $\mathfrak{F}$-полупроекторов и $\mathfrak{F}$-проекторов и изучаем их свойства.

На первый взгляд задача распространения результатов Ф. Холла о системных нормализаторах конечных разрешимых групп на теорию алгебр может показаться парадоксальной. В § 12 мы вводим понятие $\mathfrak{F}$-нормализатора алгебры A и изучаем его свойства; в частности, если A — конечная разрешимая группа, а $\mathfrak{F}$ — класс нильпотентных групп, мы возвращаемся к системному нормализатору.

В § 13 теория профраттиниевых подгрупп Гашюца [147] и их обобщений [20, 144, 158] распространяется на мультикольца. Предлагаемый нами подход является новым и в классе конечных групп. Он основан на анализе свойств пересечений некоторых максимальных подалгебр. Рассмотрению пересечений всех максимальных подалгебр с определенным свойством посвящен § 14.

При изучении формаций можно выделить два основных подхода. С одной стороны, можно ставить задачу изучения формаций, у которых некоторая выделенная система подформаций удовлетворяет определенным требованиям. С другой стороны, естественно выделять и изучать подформации заданной формации. Пусть Θ и Ω — некоторые совокупности формаций. Пусть $\mathfrak{F}$ — такая формация, что $\mathfrak{F} \in \Theta \setminus \Omega$ и всякая собственная Θ-подформация из $\mathfrak{F}$ принадлежит Ω. Широкий круг задач связан с изучением формаций $\mathfrak{F}$, выделяемых указанным образом. Отметим две конкретизации в классе конечных групп. Пусть Θ — множество всех локальных формаций, а Ω — совокупность подформаций фиксированной формации $\mathfrak{H}$. Тогда $\mathfrak{F}$ называется минимальной локальной не $\mathfrak{H}$-формацией. Если же Θ — множество всех формаций, Ω — класс однопорожденных формаций, то $\mathfrak{F}$ — минимальная неоднопорожденная формация.

Основная цель главы 4 состоит в изучении минимальных локальных не $\mathfrak{H}$-формаций. Мы выясняем также роль таких формаций при исследовании формаций с заданной системой подформаций.

Изучение минимальных не $\mathfrak{F}$-групп, где $\mathfrak{F}$ — локальная формация, имеет в теории конечных групп большую историю. Глава 5 начинается с изложения полученных в последнее время результатов о конечных разрешимых минимальных не $\mathfrak{F}$-группах. Сравнительно недавно выявилась неожиданная роль минимальных не $\mathfrak{F}$-групп в вопросах классификации формаций. Последнее иллюстрируется в главе 5 на ряде конкретных задач.

Обратим внимание на такую общую задачу: перечислить локальные формации $\mathfrak{H}$, для которых всякая нециклическая минимальная не $\mathfrak{H}$-группа является минимальной не $\mathfrak{F}$-группой, где $\mathfrak{F}$—фиксированная локальная формация. Результаты главы 5 указывают на особую роль таких формаций $\mathfrak{H}$ в классификационных задачах.

Хотя главы 4 и 5 посвящены только формациям конечных групп, мы надеемся, что содержащиеся в них идеи и развитые методы могут быть использованы при разработке аналогичных вопросов для других систем.

В отношении терминологии мы следуем монографии А. И. Мальцева [50]. Что касается формаций конечных групп, то здесь мы пользуемся устоявшейся терминологией, которая в сводном виде собрана в монографии [107].

В основном тексте книги мы не указываем авторов формулируемых результатов. Все необходимые ссылки и исторические справки помещены в комментариях, которыми заканчивается каждая глава.

В список литературы мы включили все доступные нам статьи, имеющие отношение к излагаемой теме и не вошедшие в книгу [107].

Мы придерживаемся соглашения о том, что класс алгебраических систем—это совокупность систем одной сигнатуры.

В книге принята сквозная нумерация параграфов. Хотя внутри параграфа могут встречаться системы разной сигнатуры, но внутри каждого отдельного пункта, на которые распадается параграф, рассматриваются всегда лишь системы одной и той же сигнатуры. Для удобства начинающего читателя в конце книги помещен перечень основных используемых определений и обозначений.

ГЛАВА 1

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФОРМАЦИЙ

§ 1. Основные определения

1.1. Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый класс алгебраических систем. Говорят, что система A является *конечным поддекартовым произведением $\mathfrak{X}$-систем*, если в $\mathfrak{X}$ найдутся такие системы $A_1, \ldots, A_n$, что $A \subseteq D = A_1 \times \ldots \times A_n$, причем для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$ справедливо $A^{\pi_i} = A_i$, где π_i — проектирование D на A_i.

Класс алгебраических систем $\mathfrak{F}$ называется *формацией*, если выполняются следующие условия:

1) каждый гомоморфный образ любой $\mathfrak{F}$-системы принадлежит $\mathfrak{F}$;

2) всякое конечное поддекартово произведение $\mathfrak{F}$-систем принадлежит $\mathfrak{F}$.

Если же про класс $\mathfrak{F}$ известно лишь, что он удовлетворяет условию 1), то мы будем говорить, что $\mathfrak{F}$ — *полуформация*. Понятно, что всякая формация является и полуформацией.

Многие конкретные классы алгебраических систем являются формациями. Таковы, например, классы групп с главными или композиционными рядами, конечномерных линейных алгебр, артиновых и нётеровых колец, разрешимых и нильпотентных алгебр Ли. Всякое многообразие алгебраических систем является формацией, но обратное в общем случае неверно (названные выше формации многообразиями не являются).

Если формация $\mathfrak{F}$ входит в класс алгебраических систем $\mathfrak{X}$, то $\mathfrak{F}$ называют *подформацией* класса $\mathfrak{X}$.

1.2. Подсистема H алгебраической системы A называется *нормальной* в A, если H является смежным классом по некоторой конгруэнции системы A. Подкласс $\mathfrak{H}$ некоторого класса алгебраических систем $\mathfrak{M}$ называют (*нормально*) *наследственным* в $\mathfrak{M}$, если каждая (соответственно каждая нормальная) $\mathfrak{M}$-подсистема произвольной $\mathfrak{H}$-системы является $\mathfrak{H}$-системой. Класс $\mathfrak{H}$ называется *наследственным* (*нормально наследственным*), если он наследственен (соответственно нормально наследственен) в классе всех алгебраических систем сигнатуры класса $\mathfrak{H}$.

Легко видеть, что класс алгебраических систем $\mathfrak{H}$ тогда и только тогда является наследственной формацией, когда выполняются следующие условия:

1) $\mathfrak{H}$ является наследственной полуформацией;

2) всякое конечное декартово произведение $\mathfrak{H}$-систем принадлежит $\mathfrak{H}$.

Класс всех групп с главными рядами — пример ненаследственной формации.

1.3. Конгруэнцию π алгебраической системы A назовем *фраттиниевой*, если $\pi H \neq A$ для любой собственной подсистемы H из A. Будем говорить, что класс $\mathfrak{X}$ *насыщен* в классе $\mathfrak{H}$, если из $R \in \mathfrak{H}$ и $R/\varphi \in \mathfrak{X}$, где φ — некоторая фраттиниева конгруэнция R, всегда следует $R \in \mathfrak{X}$.

Классы разрешимых и нильпотентных алгебр Ли являются примерами формаций, насыщенных в классе всех конечномерных алгебр Ли (см. [1], п. 1.7 и 1.8). Ряд примеров формаций групп, насыщенных в классе всех конечных групп, описан в книгах [107, 162].

1.4. Формацию алгебраических систем $\mathfrak{F}$ будем называть *конечной*, если конечна всякая $\mathfrak{F}$-система.

1.5. Формацию всех одноэлементных алгебраических систем заданной сигнатуры будем обозначать символом $\mathfrak{E}$.

§ 2. Ступенчатые формации

Мультикольцо. 2.1. Алгебру A сигнатуры $\{+, -, 0\} \cup \Omega$ будем называть *мультикольцом*, если алгебра $\langle A, +, -, 0\rangle$ — группа, все операции из Ω имеют ненулевые арности и для всякой n-арной операции $f \in \Omega$, любого $i \in \{1, \ldots, n\}$, любых $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i', a_i'', a_{i+1}, \ldots$ $\ldots, a_n \in A$ имеет место

$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i' + a_i'', a_{i+1}, \ldots, a_n) = \\ = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i', a_{i+1}, \ldots, a_n) + \\ + f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i'', a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

Все рассматриваемые в данной книге мультикольца имеют сигнатуру $\{+, -, 0\} \cup \Omega$. Нетрудно заметить, что мультикольцо является дистрибутивной Ω-группой в смысле определения Хиггинса [160] (см. также [43]) и мультиоператорным кольцом в смысле Л. А. Скорнякова [96]. Это позволяет использовать при рассмотрении мультиколец соответствующую терминологию и результаты из [43] и [96]. В частности, *идеалом* мультикольца A мы называем, следуя [96], всякую такую его подалгебру H, которая нормальна в группе A и удовлетворяет следующему условию: для всякой n-арной операции $f \in \Omega$, произвольного $i \in \{1, \ldots, n\}$ и любых $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots$ $\ldots, a_n \in A, h \in H$ имеет место $f(a_1, \ldots, a_{i-1}, h, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in H$ (в частности, если f унарна, то это означает, что $f(h) \in H$).

Важная особенность мультиколец заключена в следующем утверждении.

2.2. Теорема. *Пусть H — идеал мультикольца A и $\theta(H) = \{(a, b) \mid a, \ b \in A, \ a \in b + H\}$. Тогда $\theta(H)$ — конгруэнция и всякая конгруэнция на A имеет такую форму для подходящего идеала H.*

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в книгах [43] и [96]. В дальнейшем нам потребуется такое следствие этой теоремы.

2.3. Следствие. *Отображение $H \longrightarrow \theta(H)$ является изоморфизмом решетки идеалов мультикольца A на решетку его конгруэнций.*

2.4. Мультикольцо $A = \{0\}$ будем называть *нулевым*. Мультикольцо A назовем *минимальным*, если оно ненулевое и порождается любым своим ненулевым элементом.

Для любых двух непустых подмножеств H и K мультикольца A через H/K обозначим $\{h + K \mid h \in H\}$. Если H — подалгебра A, а K — идеал H, то H/K является *фактором* мультикольца A.

Фактор H/K мультикольца A назовем:

1) *минимальным*, если H/K — минимальное мультикольцо;

2) *собственным*, если либо $K \neq \{0\}$, либо $H \neq A$;

3) *нетривиальным*, если H/K — ненулевой собственный фактор A;

4) *нормальным*, если H и K — идеалы A;

5) *главным*, если он нормален, $K \neq H$ и из $K \subseteq T \subset H$, где T — идеал A, всегда следует, что $K = T$.

Будем говорить, что H/K — *A-главный фактор из D*, если H/K — главный фактор мультикольца A и $H \subseteq D$.

Нормальные факторы H/K и D/R мультикольца A назовем:

1) *перспективными*, если либо $H = K + D$ и $R = K \cap D$, либо $D = R + H$ и $K = R \cap H$;

2) *проективными*, если в A найдутся такие нормальные факторы $H/K = A_1/B_1, \ldots, A_n/B_n = D/R$, что для любого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ факторы A_i/B_i и A_{i+1}/B_{i+1} перспективны.

Напомним, что ряд идеалов

$$\{0\} = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_t = A$$

мультикольца A называется *главным*, если все его факторы главные.

Следующая лемма является частным случаем теоремы 8.4.2 книги [104].

2.5. Лемма. *Пусть мультикольцо A обладает главным рядом. Тогда между факторами произвольных двух главных рядов мультикольца A можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором соответственные факторы проективны.*

2.6. Лемма. *Пусть N_1 и N_2—такие идеалы мультикольца A, что $N_1 \cap N_2 = \{0\}$, и пусть H/K—произвольный A-главный фактор. Тогда A имеет такой фактор R/N, проективный фактору H/K, что либо $N_1 \subseteq N$, либо $N_2 \subseteq N$.*

Доказательство. Если $N_1 + H \neq N_1 + K$, то фактор H/K перспективен фактору $N_1 + H/N_1 + K$. Пусть $N_1 + H = N_1 + K$. Тогда $H = K + (H \cap N_1)$. Значит, фактор H/K перспективен фактору $H \cap N_1/K \cap N_1$. Но последний фактор, очевидно, перспективен фактору $N_2 + (H \cap N_1)/N_2 + (K \cap N_1)$. Лемма доказана.

2.7. Лемма. *Пусть A, B, K, H—идеалы мультикольца G. Тогда если $A \subseteq K \subset H \subseteq A + B$, то фактор H/K перспективен фактору $H \cap B/K \cap B$, если же $A \cap B \subseteq K \subset H \subseteq B$, то фактор H/K перспективен фактору $A + H/A + K$.*

Доказательство. Пусть $A \subseteq K \subset H \subseteq A + B$. Тогда $H = H \cap (A + B) = A + (H \cap B)$. Значит, $H \cap B \not\subseteq K$. Поэтому фактор $H/K = K + (H \cap B)/K$ перспективен фактору $H \cap B/K \cap B$.

Если же $A \cap B \subseteq K \subset H \subseteq B$, то $A \cap H \subseteq K$. Следовательно, фактор $H/K = H/K + (A \cap H) = H/(K + A) \cap H$ перспективен фактору $H + A/K + A$. Лемма доказана.

Централизатор. Пусть H/K—произвольный нормальный фактор мультикольца A, D—множество всех таких элементов $x \in A$, что для любого $h \in H$ выполняются следующие условия:

1) $x + h - x = h + t(h)$, где $t(h) \in K$;

б) для всякой операции f из Ω арности $n \geqslant 2$, любых различных i и j из $\{1, \ldots, n\}$ $(i < j)$, произвольных

$a_1, \ldots, a_n \in A$ справедливо

$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, h, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \ldots, a_n) \in K,$$
$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, h, a_{j+1}, \ldots, a_n) \in K.$$

Сумма любых двух идеалов A, входящих в D, снова входит в D. Следовательно, ввиду леммы Цорна множество D включает в себя такой идеал $C_A(H/K)$ мультикольца A, который, в свою очередь, содержит всякий идеал A, входящий в D. Идеал $C_A(H/K)$ назовем *централизатором фактора* H/K в A.

В случае, когда $K=\{0\}$, идеал $C_A(H/K)$ будем обозначать также через $C_A(H)$ и называть *централизатором* H в A.

2.8. Лемма. *Пусть K, H, T, M — идеалы мультикольца A. Тогда:*

1) *если $K \subseteq H$, то $K \subseteq C_A(H/K)$;*

2) *если $K \subseteq H$, $T \subseteq M$ и факторы H/K и M/T проективны, то $C_A(H/K) = C_A(M/T)$;*

3) *если $K \subseteq H \subseteq T$, то $C_A(T/K) \subseteq C_A(H/K) \cap C_A(T/H)$ и $C_{A/K}((T/K)/(H/K)) = C_A(T/H)/K$.*

Доказательство леммы осуществляется непосредственной проверкой.

$\mathfrak{X}$-экран. Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольная непустая наследственная формация мультиколец, Λ — совокупность всех подформаций из $\mathfrak{X}$. Отображение $f\colon \mathfrak{X} \to \Lambda$ назовем ***$\mathfrak{X}$-экраном***, если выполняются следующие условия:

1) $f(A) = \mathfrak{X}$ для любого нулевого мультикольца A;

2) если $A \in \mathfrak{X}$ и φ — гомоморфизм A, то $f(A) \subseteq f(A^{\varphi}) \cap \cap f(\mathrm{Ker}\,\varphi)$.

Пусть f — $\mathfrak{X}$-экран, $K \subseteq H$ — идеалы мультикольца $A \in \mathfrak{X}$. Будем говорить, что фактор H/K *f-централен* в A, если $A/C_A(H/K) \in f(H/K)$. Нормальный ряд (т. е. ряд, члены которого — идеалы в A)

$$\{0\} = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_t = A, \quad t \geqslant 0,$$

мультикольца $A \in \mathfrak{X}$ назовем *f-центральным*, если все его факторы f-центральны в A.

Обозначим через $\langle f \rangle$ класс всех тех $A \in \mathfrak{X}$, которые обладают f-центральными рядами.

2.9. Теорема. *Класс $\langle f \rangle$ — непустая формация.*

Доказательство. Класс $\langle f \rangle$ непуст, поскольку ему принадлежат все нулевые мультикольца.

Пусть $A \in \langle f \rangle$ и

$$\{0\} = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_t = A$$

— f-центральный ряд A. Пусть N — идеал A. Покажем, что

$$A_0+N/N \subseteq A_1+N/N \subseteq \ldots \subseteq A_t+N/N = A/N$$

— f-центральный ряд факторалгебры A/N. Пусть $i \in \{1, \ldots, t\}$. Факторы $A_i+N/A_{i-1}+N$ и $A_i/A_{i-1}+(A_i \cap N)$ перспективны. Значит, ввиду леммы 2.8 $C_A(A_i/A_{i-1}) \subseteq \subseteq C_A(A_i+N/A_{i-1}+N)$. Но $f(A_i/A_{i-1}) \subseteq f(A_i+N/A_{i-1}+N)$, и поэтому $A/C_A(A_i+N/A_{i-1}+N) \in f(A_i+N/A_{i-1}+N)$. Следовательно,

$$(A/N)/C_{A/N}((A_i+N/N)/(A_{i-1}+N/N)) =$$
$$= (A/N)/(C_A(A_i+N/A_{i-1}+N)/N) \simeq$$
$$\simeq A/C_A(A_i+N/A_{i-1}+N) \in f(A_i+N/A_{i-1}+N) =$$
$$= f((A_i+N/N)/(A_{i-1}+N/N)),$$

т. е. фактор $(A_i+N/N)/(A_{i-1}+N/N)$ f-централен в A/N. Таким образом, $A/N \in \langle f \rangle$. Итак, все факторалгебры мультикольца A принадлежат $\langle f \rangle$. Поскольку f принимает одинаковые значения на изоморфных мультикольцах, то класс $\langle f \rangle$ абстрактен, т. е. он содержит все изоморфные копии своих мультиколец. Но всякий гомоморфный образ мультикольца A изоморфен одной из его факторалгебр. Значит, класс $\langle f \rangle$ является полуформацией.

Остается показать, что всякое конечное поддекартово произведение алгебр из класса $\langle f \rangle$ принадлежит $\langle f \rangle$. Для этого достаточно проверить, что если мультикольцо A обладает такими идеалами N_1 и N_2, что $N_1 \cap N_2 = \{0\}$ и $A/N_i \in \langle f \rangle$, $i=1, 2$, то $A \in \langle f \rangle$. Пусть

$$\{N_1/N_1\} = A_0/N_1 \subseteq A_1/N_1 \subseteq \ldots \subseteq A_t/N_1 = A/N_1$$

— f-центральный ряд факторалгебры A/N_1, а

$$\{N_2/N_2\} = B_0/N_2 \subseteq B_1/N_2 \subseteq \ldots \subseteq B_r/N_2 = A/N_2$$

— f-центральный ряд факторалгебры A/N_2. Покажем, что

$$\{0\} = N_1 \cap B_0 \subseteq N_1 \cap B_1 \subseteq \ldots \subseteq N_1 \cap B_r = A_0 \subseteq$$
$$\subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_t = A \qquad (1)$$

— f-центральный ряд мультикольца A. Очевидно, что для всякого $i \in \{1, \ldots, t\}$ фактор A_i/A_{i-1} f-централен в A. Пусть $i \in \{1, \ldots, r\}$. Фактор B_i/B_{i-1} f-централен в A, поскольку f-центральным в A/N_2 является фактор $(B_i/N_2)/(B_{i-1}/N_2)$. Тем более f-централен в A фактор $B_{i-1}+(B_i \cap N_1)/B_{i-1}$. Но последний фактор перспективен фактору $N_1 \cap B_i/N_1 \cap B_{i-1}$. Значит, $N_1 \cap B_i/N_1 \cap B_{i-1}$ f-централен в A. Итак, всякий фактор ряда (1) f-централен в A. Теорема доказана.

В заключение этого пункта приведем один конкретный пример, иллюстрирующий понятие экрана (позже будут даны другие примеры). Пусть $\mathfrak{X}$ — класс всех ассоциативных колец, а $\mathfrak{X}$-экран f сопоставляет каждому ненулевому $\mathfrak{X}$-кольцу класс нулевых колец. Тогда $\langle f\rangle$ — совокупность нильпотентных ассоциативных колец.

2.10. Пусть $\Lambda=\{f_i \mid i\in I\}$, где f_i — $\mathfrak{X}_i$-экран. Для всякого $A\in\mathfrak{X}=\bigcap_{i\in I}\mathfrak{X}_i$ положим $\left(\bigcap_{i\in I} f_i\right)(A)=\bigcap_{i\in I} f_i(A)$. Тогда $\bigcap_{i\in I} f_i$ — $\mathfrak{X}$-экран. Такой экран будем называть *пересечением* экранов f_i.

Будем говорить, что экран h *вложен* в экран f, и применять при этом запись $h\leqslant f$, если h — $\mathfrak{H}$-экран, f — $\mathfrak{F}$-экран, $\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{F}$ и $h(A)\subseteq f(A)$ для любого $A\in\mathfrak{H}$.

2.11. Пусть $\{f_i \mid i\in I\}$ — произвольная цепь экранов, т. е. для любых i, $j\in I$ либо $f_i\leqslant f_j$, либо $f_j\leqslant f_i$. Пусть при этом f_i — $\mathfrak{X}_i$-экран. Обозначим через $\mathfrak{X}$ формацию, являющуюся объединением цепи формаций $\{\mathfrak{X}_i \mid i\in I\}$. Для всякого $A\in\mathfrak{X}$ определим подмножество $I(A)$ множества I так: $i\in I(A)$ тогда и только тогда, когда $A\in\mathfrak{X}_i$. Теперь для любого $A\in\mathfrak{X}$ положим $\left(\bigcup_{i\in I} f_i\right)(A)=\bigcup_{j\in I(A)} f_j(A)$. Понятно, что $\bigcup_{i\in I} f_i$ — $\mathfrak{X}$-экран. Такой экран будем называть *объединением* экранов $\{f_i \mid i\in I\}$.

2.12. $\mathfrak{X}$-экран f назовем:

1) *тривиальным*, если $f(A)=\mathfrak{X}$ для любого $A\in\mathfrak{X}$;

2) *постоянным*, если для любых ненулевых A, $B\in\mathfrak{X}$ справедливо $f(A)=f(B)$;

3) *пустым*, если $f(A)$ — пустая формация для любого ненулевого $A\in\mathfrak{X}$;

4) *нулевым*, если $f(A)$ — формация нулевых мультиколец для любого ненулевого $A\in\mathfrak{X}$;

5) *наследственным* (*нормально наследственным*), если любое его значение — наследственная (соответственно нормально наследственная) формация;

6) *внутренним*, если $f(A)\subseteq\langle f\rangle$ для любого ненулевого $A\in\mathfrak{X}$.

Ступенчатые формации. 2.13. Формацию $\mathfrak{F}$ назовем *ступенчатой в* $\mathfrak{X}$, если найдется такой $\mathfrak{X}$-экран f, что $\mathfrak{F}=\langle f\rangle$. При этом мы будем говорить, что f *определяет* $\mathfrak{F}$ или что f является *$\mathfrak{X}$-экраном формации* $\mathfrak{F}$.

2.14. Лемма. *Пусть f — $\mathfrak{X}$-экран формации $\mathfrak{F}$. Для любого $A\in\mathfrak{X}$ положим $f_1(A)=f(A)\cap\mathfrak{F}$. Тогда f_1 — $\mathfrak{X}$-экран формации $\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Понятно, что f_1 — $\mathfrak{X}$-экран, причем $\langle f_1\rangle \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $A\in\mathfrak{F}$, H/K — произвольный нормальный f-центральный фактор мультикольца A. Тогда поскольку всякая факторалгебра мультикольца A также принадлежит $\mathfrak{F}$, то $A/C_A(H/K)\in f(H/K)\cap\mathfrak{F}$, т. е. фактор H/K f_1-централен. Значит, f-центральный ряд A является одновременно и f_1-центральным. Следовательно, $A\in\langle f_1\rangle$. Таким образом, $\mathfrak{F}=\langle f_1\rangle$.

Лемма 2.14 показывает, что всякая ступенчатая в $\mathfrak{X}$ формация обладает по крайней мере одним внутренним $\mathfrak{X}$-экраном.

2.15. Лемма. *Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i\in I\}$ — цепь формаций, $\{f_i \mid i\in I\}$ — такая цепь экранов, что f_i — $\mathfrak{X}_i$-экран формации $\mathfrak{F}_i$ и для любых i, $j\in I$ вложение $f_i\leqslant f_j$ имеет место в точности тогда, когда $\mathfrak{F}_i\subseteq\mathfrak{F}_j$. Тогда $\mathfrak{F}=\bigcup\limits_{i\in I}\mathfrak{F}_i=\langle f\rangle$, где $f=\bigcup\limits_{i\in I}f_i$.*

Доказательство. Пусть $A\in\mathfrak{F}$. Тогда найдется такое $i\in I$, что $A\in\mathfrak{F}_i$. Заметим, что f_i-центральный ряд мультикольца A является и f-центральным. Значит, $A\in\langle f\rangle$.

Пусть $A\in\langle f\rangle$ и

$$\{0\}=A_0\subseteq A_1\subseteq\ldots\subseteq A_t=A \qquad (1)$$

— f-центральный ряд мультикольца A. Ввиду определения экрана f можно указать такие $i_1,\ldots,i_t$, что $A/C_A(A_j/A_{j-1})\in f_{i_j}(A_j/A_{j-1})$, $j=1,\ldots,t$. Пусть $i\in\{i_1,\ldots,i_t\}$, причем для любого $r\in\{1,\ldots,t\}$ справедливо $f_{i_r}\leqslant f_i$. Найдется такое $n\in I$, что $A\in\mathfrak{X}_n$. Если $\mathfrak{X}_n\subseteq\mathfrak{X}_i$, то ряд (1) является f_i-центральным рядом мультикольца A, и поэтому $A\in\mathfrak{F}_i\subseteq\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{X}_n\not\subseteq\mathfrak{X}_i$. Тогда $f_i\leqslant f_n$. Значит, ряд (1) f_n-централен. Следовательно, $A\in\mathfrak{F}_n\subseteq\mathfrak{F}$. Таким образом, остается заключить, что $\mathfrak{F}=\langle f\rangle$. Лемма доказана.

2.16. Лемма. *Пусть f_i — $\mathfrak{X}_i$-экран формации $\mathfrak{F}_i$, $i\in I\neq\varnothing$. Тогда если каждое мультикольцо из $\bigcup\limits_{i\in I}\mathfrak{X}_i$ обладает главным рядом, то $f=\bigcap\limits_{i\in I}f_i$ является $\left(\bigcap\limits_{i\in I}\mathfrak{X}_i\right)$-экраном формации $\mathfrak{F}=\bigcap\limits_{i\in I}\mathfrak{F}_i$.*

Доказательство. Если $A\in\langle f\rangle$, то всякий f-центральный ряд мультикольца A является f_i-центральным и для всякого $i\in I$. Последнее означает, что $A\in\bigcap\limits_{i\in I}\mathfrak{F}_i=\mathfrak{F}$.

Пусть $A\in\mathfrak{F}$, $i\in I$. Тогда $A\in\mathfrak{X}_i$ и A обладает f_i-центральным рядом

$$\{0\}=A_0\subseteq A_1\subseteq\ldots\subseteq A_t=A. \qquad (1)$$

Отбросив в ряде (1) повторяющиеся члены и затем уплотнив его, получим f_i-центральный главный ряд A. Следовательно, поскольку всякие два проективных фактора A либо оба f_i-центральны в A, либо оба не f_i-центральны в A, то ввиду леммы 2.5 любой главный ряд A f_i-централен. Следовательно, всякий главный ряд мультикольца A оказывается f-центральным в A. Это означает, что $A \in \langle f \rangle$. Таким образом, $\langle f \rangle = \mathfrak{F}$.

Следствие. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ступенчатая в $\mathfrak{X}$ формация, причем всякое $A \in \mathfrak{X}$ обладает главным рядом. Тогда пересечение любого непустого множества $\mathfrak{X}$-экранов формации $\mathfrak{F}$ снова является $\mathfrak{X}$-экраном формации $\mathfrak{F}$.*

2.17. Лемма. *Всякая формация, обладающая нормально наследственным экраном, сама нормально наследственна.*

Доказательство. Пусть f — нормально наследственный $\mathfrak{X}$-экран формации $\mathfrak{F}$, H — идеал мультикольца $A \in \mathfrak{F}$. Пусть

$$\{0\} = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_t = A$$

— f-центральный ряд A. Тогда поскольку формация $f(A_i/A_{i-1})$ нормально наследственна, то

$$H/C_A(A_i/A_{i-1}) \cap H \simeq H + C_A(A_i/A_{i-1})/C_A(A_i/A_{i-1}) \in \\ \in f(A_i/A_{i-1}).$$

Но $C_A(A_i/A_{i-1}) \cap H \subseteq C_H(H \cap A_i/H \cap A_{i-1})$. Значит, $H/C_H(H \cap A_i/H \cap A_{i-1}) \in f(A_i/A_{i-1})$. Заметим, что поскольку $H \cap A_i/H \cap A_{i-1} \simeq (H \cap A_i) + A_{i-1}/A_{i-1}$, то $f(A_i/A_{i-1}) \subseteq \subseteq f(H \cap A_i/H \cap A_{i-1})$. Следовательно, $H/C_H(H \cap A_i/H \cap \cap A_{i-1}) \in f(H \cap A_i/H \cap A_{i-1})$. Таким образом,

$$\{0\} = H \cap A_0 \subseteq H \cap A_1 \subseteq \ldots \subseteq H \cap A_t = H$$

— f-центральный ряд мультикольца H. Значит, $H \in \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Локальные формации. 2.18. $\mathfrak{X}$-экран f назовем *локальным*, если для любого ненулевого неминимального мультикольца $A \in \mathfrak{X}$ выполняется $f(A) = \cap f(H/K)$, где H/K пробегает все нетривиальные факторы из A.

Всякий постоянный экран, очевидно, локален. Таким образом, пустой, нулевой и тривиальный $\mathfrak{X}$-экран — примеры локальных экранов.

Формацию $\mathfrak{F}$ назовем *локальной* в $\mathfrak{X}$, если $\mathfrak{F}$ обладает по крайней мере одним локальным $\mathfrak{X}$-экраном.

2.19. Лемма. *Всякая формация, обладающая наследственным локальным экраном, сама наследственна.*

Эта лемма доказывается так же, как и лемма 2.17.

Отметим, что если всякое мультикольцо из $\mathfrak{X}$ удовлетворяет условиям минимальности и максимальности для подалгебр, то, очевидно, всякий локальный $\mathfrak{X}$-экран определяется своими значениями на минимальных мультикольцах. Поэтому, чтобы построить локальный $\mathfrak{X}$-экран f, достаточно каждому минимальному мультикольцу $A \in \mathfrak{X}$ поставить в соответствие некоторую формацию $f(A) \subseteq \mathfrak{X}$, а затем для любого ненулевого мультикольца $G \in \mathfrak{X}$ положить $f(G) = \cap f(H/K)$, где H/K пробегает минимальные факторы из G.

Дадим теперь рекурсивное определение понятия кратно локальной формации.

Пусть $\mathfrak{X}$ — непустая наследственная формация. Всякую подформацию из $\mathfrak{X}$ назовем *0-кратно локальной*. Формацию $\mathfrak{F}$ назовем *n-кратно локальной* в $\mathfrak{X}$ $(n \geqslant 1)$, если $\mathfrak{F}$ обладает таким локальным $\mathfrak{X}$-экраном, все непустые значения которого — $(n-1)$-кратно локальные в $\mathfrak{X}$ формации. Если же $\mathfrak{F}$ n-кратно локальна в $\mathfrak{X}$ для всех целых неотрицательных n, то $\mathfrak{F}$ будем называть *тотально локальной* в $\mathfrak{X}$ формацией.

Локальный $\mathfrak{X}$-экран f будем называть *n-кратно локальным* (*тотально локальным*), если все его непустые значения — n-кратно локальные (соответственно тотально локальные) в $\mathfrak{X}$ формации.

Из определения $(n+1)$-кратно локальной в $\mathfrak{X}$ формации $\mathfrak{F}$ непосредственно вытекает, что эта формация обладает n-кратно локальным $\mathfrak{X}$-экраном f. Если этот экран таков, что для всякого n-кратно локального $\mathfrak{X}$-экрана h формации $\mathfrak{F}$ имеет место $f \leqslant h$, то f будем называть *минимальным n-кратно локальным $\mathfrak{X}$-экраном* формации $\mathfrak{F}$. Аналогично можно определить понятие минимального тотально локального экрана формации.

Композиционные формации. 2.20. Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольная непустая наследственная формация мультиколец с композиционными рядами. $\mathfrak{X}$-экран f назовем *композиционным*, если для любого ненулевого $G \in \mathfrak{X}$ имеет место $f(G) = \cap f(H/K)$, где H/K пробегает все композиционные факторы мультикольца G.

Формацию $\mathfrak{F}$ назовем *композиционной в* $\mathfrak{X}$, если найдется хотя бы один такой композиционный $\mathfrak{X}$-экран f, что $\mathfrak{F} = \langle f \rangle$.

Примеры. 2.21. Рассмотрим теперь несколько примеров.

Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольная непустая наследственная формация, f — пустой $\mathfrak{X}$-экран, h — тривиальный $\mathfrak{X}$-экран. Тогда, очевидно, $\langle f \rangle = \mathfrak{F}$ — класс всех нулевых мультиколец, а $\langle h\rangle=\mathfrak{X}$. Формации $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ тотально локальны в $\mathfrak{X}$ и h — тотально локальный $\mathfrak{X}$-экран.

2.22. Пусть $\mathfrak{X}$ — класс всех алгебр Ли над полем F, f — нулевой $\mathfrak{X}$-экран. Пусть $\mathfrak{F}=\langle f\rangle$. Легко видеть, что $\mathfrak{F}$ совпадает с классом всех нильпотентных алгебр Ли из $\mathfrak{X}$ (см. [1], [43]). Формация $\mathfrak{F}$ тотально локальна в $\mathfrak{X}$ и ввиду леммы 2.19 наследственна.

2.23. Пусть $\mathfrak{X}$ — класс всех групп, $\mathfrak{F}$ — класс всех абелевых групп. Формация $\mathfrak{F}$ не является локальной в $\mathfrak{X}$. Действительно, предположим, что $\mathfrak{F}=\langle f\rangle$, где f — локальный $\mathfrak{X}$-экран. Тогда если A — группа порядка 2, то $f(A)\neq\varnothing$. Значит, группа кватернионов порядка 8 обладает f-центральным рядом, т. е. она принадлежит $\mathfrak{F}$. Противоречие.

2.24. Пусть $\mathfrak{X}$ — класс всех групп, и пусть для всякой неединичной группы A $f(A)$ — формация всех абелевых групп. Покажем, что $\mathfrak{F}=\langle f\rangle$ совпадает с классом всех тех групп, у которых коммутант нильпотентен. Пусть $A\in\langle f\rangle$ и

$$\{1\}=A_0\subseteq A_1\subseteq\ldots\subseteq A_t=A$$

— f-центральный ряд группы A. Пусть $C_i=C_A(A_i/A_{i-1})$, $D=C_1\cap\ldots\cap C_t$. Тогда A/D — абелева группа. Легко видеть, что $D\subseteq C_A(A_i\cap D/A_{i-1}\cap D)$. Значит, $\{1\}=A_0\cap D\subseteq\subseteq A_1\cap D\subseteq\ldots\subseteq A_t\cap D=D$ — центральный ряд группы D, т. е. эта группа нильпотентна. Таким образом, коммутант группы A нильпотентен.

Обратно, пусть коммутант A' группы A нильпотентен. Так как члены верхнего центрального ряда

$$\{1\}=A_0\subseteq A_1\subseteq\ldots\subseteq A_t=A'$$

группы A' характеристичны в A', то, очевидно,

$$\{1\}=A_0\subseteq A_1\subseteq\ldots\subseteq A_t\subseteq A$$

есть f-центральный ряд группы A.

2.25. Чтобы рассмотреть еще два примера локальных формаций, определим понятия π-нильпотентных и π-разрешимых мультиколец.

Для любого класса мультиколец $\mathfrak{F}$ через $\tau(\mathfrak{F})$ обозначим класс всех минимальных мультиколец, являющихся факторами мультиколец из $\mathfrak{F}$.

Пусть π — произвольная непустая совокупность минимальных мультиколец, N — идеал мультикольца A. Будем говорить, что *идеал* N *π-разрешим* (*π-нильпотентен*) в A, если в A найдутся такие идеалы $\{0\}=N_0\subseteq N_1\subseteq\ldots\subseteq N_t=N$, что для любого $i \in \{1, \ldots, t\}$ с условием $\pi \cap \tau(N_i/N_{i-1}) \neq \varnothing$ справедливо включение $N_i \subseteq C_A(N_i/N_{i-1})$ (соответственно справедливо включение $N \subseteq C_A(N_i/N_{i-1})$). Будем говорить, что *мультикольцо* A *π-разрешимо* (*π-нильпотентно*), если π-разрешимо в A (соответственно π-нильпотентно в A) само A.

В последующих примерах $\mathfrak{X}$ — некоторая непустая наследственная формация мультиколец, удовлетворяющих условиям минимальности и максимальности для подалгебр.

2.26. Пусть π — некоторый абстрактный класс минимальных мультиколец из $\mathfrak{X}$; $\mathfrak{F}$ — класс всех π-разрешимых мультиколец из $\mathfrak{X}$. Ввиду лемм 2.5 и 2.6, $\mathfrak{F}$ — формация. Пусть f — такой локальный $\mathfrak{X}$-экран, что $f(A) = \mathfrak{F}$, если $A \in \pi$, и $f(A) = \mathfrak{X}$ при $A \in \tau(\mathfrak{X}) \diagdown \pi$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \langle f \rangle$. Включение $\mathfrak{F} \subseteq \langle f \rangle$ очевидно. Пусть $A \in \langle f \rangle$. Предположим, что A имеет хотя бы один такой главный фактор H/K, что $\pi \cap \tau(H/K) \neq \varnothing$, и пусть $H_1/K_1, \ldots, H_t/K_t$ — все факторы некоторого главного ряда A, обладающие тем же свойством. Тогда если $D = C_1 \cap \ldots \cap C_t$, где $C_i = C_A(H_i/K_i)$, то A/D — π-разрешимо. Пусть R/K — такой A-главный фактор, что $R \subseteq D$ и $\tau(R/K) \cap \pi \neq \varnothing$. Ввиду леммы 2.5 найдется такое $r \in \{1, \ldots, t\}$, что факторы R/K и H_r/K_r проективны. Тогда по лемме 2.8 $C_r = C_A(R/K)$, т. е. $R \subseteq C_A(R/K)$. Таким образом, идеал D π-разрешим в A. Значит, мультикольцо A π-разрешимо. Итак, $\mathfrak{F} = \langle f \rangle$ — тотально локальная в $\mathfrak{X}$ формация, f — ее тотально локальный $\mathfrak{X}$-экран.

2.27. Пусть π — произвольный непустой абстрактный класс минимальных мультиколец из $\mathfrak{X}$, f — такой локальный экран, что $f(A)$ — формация нулевых мультиколец, если $A \in \pi$, и $f(A) = \mathfrak{X}$ для всех $A \in \tau(\mathfrak{X}) \diagdown \pi$. Покажем, что $\langle f \rangle$ — класс всех π-нильпотентных мультиколец из $\mathfrak{X}$. Пусть $A \in \langle f \rangle$, H/K — главный фактор мультикольца A. Тогда $A/C_A(H/K) \in f(H/K)$. Следовательно, если $\varphi = \tau(H/K) \cap \cap \pi \neq \varnothing$, то $C_A(H/K) = A$. Значит, A π-нильпотентно. С другой стороны, если A — π-нильпотентное мультикольцо из $\mathfrak{X}$, то $A \in \langle f \rangle$. Таким образом, класс всех π-нильпотентных мультиколец из $\mathfrak{X}$ — тотально локальная формация и f — ее тотально локальный $\mathfrak{X}$-экран.

2.28. Будем говорить, что идеал N мультикольца A *разрешим* (*нильпотентен*) в A, если он π-разрешим (соответственно π-нильпотентен) в A и $\tau(N) \subseteq \pi$. Мультикольцо A назовем *разрешимым* (*нильпотентным*), если разрешимо (соответственно нильпотентно) в A само A.

2.29. Пусть $\mathfrak{S}$ — класс всех разрешимых мультиколец, входящих в $\mathfrak{X}$. Ввиду п. 2.26 $\mathfrak{S}$ — тотально локальная в $\mathfrak{X}$ формация и она имеет такой тотально локальный $\mathfrak{X}$-экран f, что $f(A)=\mathfrak{S}$ для любого $A\in\tau(\mathfrak{X})$.

2.30. Пусть $\mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных мультиколец из $\mathfrak{X}$. Ввиду п. 2.27 $\mathfrak{N}=\langle f\rangle$, где f — нулевой $\mathfrak{X}$-экран.

2.31. Для всякой совокупности минимальных мультиколец π и любого класса мультиколец $\mathfrak{H}$ через $\mathfrak{H}_\pi$ будем обозначать совокупность всех таких мультиколец A, что $\tau(A)\subseteq\pi$ и $A\in\mathfrak{H}$.

Пусть π — произвольный непустой абстрактный класс минимальных мультиколец из $\mathfrak{X}$ и f — такой локальный $\mathfrak{X}$-экран, что $f(A)=\mathfrak{X}_\pi$, если $A\in\pi$, и $f(A)=\varnothing$, если $A\in\tau(\mathfrak{X})\diagdown\pi$. Непосредственная проверка показывает, что $\langle f\rangle=\mathfrak{X}_\pi$. Таким образом, $\mathfrak{X}_\pi$ — тотально локальная в $\mathfrak{X}$ формация, f — ее тотально локальный экран.

Так как $\mathfrak{N}_\pi=\mathfrak{X}_\pi\cap\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{S}_\pi=\mathfrak{X}_\pi\cap\mathfrak{S}$, то ввиду леммы 2.16 формации $\mathfrak{N}_\pi$ и $\mathfrak{S}_\pi$ также тотально локальны в $\mathfrak{X}$.

2.32. Пусть теперь $\mathfrak{H}$ — произвольная непустая наследственная формация мультиколец с композиционными рядами. Ненулевое мультикольцо A из $\mathfrak{H}$ назовем *простым*, если оно не имеет идеалов, отличных от $\{0\}$ и A. Пусть π — произвольный непустой абстрактный класс простых мультиколец из $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_{(\pi)}$ — совокупность всех тех мультиколец из $\mathfrak{H}$, чьи композиционные факторы принадлежат π. Обозначим через f такой композиционный $\mathfrak{H}$-экран, что $f(A)=\mathfrak{H}_{(\pi)}$, если $A\in\pi$, и $f(A)=\varnothing$, если A — простое мультикольцо из $(\mathfrak{H})\diagdown\pi$. Покажем, что $\mathfrak{H}_{(\pi)}=\langle f\rangle$. Включение $\mathfrak{H}_{(\pi)}\subseteq\langle f\rangle$ очевидно. Предположим, что обратное включение $\langle f\rangle\subseteq\mathfrak{H}_{(\pi)}$ неверно, и пусть A — мультикольцо из $\langle f\rangle\diagdown\mathfrak{H}_{(\pi)}$ с наименьшей длиной главного ряда. Класс $\mathfrak{H}_{(\pi)}$, очевидно, является формацией. Значит, A имеет лишь один минимальный идеал, который мы обозначим через R. Так как R f-централен в A, то $f(R)\neq\varnothing$. Следовательно, каждый композиционный фактор мультикольца R принадлежит π, т. е. $R\in\mathfrak{H}_{(\pi)}$. С другой стороны, ввиду выбора A имеем $A/R\in\mathfrak{H}_{(\pi)}$. Таким образом, $A\in\mathfrak{H}_{(\pi)}$. Полученное противоречие показывает, что $\langle f\rangle\subseteq\mathfrak{H}_{(\pi)}$. Значит, $\mathfrak{H}_{(\pi)}=\langle f\rangle$ — композиционная в $\mathfrak{H}$ формация.

В заключение этого параграфа отметим, что везде в дальнейшем в случае, когда класс $\mathfrak{X}$ каким-либо образом зафиксирован, $\mathfrak{X}$-экран мы будем называть просто *экраном*, а ступенчатые в $\mathfrak{X}$ формации будем называть *ступенчатыми формациями* и т. д., т. е. в этом случае $\mathfrak{X}$ будет опускаться.

§ 3. Порожденные формации

Общие наблюдения. 3.1. Для произвольной совокупности алгебраических систем $\mathfrak{X}$ символом $\mathrm{H}\mathfrak{X}$ обозначим класс всех гомоморфных образов $\mathfrak{X}$-систем, а символом $\mathrm{R}_0\mathfrak{X}$ — класс всех изоморфных копий конечных поддекартовых произведений $\mathfrak{X}$-систем.

Пусть $\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$ — совокупность всех тех алгебраических систем, которые можно получить из систем класса $\mathfrak{X}$ в результате конечного числа применений операций H и R_0, т. е. $\mathrm{form}\,\mathfrak{X} = \bigcup_i \mathfrak{X}_i$, где $\mathfrak{X}_1 = \mathrm{H}\mathfrak{X} \cup \mathrm{R}_0\mathfrak{X}$ и для всякого натурального $n > 1$ $\mathfrak{X}_n = \mathrm{H}\mathfrak{X}_{n-1} \cup \mathrm{R}_0\mathfrak{X}_{n-1}$. Понятно, что $\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$ — наименьшая (по включению) формация, содержащая класс $\mathfrak{X}$. Такую формацию называют *формацией, порожденной совокупностью алгебраических систем* $\mathfrak{X}$.

Напомним, что класс алгебраических систем $\mathfrak{X}$ называют *абстрактным*, если он со всякой своей системой H содержит и все ее изоморфные образы. В дальнейшем символом $(\mathfrak{X})$ будем обозначать абстрактное замыкание класса $\mathfrak{X}$, т. е. наименьший (по включению) абстрактный класс, включающий в себя совокупность $\mathfrak{X}$.

3.2. Лемма. *Для любой совокупности алгебраических систем $\mathfrak{X}$ имеет место*

$$\mathrm{form}\,\mathfrak{X} = \mathrm{HR}_0(\mathfrak{X}).$$

Доказательство. При $\mathfrak{X} = \varnothing$ утверждение леммы очевидно. Пусть $\mathfrak{X} \neq \varnothing$. Ясно, что $\mathfrak{X} \subseteq \mathrm{HR}_0(\mathfrak{X}) \subseteq \mathrm{form}\,\mathfrak{X}$. Следовательно, для доказательства леммы достаточно установить лишь, что $\mathrm{HR}_0(\mathfrak{X})$ — формация. Понятно, что $\mathrm{HHR}_0(\mathfrak{X}) \subseteq \mathrm{HR}_0(\mathfrak{X})$, т. е. класс $\mathrm{HR}_0(\mathfrak{X})$ замкнут относительно взятия гомоморфных образов. Значит, остается показать, что $\mathrm{R}_0\mathrm{HR}_0(\mathfrak{X}) \subseteq \mathrm{HR}_0(\mathfrak{X})$. Пусть $\mathfrak{M} = \mathrm{R}_0(\mathfrak{X})$, $A \in \mathrm{R}_0\mathrm{H}\mathfrak{M}$. Тогда найдутся такие $\mathrm{H}\mathfrak{M}$-системы $A_1, \ldots, A_n$, что система A является их поддекартовым произведением. С другой стороны, по определению класса $\mathrm{H}\mathfrak{M}$ найдутся такие $\mathfrak{M}$-системы $B_1, \ldots, B_n$, что A_i — гомоморфный образ системы B_i при некотором гомоморфизме φ_i, $i = 1, \ldots, n$. Отображение

$$\varphi\colon (b_1, \ldots, b_n) \mapsto (b_1^{\varphi_1}, \ldots, b_n^{\varphi_n}),$$

где $b_i \in B_i$, задает такой эпиморфизм $B_1 \times \ldots \times B_n \to A_1 \times \ldots \times A_n$, при котором полный прообраз B системы A является поддекартовым произведением систем $B_1, \ldots, B_n$. Значит, $B \in \mathrm{R}_0\mathfrak{M}$ и $A \in \mathrm{HR}_0\mathfrak{M}$. Следовательно,

$A \in \mathrm{HR_0R_0}(\mathfrak{X}) = \mathrm{HR_0}(\mathfrak{X})$. Итак, $\mathrm{R_0HR_0}(\mathfrak{X}) \subseteq \mathrm{HR_0}(\mathfrak{X})$. Лемма доказана.

Формацию $\mathfrak{F}$ назовем *однопорожденной*, если найдется такая алгебраическая система A, что $\mathfrak{F} = \mathrm{form}\{A\}$. При этом мы будем говорить, что система A порождает формацию $\mathfrak{F}$. Вместо записи $\mathrm{form}\{A\}$ будем использовать также более краткую запись $\mathrm{form}\, A$.

Будем говорить, что формация $\mathfrak{M}$ является *максимальной подформацией* формации $\mathfrak{F}$, если $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$ и всегда из включений $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ следует, что $\mathfrak{H} \in \{\mathfrak{M}, \mathfrak{F}\}$.

3.3. Лемма. *Пусть $\mathfrak{F}$ — однопорожденная формация. Тогда всякая собственная (т. е. $\neq \mathfrak{F}$) подформация формации $\mathfrak{F}$ содержится в некоторой максимальной подформации из $\mathfrak{F}$.*

Доказательство. По условию найдется такая алгебраическая система A, что $\mathfrak{F} = \mathrm{form}\, A$. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная собственная подформация формации $\mathfrak{F}$. Множество Λ всех тех собственных подформаций формации $\mathfrak{F}$, которые содержат $\mathfrak{M}$, частично упорядочено отношением включения. Пусть $V = \{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — произвольная цепь из Λ, $\mathfrak{M}_1 = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i$. Тогда $\mathfrak{M}_1$ — формация, содержащая $\mathfrak{M}$. Понятно также, что $A \notin \mathfrak{M}_1$. Значит, $\mathfrak{M}_1 \in \Lambda$. Теперь, ввиду леммы Цорна, заключаем, что $\mathfrak{M}$ входит в некоторую максимальную подформацию из $\mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Фактором произвольной алгебраической системы A (ср. п. 2.4) назовем всякую факторсистему H/π, где H — подсистема в A. Будем говорить, что H/π — *собственный фактор* A, если либо $H \neq A$, либо $\pi \neq \Delta_A$.

Алгебраическую систему A назовем *формационно критической*, если A не принадлежит формации, порожденной всеми теми ее собственными факторами, которые входят в $\mathrm{form}\, A$. Значение понятия формационно критической системы заключено в следующей лемме.

3.4. Лемма. *Всякая непустая конечная формация $\mathfrak{F}$ порождается классом своих формационно критических систем.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X}$ — класс всех формационно критических $\mathfrak{F}$-систем. Предположим, что $\mathfrak{F} \neq \mathrm{form}\, \mathfrak{X}$. Выберем в $\mathfrak{F} \setminus \mathrm{form}\, \mathfrak{X}$ алгебраическую систему A с наименьшим возможным числом элементов. Тогда все собственные факторы этой системы, входящие в $\mathrm{form}\, A$, принадлежат формации $\mathrm{form}\, \mathfrak{X}$, но $A \notin \mathrm{form}\, \mathfrak{X}$. Значит, система A формационно критична, т. е. $A \in \mathfrak{X}$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathrm{form}\, \mathfrak{X}$. Лемма доказана.

Следствие. *Всякая формация с конечным числом неизоморфных формационно критических систем однопорождена.*

Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольный класс алгебраических систем. Обозначим через $\mathrm{D}\mathfrak{X}$ класс всех изоморфных копий конечных (т. е. с конечным числом сомножителей) декартовых произведений $\mathfrak{X}$-систем, а через $\mathrm{S}\mathfrak{X}$ — класс всех подсистем $\mathfrak{X}$-систем.

Пусть $\mathrm{sform}\,\mathfrak{X}$ — совокупность всех тех алгебраических систем, которые можно получить из систем класса $\mathfrak{X}$ в результате конечного числа применений операций S, D и H, т. е. $\mathrm{sform}\,\mathfrak{X} = \bigcup_i \mathfrak{X}_i$, где $\mathfrak{X}_1 = \mathrm{S}\mathfrak{X} \cup \mathrm{H}\mathfrak{X} \cup \mathrm{D}\mathfrak{X}$ и для любого натурального $n > 1$ $\mathfrak{X}_n = \mathrm{S}\mathfrak{X}_{n-1} \cup \mathrm{H}\mathfrak{X}_{n-1} \cup \mathrm{D}\mathfrak{X}_{n-1}$. Класс $\mathrm{sform}\,\mathfrak{X}$ является наименьшей (по включению) наследственной формацией среди наследственных формаций, содержащих $\mathfrak{X}$. Такую формацию называют *наследственной формацией, порожденной совокупностью алгебраических систем* $\mathfrak{X}$.

3.5. Лемма. *Для любой совокупности алгебраических систем $\mathfrak{X}$ имеет место*

$$\mathrm{sform}\,\mathfrak{X} = \mathrm{HSD}(\mathfrak{X}).$$

Если же $\mathfrak{X}$ — класс алгебр, то

$$\mathrm{sform}\,\mathfrak{X} = \mathrm{HR_0S}(\mathfrak{X}).$$

Доказательство. Первое утверждение леммы доказывается точно так же, как и теорема 2 § 13 книги [50]. Установим справедливость второго утверждения. Пусть $\mathfrak{X}_1 = \mathrm{S}(\mathfrak{X})$, $\mathfrak{X}_2 = \mathrm{R_0}\mathfrak{X}_1$ и $A \in \mathfrak{X}_2$. Тогда A — поддекартово произведение некоторых $\mathfrak{X}_1$-алгебр $H_1, \ldots, H_n$. Пусть $H = H_1 \times \ldots \times H_n$ и π_i — проектирование алгебры H на H_i. Обозначим через φ_i ядерную конгруэнцию, отвечающую гомоморфизму π_i. Пусть D — произвольная подалгебра алгебры A и $\psi_i = D^2 \cap \varphi_i$, $i = 1, \ldots, n$. Так как $D/\psi_i \simeq \varphi_i D/\varphi_i$ и $\varphi_i D/\varphi_i$ — подалгебра алгебры, изоморфной H_i, то $D/\psi_i \in \mathfrak{X}_1$. Алгебра $D/\psi_1 \cap \ldots \cap \psi_n$ изоморфна поддекартову произведению алгебр $D/\psi_1, \ldots, D/\psi_n$ (см. § 7 гл. II книги [41]). При этом $\psi_1 \cap \ldots \cap \psi_n$ — нулевая конгруэнция на D. Значит, $D \simeq D/\psi_1 \cap \ldots \cap \psi_n \in \mathrm{R_0}\mathfrak{X}_1$. Таким образом $\mathrm{S}\mathfrak{X}_2 \subseteq \mathfrak{X}_2$. Из последнего легко вытекает, что $\mathrm{SH}\mathfrak{X}_2 \subseteq \mathrm{H}\mathfrak{X}_2$. Следовательно, класс $\mathrm{HR_0S}(\mathfrak{X})$ наследственен. Ввиду леммы 3.2 этот класс является формацией. Итак, $\mathrm{HR_0S}(\mathfrak{X})$ — наследственная формация, содержащая класс $\mathfrak{X}$. Но всякая наследственная формация, содержащая класс $\mathfrak{X}$, включает в себя и класс $\mathrm{HR_0S}(\mathfrak{X})$. Значит, $\mathrm{sform}\,\mathfrak{X} = \mathrm{HR_0S}(\mathfrak{X})$. Лемма доказана.

Следствие. *Если $\mathfrak{X}$ — некоторый наследственный класс алгебр, то*

$$\mathrm{form}\,\mathfrak{X} = \mathrm{sform}\,\mathfrak{X}.$$

3.6. Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольная формация алгебраических систем, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X}$. Через $\Phi_{\mathfrak{X}}\mathfrak{H}$ обозначим класс всех таких $\mathfrak{X}$-систем A, что $A/\varphi \in \mathfrak{H}$ для некоторой фраттиниевой конгруэнции φ алгебраической системы A.

Пусть $\mathrm{form}_{\Phi}(\mathfrak{H}, \mathfrak{X})$ — совокупность всех тех алгебраических систем, которые могут быть получены из систем класса $\mathfrak{H}$ в результате конечного числа применений операций H, R_0 и $\Phi_{\mathfrak{X}}$, т. е. $\mathrm{form}_{\Phi}(\mathfrak{H}, \mathfrak{X}) = \bigcup_i \mathfrak{H}_i$, где $\mathfrak{H}_1 = \mathrm{H}\mathfrak{H} \cup \mathrm{R}_0\mathfrak{H} \cup \Phi_{\mathfrak{X}}\mathfrak{H}$ и для всякого натурального числа $n > 1$ $\mathfrak{H}_n = \mathrm{H}\mathfrak{H}_{n-1} \cup \mathrm{R}_0\mathfrak{H}_{n-1} \cup \Phi_{\mathfrak{X}}\mathfrak{H}_{n-1}$. Очевидно, класс $\mathrm{form}_{\Phi}(\mathfrak{H}, \mathfrak{X})$ — насыщенная в $\mathfrak{X}$ формация, причем эта формация является наименьшей (по включению) среди насыщенных в $\mathfrak{X}$ формаций, содержащих совокупность алгебраических систем $\mathfrak{H}$. Формацию $\mathrm{form}_{\Phi}(\mathfrak{H}, \mathfrak{X})$ назовем *насыщенной в $\mathfrak{X}$ формацией, порожденной классом $\mathfrak{H}$*.

Порожденные подформации мальцевских многообразий. 3.7. Многообразие называется *мальцевским*, если оно состоит из алгебр, в которых все конгруэнции перестановочны. Зафиксируем некоторое мальцевское многообразие $\mathfrak{M}$. Все рассматриваемые в данном пункте алгебры предполагаются входящими в это многообразие. Как известно (см. например, [50], [41]), если $A \in \mathfrak{M}$, то произведение любых двух конгруэнций алгебры A совпадает с конгруэнцией, ими порожденной. Из этого, в частности, вытекает, что решетка конгруэнций алгебры A модулярна (см. [41]). Последнее обстоятельство позволит при рассмотрении алгебр многообразия $\mathfrak{M}$ использовать некоторые известные свойства модулярных решеток. Мы будем в доказательствах опираться на такие свойства, как правило, не оговаривая этого явно. Целью пункта является дальнейшее изучение оператора form.

3.8. Пусть $\lambda\colon \mathfrak{X} \to \mathbb{N}$ — такое отображение класса алгебр $\mathfrak{X}$ в множество натуральных чисел, при котором выполнены следующие условия:

1) если $A \simeq B$, то $\lambda(A) = \lambda(B)$;

2) если $A \in \mathrm{H}(B) \setminus (B)$, то $\lambda(A) < \lambda(B)$.

Пусть $A \in \mathrm{form}\,\mathfrak{X}$. По лемме 3.2 найдутся такие $\mathfrak{X}$-алгебры $A_1, \ldots, A_n$, что

$$A \simeq H/\pi, \qquad H \subseteq D = A_1 \times \ldots \times A_n, \tag{1}$$

где H — поддекартово произведение в D, π — конгруэнция на H. Без потери общности можно считать, что $\lambda(A_1) \geqslant \lambda(A_2) \geqslant \ldots \geqslant \lambda(A_n)$. В общем случае алгебра A может иметь несколько представлений вида (1). Представление вида (1) назовем *λ-минимальным* для A в $\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$, если соответствующая ему строка $(\lambda(A_1), \ldots, \lambda(A_n))$ является лексикографически наименьшей возможной (напомним, что при лексикографическом упорядочении одна строка предшествует другой, если ее член, первый среди отличных от соответствующих членов другой строки, меньше члена другой строки, стоящего на том же месте).

3.9. Ненулевую конгруэнцию π на алгебре A назовем *минимальной*, если всегда из включения $\varphi \subseteq \pi$, где $\varphi \neq \Delta$, следует, что $\varphi = \pi$. Если алгебра A обладает минимальными конгруэнциями, то конгруэнцию, порожденную всеми такими ее конгруэнциями, назовем *цокольной* и обозначим через $\mathrm{soc}(A)$.

Неодноэлементную алгебру A назовем *монолитической*, если пересечение всех ее ненулевых конгруэнций — ненулевая конгруэнция.

3.10. Лемма. *Пусть* $\pi_1, \psi_1, \ldots, \pi_r, \psi_r, \pi_{r+1}, \ldots, \pi_t$ — *конгруэнции на алгебре* A $(t \geqslant 2,\ r \leqslant t)$, *причем выполняются следующие условия*: 1) $\pi_1 \cap \ldots \cap \pi_t = \Delta$; 2) *если* $i \in \{1, \ldots, r\}$, *то факторалгебра* A/π_i *монолитична и* ψ_i/π_i — *ее цокольная конгруэнция. Тогда если при всяком* $i \in \{1, \ldots, r\}$ *имеет место* $\psi_i \cap \alpha_i \neq \Delta$, *где* $\alpha_i = \pi_1 \cap \ldots \cap \pi_{i-1} \cap \pi_{i+1} \cap \ldots \cap \pi_t$, *то*

$$(\alpha_1 \cap \psi_1) \ldots (\alpha_r \cap \psi_r) = \psi_1 \cap \ldots \cap \psi_r \cap \pi_{r+1} \cap \ldots \cap \pi_t.$$

Доказательство. Пусть $i \in \{1, \ldots, r\}$. Тогда поскольку $\psi_i \cap \alpha_i \neq \Delta$ и $\pi_i \cap \alpha_i = \Delta$, то $\psi_i \cap \alpha_i \not\subseteq \pi_i$. Но $(\psi_i \cap \alpha_i)\pi_i/\pi_i \subseteq \psi_i/\pi_i$. Значит, $(\psi_i \cap \alpha_i)\pi_i = \psi_i$. Таким образом,

$$\begin{aligned}
&(\alpha_1 \cap \psi_1) \ldots (\alpha_r \cap \psi_r) = \\
&= (\pi_2 \cap \ldots \cap \pi_t \cap \psi_1)(\alpha_2 \cap \psi_2) \ldots (\alpha_r \cap \psi_r) = \\
&= ((\alpha_2 \cap \psi_2)\pi_2 \cap \pi_3 \cap \ldots \cap \pi_t \cap \psi_1)(\alpha_3 \cap \psi_3) \ldots (\alpha_r \cap \psi_r) = \\
&= (\pi_3 \cap \ldots \cap \pi_t \cap \psi_1 \cap \psi_2)(\alpha_3 \cap \psi_3) \ldots (\alpha_r \cap \psi_r) = \\
&= ((\alpha_3 \cap \psi_3)\pi_3 \cap \pi_4 \cap \ldots \cap \pi_t \cap \psi_1 \cap \psi_2)(\alpha_4 \cap \psi_4) \ldots (\alpha_r \cap \psi_r) = \\
&= \ldots = \pi_{r+1} \cap \ldots \cap \pi_t \cap \psi_1 \cap \ldots \cap \psi_r.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

3.11. Теорема. *Пусть* $\mathfrak{X}$ — *такая полуформация, что существует отображение* λ: $\mathfrak{X} \to \mathbb{N}$, *удовлетворяющее ус-*

ловиям 1), 2) *определения* 3.8. *Тогда если* $A \notin \mathfrak{X}$ *и*

$$A \simeq H/\pi, \quad H \subseteq D = A_1 \times \ldots \times A_n, \qquad (1)$$

— λ-минимальное представление для A *в* $\operatorname{form}\mathfrak{X}$, *то алгебра* H *обладает такими конгруэнциями* $\psi, \pi_1, \ldots, \pi_n, \psi_1, \ldots, \psi_n$ $(n \geqslant 2)$, *что справедливы следующие утверждения:* 1) ψ/π *— цокольная конгруэнция* H/π; 2) $\pi_1 \cap \ldots \cap \pi_n = \Delta$; 3) H/π_i *— монолитическая* $\mathfrak{X}$*-алгебра с цокольной конгруэнцией* ψ_i/π_i; 4) $\alpha_i = \pi_1 \cap \ldots \cap \pi_{i-1} \cap \psi_i \cap \pi_{i+1} \cap \cap \ldots \cap \pi_n$ *— минимальная конгруэнция* H, *причем* $\alpha_i \not\subseteq \pi$ *и* $\alpha_i \pi_i = \psi_i$; 5) $\psi_1 \cap \ldots \cap \psi_n \subseteq \psi$.

Доказательство. Пусть π_i — ядерная конгруэнция, соответствующая проектированию $H \to A_i$. Тогда, очевидно, $\pi_1 \cap \ldots \cap \pi_n = \Delta$ и $n \geqslant 2$. Предположим, что для некоторого $i \in \{1, \ldots, n\}$ алгебра A_i не монолитична. Тогда A_i обладает двумя такими нетривиальными конгруэнциями π и φ, что $\pi \cap \varphi = \Delta$. Следовательно, A_i изоморфна поддекартову произведению факторалгебр A_i/π и A_i/φ, а H изоморфна поддекартову произведению алгебр $A_1, \ldots, A_{i-1}, A_i/\pi, A_i/\varphi, A_{i+1}, \ldots, A_n$. Поскольку $\lambda(A_i/\pi) < \lambda(A_i)$ и $\lambda(A_i/\varphi) < \lambda(A_i)$, то последнее противоречит минимальности представления (1). Значит, для всякого $i \in \{1, \ldots, n\}$ факторалгебра H/π_i монолитична.

Пусть ψ_i — такая конгруэнция на алгебре H, что ψ_i/π_i — цокольная конгруэнция на H/π_i. Если

$$\alpha_i = \pi_1 \cap \ldots \cap \pi_{i-1} \cap \psi_i \cap \pi_{i+1} \cap \ldots \cap \pi_n = \Delta,$$

то H изоморфна поддекартовому произведению алгебр $A_1, \ldots, A_{i-1}, H/\psi_i, A_{i+1}, \ldots, A_n$. Но $\lambda(H/\psi_i) < \lambda(A_i)$, и мы приходим к противоречию с определением представления (1). Следовательно, $\alpha_i \neq \Delta$. Понятно, что $\alpha_i \cap \pi_i = \Delta$ и что $\alpha_i\pi_i/\pi_i$ — ненулевая конгруэнция на факторалгебре H/π_i, входящая в ψ_i/π_i. Значит, поскольку ψ_i/π_i — минимальная конгруэнция на H/π_i, то $\psi_i/\pi_i = \alpha_i\pi_i/\pi_i$. Поэтому $\psi_i = \alpha_i\pi_i$ и α_i — минимальная конгруэнция на алгебре H. Предположим, что для некоторого $i \in \{1, \ldots, n\}$ имеет место $\alpha_i \subseteq \pi$. Поскольку

$$\pi_1/\alpha_i \cap \ldots \cap \pi_{i-1}/\alpha_i \cap \psi_i/\alpha_i \cap \pi_{i+1}/\alpha_i \cap \ldots \cap \pi_n/\alpha_i = \\ = \pi_1 \cap \ldots \cap \pi_{i-1} \cap \psi_i \cap \pi_{i+1} \cap \ldots \cap \pi_n/\alpha_i$$

— нулевая конгруэнция факторалгебры H/α_i, то H/α_i изоморфна поддекартову произведению алгебр $(H/\alpha_i)/(\pi_1/\alpha_i), \ldots, (H/\alpha_i)/(\pi_{i-1}/\alpha_i), (H/\alpha_i)/(\psi_i/\alpha_i), (H/\alpha_i)/(\pi_{i+1}/\alpha_i), \ldots, (H/\alpha_i)/(\pi_n/\alpha_i)$. При этом

$$A \simeq H/\pi \simeq (H/\alpha_i)/(\pi/\alpha_i),$$

и мы снова приходим к противоречию с условием **теоремы.** Итак, для всякого $i \in \{1, \ldots, n\}$ справедливо, что $\alpha_i \not\subseteq \pi$. Но α_i—минимальная конгруэнция на алгебре H. Значит, $\pi \cap \alpha_i = \Delta$, и поэтому $\pi\alpha_i/\pi$—минимальная конгруэнция на факторалгебре H/π.

Пусть теперь ψ—такая конгруэнция на алгебре H, что ψ/π—цокольная конгруэнция на факторалгебре H/π. Тогда $\pi\alpha_i/\pi \subseteq \psi/\pi$, и поэтому $\alpha_i \subseteq \psi$. Следовательно, ввиду леммы 3.10 имеем $\psi_1 \cap \ldots \cap \psi_n = \alpha_1 \ldots \alpha_n \subseteq \psi$. Теорема доказана.

Будем говорить, что *алгебра A удовлетворяет условию минимальности (максимальности) для конгруэнций*, если всякая строго убывающая (соответственно возрастающая) цепь конгруэнций на алгебре A обрывается после конечного числа шагов.

3.12. Лемма. *Класс $\mathfrak{F}$ всех алгебр с условием минимальности (максимальности) для конгруэнций является формацией.*

Доказательство. Понятно, что если алгебра A удовлетворяет условию минимальности (максимальности) для конгруэнций, то этим же свойством обладает и всякая ее факторалгебра. Значит, класс $\mathfrak{F}$—полуформация.

Пусть алгебра A имеет такие конгруэнции π_1 и π_2, что $\pi_1 \cap \pi_2 = \Delta$ и A/π_i—алгебра с условием минимальности для конгруэнций, $i = 1, 2$. Предположим, что A обладает бесконечной строго убывающей цепью конгруэнций

$$\varphi_1 \supset \varphi_2 \supset \ldots \supset \varphi_n \supset \ldots \tag{1}$$

Пусть I_1—множество таких индексов i цепи (1), что $\varphi_i\pi_1 = \varphi_{i+1}\pi_1$, $I_2 = \mathbb{N} \setminus I_1$. Предположим, что I_1—бесконечное множество. Заметим, что если $\varphi_i\pi_1 = \varphi_{i+1}\pi_1$, то $\varphi_i = \varphi_i \cap \varphi_{i+1}\pi_1 = \varphi_{i+1}(\varphi_i \cap \pi_1)$. Значит, $\varphi_{i+1} \cap \pi_1 \neq \varphi_i \cap \pi_1$. Следовательно, $(\varphi_{i+1} \cap \pi_1)\pi_2 \neq (\varphi_i \cap \pi_1)\pi_2$. Таким образом, в рассматриваемом случае факторалгебра A/π_2 обладает бесконечной строго убывающей цепью конгруэнций

$$(\varphi_{i_1} \cap \pi_1)\pi_2/\pi_2 \supset (\varphi_{i_2} \cap \pi_1)\pi_2/\pi_2 \supset \ldots$$
$$(i_1, i_2, \ldots \in I_1).$$

Полученное противоречие показывает, что I_1—конечное множество. Значит, бесконечно множество I_2. Но тогда факторалгебра A/π_1 обладает бесконечной строго убывающей цепью конгруэнций

$$\pi_1\varphi_{i_1}/\pi_1 \supset \pi_1\varphi_{i_2}/\pi_1 \supset \ldots \qquad (i_1, i_2, \ldots \in I_2).$$

Снова приходим к противоречию. Итак, остается заключить, что A удовлетворяет условию минимальности для конгруэнций. Аналогично убеждаемся, что A удовлетворяет условию максимальности для конгруэнций, если этому условию удовлетворяют обе факторалгебры A/π_1 и A/π_2. Значит, $R_0\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$, т. е. класс $\mathfrak{F}$ — формация. Лемма доказана.

Следствие. *Если всякая алгебра из $\mathfrak{X}$ удовлетворяет условию минимальности (максимальности) для конгруэнций, то тем же свойством обладает и всякая алгебра из* $\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$.

Конгруэнцию π на алгебре A назовем *вполне разложимой*, если для всякой ее конгруэнции φ такой, что $\varphi \subseteq \pi$, на A найдется конгруэнция ψ, удовлетворяющая условиям: 1) $\varphi\psi = \pi$; 2) $\varphi \cap \psi = \Delta$.

3.13. Лемма. *Пусть π — вполне разложимая конгруэнция алгебры A и φ — такая конгруэнция A, что $\varphi \subseteq \pi$. Тогда φ также вполне разложима.*

Доказательство. Пусть ψ — такая конгруэнция на алгебре A, что $\psi \subseteq \varphi$. По условию A обладает конгруэнцией α, удовлетворяющей условиям: 1) $\psi \cap \alpha = \Delta$; 2) $\psi\alpha = \pi$. Следовательно, ввиду равенств

$$(\varphi \cap \alpha)\psi = \alpha\psi \cap \varphi = \varphi \cap \pi = \varphi$$

и

$$(\varphi \cap \alpha) \cap \psi = \varphi \cap (\alpha \cap \psi) = \varphi \cap \Delta = \Delta$$

конгруэнция φ вполне разложима. Лемма доказана.

3.14. Лемма. *Ненулевая конгруэнция π алгебры A тогда и только тогда вполне разложима, когда она порождается некоторым множеством минимальных конгруэнций алгебры A.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $\varphi \subseteq \pi$, где φ — конгруэнция на алгебре A. Обозначим через Λ множество всех таких конгруэнций α на алгебре A, что $\alpha \subseteq \pi$ и $\alpha \cap \varphi = \Delta$. Пусть $\{\alpha_i \in \Lambda \mid i \in I\}$ есть цепь, т. е. $\alpha_i \subseteq \alpha_j$, либо $\alpha_j \subseteq \alpha_i$ для любых $i, j \in I$. Пусть α — объединение этой цепи. Понятно, что α — конгруэнция на алгебре A, $\alpha \subseteq \pi$ и $\alpha \cap \varphi = \Delta$. Следовательно, ввиду леммы Цорна Λ имеет максимальный элемент ψ. Предположим, что $\varphi\psi \neq \pi$. Тогда A обладает такой минимальной конгруэнцией β, что $\beta \subseteq \pi$ и $\varphi\psi \cap \beta = \Delta$. Пусть $(a, b) \in \psi\beta \cap \varphi$. В A найдется элемент c такой, что $(a, c) \in \psi$ и $(c, b) \in \beta$. Так как при этом $(a, b) \in \varphi$ и $(c, a) \in \psi$, то $(c, b) \in \varphi\psi \cap \beta$. Значит, $c = b$. Поэтому $(a, b) \in \varphi \cap \psi = \Delta$. Таким образом, $a = b$. Это влечет $\psi\beta \cap \varphi = \Delta$. Но β не входит в ψ. Следовательно, $\psi \subset \psi\alpha = \pi$, что противоречит определению конгруэнции ψ. Остается заключить, что $\varphi\psi=\pi$.

Необходимость. Покажем, что если φ — произвольная ненулевая конгруэнция на алгебре A, входящая в π, то φ содержит минимальную конгруэнцию на A. Зафиксируем некоторый элемент $(a, b)\in\varphi\setminus\Delta$ и рассмотрим множество Λ всех таких конгруэнций α алгебры A, которые входят в φ, но не содержат элемент (a, b). Ввиду леммы Цорна Λ имеет максимальный элемент γ. По лемме 3.13 алгебра A обладает такой конгруэнцией γ_1, что $\varphi=\gamma\gamma_1$ и $\gamma\cap\gamma_1=\Delta$. Так как $\gamma\neq\varphi$, то $\gamma_1\neq\Delta$. Покажем, что γ_1 — минимальная конгруэнция алгебры A. Предположим, что это не так. Тогда на A может быть задана такая ненулевая конгруэнция γ_2, что $\gamma_2\subset\gamma_1$. Ввиду леммы 3.13 можно указать такую конгруэнцию γ_3 на алгебре A, что $\gamma_1=\gamma_2\gamma_3$ и $\gamma_2\cap\gamma_3=\Delta$. Допустим, что $(a, b)\in\gamma\gamma_2\cap\gamma\gamma_3$. Тогда в A найдутся такие элементы d_2, d_3, что $(a, d_2)\in\gamma$, $(d_2, b)\in\gamma_2$, $(a, d_3)\in\gamma$ и $(d_3, b)\in\gamma_3$. Следовательно, $(d_2, d_3)\in\gamma\cap\gamma_2\gamma_3=\Delta$, т. е. $d_2=d_3$. Значит, $b=d_2$, и поэтому $(a, b)\in\gamma$. Противоречие. Таким образом, $(a, b)\notin\gamma\gamma_2\cap\gamma\gamma_3$. Так как при этом имеют место включения $\gamma\subset\gamma\gamma_2\subseteq\varphi$ и $\gamma\subset\gamma\gamma_3\subseteq\varphi$, то последнее приводит к противоречию с определением конгруэнции γ. Значит, остается заключить, что γ_1 — минимальная конгруэнция на алгебре A.

Пусть теперь ψ — конгруэнция на A, порожденная всеми ее минимальными конгруэнциями, входящими в π. Предположим, что $\pi\neq\psi$. По условию A обладает такой конгруэнцией φ, что $\pi=\psi\varphi$ и $\psi\cap\varphi=\Delta$. Понятно, что $\varphi\neq\Delta$, и поэтому, ввиду доказанного выше, некоторая минимальная конгруэнция α алгебры A входит в φ. Но в то же время $\alpha\subseteq\psi$, т. е. $\psi\cap\varphi\neq\Delta$. Полученное противоречие показывает, что $\psi=\pi$. Лемма доказана.

3.15. Неодноэлементную алгебру H назовем *простой*, если она не имеет конгруэнций, отличных от тривиальных.

3.16. Лемма. *Пусть H — поддекартово произведение простых алгебр $A_1, \ldots, A_t$. Тогда найдутся такие алгебры $B_1, \ldots, B_r$ $(r\leqslant t)$, что $H=B_1\times\ldots\times B_r$ и для любого $i\in\{1, \ldots, r\}$ алгебра B_i изоморфна одной из алгебр $A_1, \ldots, A_t$.*

Доказательство. Пусть π_i — ядерная конгруэнция, отвечающая проектированию $H\to A_i$. Если $\{\pi_1, \ldots, \pi_t\}=\{\Delta\}$, то $H\simeq A_1$, и лемма верна. В противном случае найдутся такие различные $i_1, \ldots, i_r\in\{1, \ldots, t\}$, что $\pi_{i_1}\cap\ldots\cap\pi_{i_r}=\Delta$ и $\pi=\pi_{i_1}\cap\ldots\cap\pi_{i_{r-1}}\neq\Delta$. В силу индукции лемма верна для H/π. Но $\pi\cap\pi_{i_r}=\Delta$ и ввиду простоты факторалгебры H/π_{i_r} имеет место $\pi\pi_{i_r} = H \times H$. Значит, $H \simeq H/\pi_{i_r} \times H/\pi$. Следовательно, лемма верна и для H. Лемма доказана.

3.17. Лемма. *Если алгебра A удовлетворяет условию минимальности для конгруэнций, то* $\operatorname{soc}(A)$ — *произведение конечного числа минимальных конгруэнций алгебры A.*

Доказательство. Пусть π_1 — минимальная конгруэнция на алгебре A. Если $\pi_1 \neq \operatorname{soc}(A)$, то по лемме 3.14 алгебра A обладает такой конгруэнцией φ_1, что $\operatorname{soc}(A) = \pi_1\varphi_1$. Пусть π_2 — минимальная конгруэнция алгебры A, входящая в φ_1. Если $\pi_2 \neq \varphi_1$, то ввиду леммы 3.14 можно указать такую конгруэнцию φ_2 алгебры A, что $\varphi_1 = \pi_2\varphi_2$, $\pi_2 \cap \varphi_2 = \Delta$ и т. д. Так как возникающая при этом цепь $\varphi_1 \supset \varphi_2 \supset \ldots$ является строго убывающей, то ввиду условия леммы найдется такое натуральное n, что $\pi_{n+1} = \varphi_n$ — минимальная конгруэнция алгебры A и $\operatorname{soc}(A) = \pi_1 \ldots \pi_{n+1}$. Лемма доказана.

3.18. Лемма. *Пусть $A = A_1 \times \ldots \times A_t$, где для любого $i \in \{1, \ldots, t\}$ алгебра A_i проста. Тогда* $\operatorname{soc}(A) = A \times A$.

Доказательство. Проведем индукцию по t. При $t = 1$ лемма верна. Пусть $t \geqslant 2$. Обозначим через q_i ядерную конгруэнцию, отвечающую проектированию $A \to A_i$, а через π_i — конгруэнцию $q_1 \cap \ldots \cap q_{i-1} \cap q_{i+1} \cap \ldots \cap q_t$. Пусть π — произвольная конгруэнция на алгебре A. Так как $q_1 \cap \ldots \cap q_t = \Delta$, то найдется такое $i \in \{1, \ldots, t\}$, что $\pi \not\subseteq q_i$. Поскольку факторалгебра $A/q_i \simeq A_i$ проста, то $\pi q_i/q_i = A/q_i \times A/q_i$. Значит, $\pi q_i = A \times A$. Пусть $q = \pi \cap q_i$. Ввиду леммы 3.16 факторалгебра A/π_i является прямым произведением не более чем $t-1$ простых сомножителей. Значит, по индукции $\operatorname{soc}(A/\pi_i) = A/\pi_i \times A/\pi_i$. Привлекая теперь лемму 3.14, заключаем, что алгебра A обладает такой конгруэнцией ψ, что $\pi_i \subseteq \psi$, $\psi q = A \times A$ и $\psi \cap q\pi_i = \pi_i$. Пусть $\psi_1 = \psi \cap q_i$. Тогда $\psi_1 \cap \pi \subseteq \pi_i \cap q_i = \Delta$. С другой стороны,

$$\psi_1\pi = (\psi \cap q_i)\pi = (\psi \cap q_i) q\pi = (\psi q \cap q_i)\pi = q_i\pi = A \times A.$$

Таким образом, конгруэнция $A \times A$ вполне разложима. Значит, по лемме 3.14 $\operatorname{soc}(A) = A \times A$. Лемма доказана.

3.19. Ряд конгруэнций

$$\Delta = \pi_0 \subset \pi_1 \subset \ldots \subset \pi_t = A \times A \tag{1}$$

на алгебре A будем называть *главным*, если для любого $i \in \{1, \ldots, t\}$ конгруэнция π_i/π_{i-1} является минимальной на A/π_{i-1}. При этом число t назовем *длиной* ряда (1).

3.20. Ряд конгруэнций

$$\Delta = \pi_0 \subset \pi_1 \subset \ldots \subset \pi_t = A \times A \tag{2}$$

на алгебре A назовем *цокольным*, если для любого $i\in\{1, \ldots, t\}$ конгруэнция π_i/π_{i-1} является цокольной на A/π_{i-1}. При этом число t будем называть цокольной длиной алгебры A и обозначим его через $l_s(A)$. Условимся также считать, что цокольная длина одноэлементных алгебр равна нулю.

3.21. Теорема. *Пусть n — некоторое целое неотрицательное число. Класс $\mathfrak{F}$ всех тех алгебр с условием минимальности для конгруэнций, цокольная длина которых не превосходит n, является формацией.*

Доказательство. Покажем прежде, что всякая алгебра A из $\mathfrak{F}$ обладает главным рядом конгруэнций. Пусть π и ψ — конгруэнции на алгебре A, причем $\pi\subset\psi$ и $\psi/\pi=\mathrm{soc}(A/\pi)$. Ввиду условия минимальности найдется такой наименьший (по числу элементов) набор минимальных конгруэнций $\psi_1/\pi, \ldots, \psi_t/\pi$ на A/π, что $\psi_1/\pi\ldots\psi_t/\pi=\psi/\pi$. Легко видеть, что для любого $i\in\{1, \ldots, t\}$ конгруэнция $(\psi_1/\pi\ldots\psi_i/\pi)/(\psi_1/\pi\ldots\psi_{i-1}/\pi)$ является минимальной на $(A/\pi)/(\psi_1/\pi\ldots\psi_{i-1}/\pi)$. Значит, минимальной на $A/\psi_1\ldots\psi_{i-1}$ является конгруэнция $\psi_1\ldots\psi_i/\psi_1\ldots\psi_{i-1}$. Таким образом, цокольный ряд конгруэнций на алгебре A может быть уплотнен до главного ряда конгруэнций на A.

Покажем, что $\mathfrak{F}$ — полуформация. Для этого ввиду предыдущего абзаца достаточно установить, что если алгебра A обладает главным рядом конгруэнций и φ — произвольная ее конгруэнция, то $l_s(A/\varphi)\leqslant l_s(A)$. Это утверждение мы докажем индукцией по длине главного ряда конгруэнций. Если $\varphi=\Delta$, то утверждение справедливо. Пусть $\varphi\neq\Delta$ и π — минимальная конгруэнция на алгебре A, входящая в φ. Тогда по индукции $l_s((A/\pi)/(\varphi/\pi))=l_s(A/\varphi)\leqslant\leqslant l_s(A/\pi)$. Следовательно, остается показать, что $l_s(A/\pi)\leqslant\leqslant l_s(A)$. Легко видеть, что $\mathrm{soc}(A)/\pi\subseteq\mathrm{soc}(A/\pi)$, и поэтому, снова привлекая индукцию, заключаем, что

$$l_s((A/\pi)/\mathrm{soc}(A/\pi))\leqslant l_s((A/\pi)/(\mathrm{soc}(A)/\pi))=l_s(A/\mathrm{soc}(A)).$$

Но последнее и означает, что $l_s(A/\pi)\leqslant l_s(A)$. Итак, $\mathfrak{F}$ — полуформация.

Покажем теперь индукцией по n, что $\mathfrak{F}$ — формация. При $n=1$ это справедливо ввиду лемм 3.16 и 3.18 и доказанного выше. Пусть теорема верна при всех натуральных $k<n$. Предположим, что $\mathfrak{X}=\mathrm{form}\,\mathfrak{F}\diagdown\mathfrak{F}\neq\varnothing$, и пусть $A\in\mathfrak{X}$. Сопоставим всякой алгебре $A\in\mathfrak{F}$ число $\lambda(A)$, равное длине ее главного ряда конгруэнций, и пусть

$$A\simeq H/\pi,\quad H\subseteq A_1\times\ldots\times A_n,$$

— λ-минимальное представление для алгебры A в $\operatorname{form}\mathfrak{F}$. Тогда по теореме 3.11 алгебра H обладает такой системой конгруэнций ψ, π_1, ψ_1, ..., π_t, ψ_t ($t \geqslant 2$), что выполняются следующие условия: 1) $\psi_1 \cap \ldots \cap \psi_t \subseteq \psi$; 2) ψ/π — цокольная конгруэнция на факторалгебре H/π; 3) ψ_i/π_i — цокольная конгруэнция на факторалгебре $H/\pi_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, \ldots, t$. Условие 1) означает, что $H/\psi \in \operatorname{form}\{H/\psi_1, \ldots, H/\psi_t\}$. Из 3) следует, что цокольная длина всякой алгебры из $\{H/\psi_1, \ldots, H/\psi_t\}$ не превосходит $n-1$. Значит, по индукции $l_s(H/\psi) \leqslant n-1$. Но

$$H/\psi \simeq (H/\pi)/(\psi/\pi) \simeq A/\operatorname{soc}(A).$$

Следовательно, $l_s(A/\operatorname{soc}(A)) \leqslant n-1$, и поэтому $A \in \mathfrak{F}$. Полученное противоречие показывает, что $\operatorname{form}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. Теорема доказана.

3.22. Следствие. *Пусть каждая алгебра из класса $\mathfrak{X}$ удовлетворяет условию минимальности для конгруэнций. Тогда если цокольная длина любой $\mathfrak{X}$-алгебры не превосходит n, то цокольная длина и любой алгебры из* $\operatorname{form}\mathfrak{X}$ *не превосходит n.*

3.23. Следствие. *Пусть алгебра A обладает главным рядом конгруэнций. Тогда* $A \notin \operatorname{form}(A/\operatorname{soc}(A))$.

Формации, порожденные мультикольцами. 3.24. Прежде чем продолжить изучение порожденных формаций в классе мультиколец, мы установим некоторую новую информацию о самих мультикольцах. Напомним, что сигнатурой рассматриваемых нами мультиколец является множество $\{+, -, 0\} \cup \Omega$.

3.25. Пусть S/T — нормальный фактор мультикольца A, C — такой идеал A, что $C \subseteq C_A(S/T)$. Обозначим через $S/T \leftthreetimes A/C$ множество $\{(s+T,\ a+C) \mid s \in S,\ a \in A\}$. На этом множестве определим операцию $+$ следующим образом:

$$(s_1+T,\ a_1+C)+(s_2+T,\ a_2+C) = \\ = (s_1+a_1+s_2-a_1+T,\ a_1+a_2+C).$$

Легко проверить, что множество $S/T \leftthreetimes A/C$ с введенной операцией $+$ является группой. Для всякой n-арной операции $f \in \Omega$ положим

$$f((s_1+T,\ a_1+C),\ \ldots,\ (s_n+T,\ a_n+C)) = \\ = (f(s_1+a_1,\ \ldots,\ s_n+a_n) - f(a_1,\ \ldots,\ a_n) + \\ + T,\ f(a_1,\ \ldots,\ a_n)+C).$$

Несложная проверка показывает, что $S/T \leftthreetimes A/C$ с определенными выше операциями является мультикольцом. Легко показать, что $\{(s+T,\ C) \mid s \in S\}$ — идеал в $S/T \leftthreetimes A/C$, изоморфный S/T, а $\{(T,\ a+C)\,|\,a\in A\}$ — подалгебра, изоморфная A/C. Отождествляя S/T и A/C с соответствующими подалгебрами в $S/T\leftthreetimes A/C$, видим, что $S/T\cap A/C=\{0\}$ и $S/T\leftthreetimes A/C=S/T+A/C$. Обобщая возникшую ситуацию, будем писать, что $D=A\leftthreetimes B$, если A — идеал D, B — подалгебра, $D=A+B$ и $A\cap B=\{0\}$.

3.26. Пусть $D=M\leftthreetimes A$, $R=N\leftthreetimes B$. Будем говорить, что пары $(M,\ A)$ и $(N,\ B)$ *эквивалентны*, если существуют такие изоморфизмы μ: $M\to N$ и α: $A\to B$, что выполняются следующие условия:

1) для любых $m\in M$, $a\in A$ имеет место

$$(a+m-a)^{\mu}=a^{\alpha}+m^{\mu}-a^{\alpha};$$

2) для всякой операции $f\in\Omega$, любых $m_1,\ \ldots,\ m_t\in M$, $a_1^1,\ \ldots,\ a_{i(1)}^1,\ \ldots,\ a_1^{t+1},\ \ldots,\ a_{i(t+1)}^{t+1}\in A$ имеет место

$$f(a_1^1,\ \ldots,\ a_{i(1)}^1,\ m_1,\ \ldots,\ a_1^t,\ \ldots,\ a_{i(t)}^t,\ m_t,\ a_1^{t+1},\ \ldots,\ a_{i(t+1)}^{t+1})^{\mu}=$$
$$=f((a_1^1)^{\alpha},\ \ldots,\ (a_{i(1)}^1)^{\alpha},\ m_1^{\mu},\ \ldots,\ (a_1^t)^{\alpha},\ \ldots$$
$$\ldots,\ (a_{i(t)}^t)^{\alpha},\ m_t^{\mu},\ (a_1^{t+1})^{\alpha},\ \ldots,\ (a_{i(t+1)}^{t+1})^{\alpha}).$$

3.27. Лемма. *Пусть $D=M\leftthreetimes A$, $R=N\leftthreetimes B$ и пары $(M,\ A)$, $(N,\ B)$ эквивалентны. Тогда $D\simeq R$.*

Доказательство. Для всяких $m\in M$, $a\in A$ положим $(m+a)^{\varphi}=m^{\mu}+a^{\alpha}$. Тогда ввиду 1) равенство $(d_1+d_2)^{\varphi}=d_1^{\varphi}+d_2^{\varphi}$ выполняется для всех $d_1,\ d_2\in D$. Пусть f — n-арная операция из Ω, $d_i=m_i+a_i$, где $m_i\in M$, $a_i\in A$, $i=1,\ \ldots,\ n$. Используя условие 2), легко убедиться, что

$$f(d_1,\ \ldots,\ d_n)^{\varphi}=f(m_1^{\mu}+a_1^{\alpha},\ \ldots,\ m_n^{\mu}+a_n^{\alpha})=f(d_1^{\varphi},\ \ldots,\ d_n^{\varphi}).$$

Лемма доказана.

3.28. Лемма. *Пусть H и K — идеалы мультикольца A, $C=C_A(H+K/K)=C_A(H/H\cap K)$. Тогда пары $(H+K/K,\ A/C)$ и $(H/H\cap K,\ A/C)$ эквивалентны.*

Доказательства. Пусть μ: $h+K\to h+H\cap K$, $h\in H$, и α — тождественная перестановка на A/C. Легко проверить, что μ и α удовлетворяют условиям 1), 2) определения 3.26.

Нормальный фактор H/K мультикольца A назовем *A-абелевым*, если $H\subseteq C_A(H/K)$. Идеал N мультикольца A назовем *A-абелевым*, если A-абелев фактор $N/\{0\}$. Мультикольцо A назовем *абелевым*, если A-абелево само A.

Пусть H — произвольная подалгебра мультикольца A. Легко убедиться, что A обладает таким идеалом, который входит в H и который, в свою очередь, включает в себя всякий идеал A, входящий в H. Для обозначения такого идеала мы будем применять символ H_A.

3.29. Лемма. *Пусть M — собственная подалгебра мультикольца A, H/K — его A-абелев главный фактор. Тогда если $K \subseteq M$ и $H+M=A$, то $A/M_A \simeq H/K \leftthreetimes A/C_A(H/K)$.*

Доказательство. Пусть $C=C_A(H/K)$. Легко видеть, что $C \cap M = M_A$. Следовательно, поскольку $C = C \cap (H+M) = H + (C \cap M)$, то $C = H + M_A$. Значит, $A/M_A = C/M_A \leftthreetimes M/M_A$. По лемме 3.28 пары $(H/K, A/C)$ и $(C/M_A, A/C)$ эквивалентны, и поэтому ввиду леммы 3.27 достаточно установить эквивалентность пар $(C/M_A, A/C)$ и $(C/M_A, M/M_A)$. Не теряя общности, можно положить $M_A=\{0\}$. Пусть

$$\mu\colon m \mapsto (m, C),\ m \in C, \text{ и } \alpha\colon a \mapsto (0, a+C),\ a \in M.$$

Простые вычисления показывают, что отображения μ и α удовлетворяют соответственно условиям 1), 2) определения 3.26. Таким образом, пары $(C/M_A, A/C)$ и $(C/M_A, M/M_A)$ эквивалентны. Лемма доказана.

3.30. Лемма. *Пусть π — произвольная непустая совокупность минимальных мультиколец, K и N — идеалы мультикольца A, причем $K \subseteq N$. Тогда если N π-разрешим (π-нильпотентен) в A, то и K π-разрешим (соответственно π-нильпотентен) в A.*

Доказательство. Пусть

$$\{0\} = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \ldots \subseteq N_t = N$$

— такая цепь идеалов A, что для любого $i \in \{1, \ldots, t\}$ условие $\pi \cap \tau(N_i/N_{i-1}) \neq \varnothing$ влечет $N_i \subseteq C_A(N_i/N_{i-1})$ (соответственно $N \subseteq C_A(N_i/N_{i-1})$). Рассмотрим такую цепь

$$\{0\} = N_0 \cap K \subseteq N_1 \cap K \subseteq \ldots \subseteq N_t \cap K = K$$

идеалов мультикольца A. Фактор $N_i \cap K/N_{i-1} \cap K$ перспективен фактору $((K \cap N_i)+N_{i-1})/N_{i-1}$. Значит, если $\tau(K \cap N_i/K \cap N_{i-1}) \cap \pi \neq \varnothing$, то $\tau(N_i/N_{i-1}) \cap \pi \neq \varnothing$, и поэтому $N_i \subseteq C_A(N_i/N_{i-1})$ (соответственно $N \subseteq C_A(N_i/N_{i-1})$). Но тогда

$$N_i \cap K \subseteq C_A(N_i \cap K/N_{i-1} \cap K)$$

(соответственно $N \cap K \subseteq C_A(N_i \cap K/N_{i-1} \cap K)$). Это означает, что идеал K π-разрешим (соответственно π-нильпотентен) в A. Лемма доказана.

Для произвольных подалгебр A и B мультикольца R через $\langle A, B\rangle$ будем обозначать подалгебру, ими порожденную. Будем говорить, что подалгебра A мультикольца R дополняема в R, если в R найдется хотя бы одна такая подалгебра B (дополнение к A в R), что $A \cap B = \{0\}$ и $\langle A, B\rangle = R$.

Идеал N мультикольца A будем называть *фраттиниевым*, если $\langle N, H\rangle \neq A$ для любой собственной подалгебры H из A.

Идеал, порожденный всеми минимальными идеалами мультикольца A, назовем *цоколем* A и обозначим $\mathrm{Soc}(A)$.

3.31. Лемма. *Пусть N—A-абелев идеал мультикольца A. Тогда если N удовлетворяет условиям максимальности и минимальности для подалгебр, являющихся идеалами в A, и всякий минимальный идеал A, входящий в N, нефраттиниев, то N дополняем в A и $N \subseteq \mathrm{Soc}(A)$. Если, кроме того, N—наибольший A-абелев идеал A и идеал $C = C_A(N)$ разрешим в A, то $C = N$.*

Доказательство. Пусть цепь

$$\{0\} = N_0 \subset N_1 \subset \ldots \subset N_t = N \qquad (1)$$

идеалов мультикольца A такова, что N_i/N_{i-1}—минимальный идеал в A/N_{i-1} для всякого $i \in \{1, \ldots, t\}$. Первые два утверждения леммы будем доказывать индукцией по t. Покажем прежде, что идеал N_1 дополняем в A. Так как по условию идеал N_1 не фраттиниев, то в A найдется такая собственная подалгебра K, что $A = N_1 + K$. Легко видеть, что $E = N_1 \cap K$—идеал в A. При этом очевидно, что $K \cap N_1 \neq N_1$. Следовательно, поскольку N_1—минимальный идеал A, то $K \cap N_1 = \{0\}$, т. е. K—дополнение к N_1 в A.

Предположим теперь, что $t > 1$ и идеал N_{t-1} дополняем в A подалгеброй R. Пусть $D = N \cap R$. Нетрудно показать, что D—минимальный идеал A. Следовательно, D обладает дополнением F в A. Пусть $T = R \cap F$. Покажем, что T—дополнение к N в A. Заметим прежде, что

$$N_{t-1} + D = N_{t-1} + (N \cap R) = N \cap (R + N_{t-1}) = N \cap A = N.$$

Значит,

$$N + T = N_{t-1} + D + (R \cap F) = N_{t-1} + (R \cap (D + F)) =$$
$$= N_{t-1} + (R \cap A) = N_{t-1} + R = A.$$

С другой стороны,

$$N \cap (R \cap F) = D \cap F = \{0\}.$$

Этим самым завершено доказательство первого утверждения леммы. Второе утверждение леммы по существу установлено в ходе доказательства первого. Действительно, по индукции $N_{t-1} \subseteq \mathrm{Soc}(A)$ и $N = N_{t-1} \dotplus D$. Значит, $N \subseteq \mathrm{Soc}(A)$.

Докажем теперь третье утверждение леммы. Пусть L — дополнение к N в A. Тогда

$$C = C \cap (N + L) = N \dotplus (C \cap L).$$

Понятно, что $P = C \cap L$ — идеал в A. Ввиду леммы 3.30 идеал P разрешим в A. Значит, если $P \neq \{0\}$, то A имеет такой A-абелев идеал T, что $\{0\} \neq T \subseteq P$. Так как $T \cap N = \{0\}$, то $T + N$ — A-абелев идеал A и $N \subset T \dotplus N$. Полученное противоречие показывает, что $P = \{0\}$, т. е. $N = C$. Лемма доказана.

3.32. Лемма. *Пусть M и N — идеалы мультикольца A, причем $M \subseteq C_A(N)$. Тогда $N \times (A/M) \in \mathrm{form}\, A$.*

Доказательство. Пусть $A_1 = \{(a, a) \mid a \in A\}$, $N_1 = \{(n, 0) \mid n \in N\}$ и $M_1 = \{(m, m) \mid m \in M\}$. Легко видеть, что N_1, M_1 — идеалы в $\langle N_1, A_1 \rangle = N_1 + A_1$. Понятно также, что $N_1 + A_1/M_1 = (N_1 + M_1/M_1) \times (A_1/M_1)$. Так как $N_1 + A_1$ — поддекартово произведение в $A \times A$, то $N_1 \dotplus A_1/M_1 \in \mathrm{form}\, A$. Легко убедиться, что пары $(N_1 \dotplus M_1/M_1, A_1/M_1)$ и $(N, A/M)$ эквивалентны. Следовательно, ввиду леммы 3.27 $N \times (A/N) \simeq N_1 + A_1/M_1$. Значит, $N \times (A/M) \in \mathrm{form}\, A$. Лемма доказана.

Нормальный фактор H/K мультикольца A будем называть *фраттиниевым*, если H/K — фраттиниев идеал в A/K.

Пусть H/K — нефраттиниев A-абелев главный фактор мультикольца A, $C = C_A(H/K)$. Обозначим через R пересечение всех таких идеалов N из A, что $N \subseteq C$, причем фактор C/N нефраттиниев и проективен фактору H/K. Фактор C/R назовем *короной, соответствующей фактору H/K* (или, иначе, *H/K-короной* мультикольца A).

3.33. Лемма. *Пусть A — мультикольцо, обладающее главными рядами, H/K — его A-абелев нефраттиниев главный фактор* и *C/R — H/K-корона мультикольца A. Тогда имеют место следующие утверждения:*

1) $C/R \subseteq \mathrm{Soc}(A/R)$;

2) *идеал C/R дополняем в A/R;*

3) *если B/P — главный фактор A, то включения $R + P \subset R + B \subseteq C$ имеют место в точности тогда, когда фактор B/P нефраттиниев и проективен фактору H/K.*

Доказательство. Пусть D — пересечение некоторых таких идеалов $N_1, \ldots, N_t$ мультикольца A, что

$N_i \subseteq C$, причем фактор C/N_i нефраттиниев и проективен фактору H/K. Индукцией по t покажем, что $C/D \subseteq \mathrm{Soc}(A/D)$, идеал C/D дополняем в A/D, и если главный фактор B/P мультикольца A таков, что $D \subseteq P$ и $B \subseteq C$, то фактор B/P нефраттиниев и проективен фактору H/K. Мы можем считать, что $t > 1$ и

$$D_i = N_1 \cap \ldots \cap N_{i-1} \cap N_{i+1} \cap \ldots \cap N_t \neq D$$

для всех $i = 1, \ldots, t$. Кроме того, не теряя общности, можно положить $D = \{0\}$. Так как факторы C/N_1 и $D_1/\{0\}$ перспективны, то D_1 — минимальный идеал A. По индукции $C/D_1 \subseteq \mathrm{Soc}(A/D_1)$. Так как факторы C/D_1 и $N_1/\{0\}$ перспективны, то решетки идеалов A, заключенных соответственно между D_1 и C и между $\{0\}$ и N_1, изоморфны. Значит, $N_1 \subseteq \mathrm{Soc}(A)$. Поэтому $C = N_1 + D_1 \subseteq \mathrm{Soc}(A)$.

Покажем, что идеал C дополняем в A. Пусть N — минимальный идеал A, входящий в C. Так как $N_1 \cap \ldots \cap N_t = \{0\}$, то найдется $r \in \{1, \ldots, t\}$ такое, что $N \not\subseteq N_r$. Значит, если идеал N фраттиниев, то фраттиниевым оказывается и фактор $C/N_r = N + N_r/N_r$, что невозможно. Следовательно, всякий минимальный идеал A, входящий в C, нефраттиниев. Идеал C абелев, поскольку он изоморфен поддекартову произведению абелевых мультиколец $C/N_1, \ldots, C/N_t$. Таким образом, ввиду леммы 3.31 идеал C дополняем в A.

Пусть E — дополнение к C в A. Ввиду следствия 2.3 и леммы 3.14 в A найдется такой идеал C_1, что $C_1 + B = C$ и $C_1 \cap B = \{0\}$. Легко видеть, что $T = C_1 + P + E \neq A$, но $T + B = A$. Это означает, что фактор B/P нефраттиниев. Покажем, что факторы B/P и H/K проективны. Пусть $N_1 + B \neq N_1 + P$. Тогда фактор B/P перспективен фактору $N_1 + B/N_1 + P = C/N_1$. Так как последний фактор проективен фактору H/K, то факторы B/P и H/K проективны. Пусть $N_1 + B = N_1 + P$. В этом случае перспективными оказываются факторы B/P и $N_1 \cap B/N_1 \cap P$ и факторы $N_1 \cap B/N_1 \cap P$ и $(N_1 \cap B) + D_1/(N_1 \cap P) + D_1$. Значит, факторы B/P и $(N_1 \cap B) + D_1/(N_1 \cap P) + D_1$ проективны. Но в силу индукции последний фактор проективен фактору H/K. Следовательно, факторы B/P и H/K проективны.

Покажем теперь, что корона C/R удовлетворяет условию 3). Пусть B/P — такой главный фактор A, что $R + P \subset R + B \subseteq C$. Тогда факторы B/P и $B + R/P + R$ перспективны. Значит, $B + R/P + R$ — главный фактор A. Следовательно, ввиду показанного выше этот фактор нефраттиниев и перспективен фактору H/K. Но тогда этими же двумя свойствами обладает и фактор B/P. Обратно, пусть B/P — нефраттиниев главный фактор A, проективный фактору H/K. Тогда $B \subseteq C$. Предположим, что $R+P=R+B$. Тогда $B=P+(B \cap R)$. Ввиду леммы 3.31 в A найдется такая подалгебра M, что $B+M=A$ и $M \cap B=P$. Следовательно, $C=B+M_A$. Фактор C/M_A нефраттиниев и перспективен фактору B/P. Значит, $R \subseteq M_A$ и поэтому $B=P+(B \cap R) \subseteq M_A$. Противоречие. Таким образом, $R+P \subset R+B$. Лемма доказана.

Мультикольцо A назовем *φ-разрешимым*, если оно обладает главным рядом и каждый его фраттиниев главный фактор A-абелев. Будем говорить, что класс $\mathfrak{F}$ *φ-разрешим*, если φ-разрешимо любое мультикольцо из $\mathfrak{F}$.

Серию конкретных примеров φ-разрешимых мультиколец составляют конечные группы, алгебры Ли конечной длины (см. гл. 1 книги [1]), конечномерные алгебры Мальцева характеристики $\neq 2$ (см. [173]).

3.34. Лемма. *Пусть A — φ-разрешимое мультикольцо. Тогда между факторами произвольных двух главных рядов A можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором соответствующие факторы проективны и оба одновременно либо фраттиниевы, либо нефраттиниевы.*

Доказательство. Пусть H/K — главный фактор A. По лемме 2.5 в любом главном ряде мультикольца A содержится одно и то же число факторов, проективных фактору H/K. Значит, нам достаточно установить, что в любых двух главных рядах A содержится по одинаковому числу нефраттиниевых факторов, проективных фактору H/K. Если фактор H/K не является A-абелевым, то ввиду утверждения 1) леммы 2.8 в каждом главном ряде A имеется лишь один фактор, проективный фактору H/K. Ввиду условия все такие факторы нефраттиниевы. Пусть фактор H/K A-абелев. Предположим, что A имеет нефраттиниев главный фактор T/M, проективный фактору H/K. Пусть C/R есть T/M-корона. Тогда ввиду утверждения 3) леммы 3.33 в каждом главном ряде мультикольца A имеется точно t нефраттиниевых факторов, проективных фактору H/K, где t — длина участка главного ряда A, заключенного между R и C. Лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторый класс мультиколец, N — идеал мультикольца R. Будем говорить, что N является *$\mathfrak{F}$-корадикалом* R, если $R/N \in \mathfrak{F}$ и всегда из $R/A \in \mathfrak{F}$ следует, что идеал N входит в A. Если мультикольцо R обладает $\mathfrak{F}$-корадикалом, то последний обозначим через $R^{\mathfrak{F}}$.

3.35. Лемма. *Пусть $\mathfrak{F}$ — полуформация, K — идеал мультикольца R и H — некоторая подалгебра из R. Предположим, что R и H обладают $\mathfrak{F}$-корадикалами. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $R^{\mathfrak{F}} + K/K = (R/K)^{\mathfrak{F}}$;

2) *если* $R = K + H$, *то* $H^{\mathfrak{F}} + K = R^{\mathfrak{F}} + K$;

3) *если* $R = H + K$ *и* $K \subseteq R^{\mathfrak{F}}$, *то* $H^{\mathfrak{F}} + K = R^{\mathfrak{F}}$.

Доказательство. Пусть N/K — такой идеал R/K, что $(R/K)/(N/K) \in \mathfrak{F}$. Тогда

$$(R/K)/(N/K) \simeq R/N \in \mathfrak{F}.$$

Значит, $R^{\mathfrak{F}} \subseteq N$. Поэтому $R^{\mathfrak{F}} + K/K \subseteq N/K$. Кроме того,

$$(R/K)/(R^{\mathfrak{F}} + K/K) \simeq R/R^{\mathfrak{F}} + K \simeq (R/R^{\mathfrak{F}})/(R^{\mathfrak{F}} + K/R^{\mathfrak{F}}) \in \mathfrak{F}.$$

Следовательно, $R^{\mathfrak{F}} + K/K = (R/K)^{\mathfrak{F}}$.

Пусть $R = K + H$, γ-естественный гомоморфизм мультикольца R на R/K (т. е. γ: $x \mapsto x + K$, $x \in R$). Очевидно,

$$H^{\gamma} = R/K, \ (H^{\mathfrak{F}})^{\gamma} = (R^{\mathfrak{F}})^{\gamma} = H^{\mathfrak{F}} + K/K = R^{\mathfrak{F}} + K/K,$$

откуда следует равенство $H^{\mathfrak{F}} + K = R^{\mathfrak{F}} + K$. В частности, если $K \subseteq R^{\mathfrak{F}}$, то $H^{\mathfrak{F}} + K = R^{\mathfrak{F}}$. Лемма доказана.

3.36. Теорема. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустая формация мультиколец, $\mathfrak{H}$ — некоторая φ-разрешимая формация и $\mathfrak{M}$ — класс всех таких мультиколец H, что H обладает $\mathfrak{X}$-корадикалом и всякий H-главный фактор из $H^{\mathfrak{X}}$ нефраттиниев. Тогда класс $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}$ — формация.*

Доказательство. Пусть $A \in \mathfrak{F}$, N — идеал мультикольца A. Пусть $(R/N)/(K/N)$ — произвольный A/N-главный фактор из $(A/N)^{\mathfrak{X}}$. Предположим, что этот фактор фраттиниев. Тогда R/K — фраттиниев главный фактор мультикольца A. По лемме 3.35 $(A/N)^{\mathfrak{X}} = A^{\mathfrak{X}} + N/N$. Значит, $R \subseteq A^{\mathfrak{X}} + N$. Следовательно,

$$(A^{\mathfrak{X}} \cap R) + K = (A^{\mathfrak{X}} + K) \cap R = R,$$

и поэтому факторы R/K и $A^{\mathfrak{X}} \cap R/A^{\mathfrak{X}} \cap K$ проективны. Это, в частности, означает, что фактор $A^{\mathfrak{X}} \cap R/A^{\mathfrak{X}} \cap K$ является A-главным. Так как фактор R/K фраттиниев, а всякий A-главный фактор из $A^{\mathfrak{X}}$ по условию нефраттиниев, то в A найдется такой A-главный фактор T/M, проективный фактору R/K, что $A^{\mathfrak{X}} \subseteq M$. Поскольку $M \subseteq C = C_A(T/M)$ и факторы T/M и $A^{\mathfrak{X}} \cap R/A^{\mathfrak{X}} \cap K$ проективны, то $A^{\mathfrak{X}} \cap R \subseteq C$, т. е. эти факторы A-абелевы. Кроме того, ввиду леммы 3.28 имеет место

$$D = T/M \leftthreetimes A/C \simeq F = A^{\mathfrak{X}} \cap R/A^{\mathfrak{X}} \cap K \leftthreetimes A/C.$$

Но по лемме 3.32 $D \in \mathfrak{X}$. Значит, $F \in \mathfrak{X}$. В силу леммы 3.31 в A найдется такая подалгебра E, что $(A^{\mathfrak{X}} \cap R) + E = A$ и $(A^{\mathfrak{X}} \cap R) \cap E = A^{\mathfrak{X}} \cap K$. При этом ввиду леммы 3.29 $A/E_A \simeq F$. Следовательно, $A/E_A \in \mathfrak{X}$. Это влечет $A^{\mathfrak{X}} \subseteq E_A$. Но тогда $A^{\mathfrak{X}} \cap R \subseteq E_A$. Противоречие. Таким образом, всякий A/N-главный фактор из $(A/N)^{\mathfrak{X}}$ нефраттиниев, т. е. $A/N \in \mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{F}$ — полуформация.

Пусть N_1 и N_2 — такие идеалы мультикольца A, что $A/N_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2$, и $N_1 \cap N_2 = \{0\}$. Пусть R/K — произвольный A-главный фактор с условием $R \subseteq A^{\mathfrak{X}}$, $A^{\mathfrak{X}} \cap N_1 \subseteq K$. Предположим, что этот фактор фраттиниев. Тогда фраттиниев и фактор $R + N_1/K + N_1$. Легко видеть, что факторы R/K и $R + N_1/K + N_1$ проективны. Значит, фактор $R + N_1/K + N_1$ A-главный. Следовательно, $(R + N_1/N_1)/(K + N_1/N_1)$ — фраттиниевый A/N_1-главный фактор. Но

$$R + N_1/N_1 \subseteq A^{\mathfrak{X}} + N_1/N_1 = (A/N_1)^{\mathfrak{X}}.$$

Противоречие. Таким образом, фактор R/K нефраттиниев. Пусть теперь R/K — такой A-главный фактор, что $R \subseteq A^{\mathfrak{X}} \cap N_1$. Поскольку $K + (R \cap N_2) = K$, то тогда этот фактор проективен фактору $R + N_2/K + N_2$. Значит, $(R + N_2/N_2)/(K + N_2/N_2)$ есть A/N_2-главный фактор из $(A/N_2)^{\mathfrak{X}}$. По условию этот фактор нефраттиниев. Следовательно, фактор R/K также нефраттиниев. Итак, все факторы главного ряда A, проходящего через $N_1 \cap A^{\mathfrak{X}}$ на участке от $\{0\}$ до $A^{\mathfrak{X}}$, нефраттиниевы. Значит, по лемме 3.34 всякий A-главный фактор из $A^{\mathfrak{X}}$ нефраттиниев, т. е. $A \in \mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{F}$ — формация. Теорема доказана.

3.37. Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольная непустая формация мультиколец, $\mathfrak{H}$ — некоторая φ-разрешимая формация и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$. Тогда если A — монолитическое мультикольцо из* $\operatorname{form} \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{F}$ *и $\mathfrak{F}$-корадикал любого $H \in \mathfrak{X}$ не содержит фраттиниевых H-главных факторов, то $A \in$* $\mathrm{H}(\mathfrak{X})$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X}_1 = \mathrm{H}(\mathfrak{X})$. Предположим, что $A \notin \mathfrak{X}_1$. Всякому $R \in \mathfrak{X}_1$ сопоставим число $\lambda(R)$, равное длине главного ряда R, и пусть

$$A \simeq H/N, \qquad H \subseteq D = A_1 \times \ldots \times A_n,$$

— λ-минимальное представление для A в $\operatorname{form} \mathfrak{X}_1$. Тогда ввиду следствия 2.3 и теоремы 3.11 мультикольцо H обладает такими идеалами $N_1, R_1, \ldots, N_t, R_t$ $(t \geqslant 2)$, что выполняются следующие условия: 1) H/N_i — монолитическая $\mathfrak{X}_1$-алгебра с цоколем R_i/N_i; 2) $T_i = N_1 \cap \ldots \cap N_{i-1} \cap \cap R_i \cap N_{i+1} \cap \ldots \cap N_t$ — минимальный идеал H, причем

$T_i \not\subseteq N$ и $T_i + N_i = R_i$. Пусть R—такой идеал H, что R/N—цоколь мультикольца H/N. Из 1), 2) вытекает, что фактор R/N перспективен фактору $T_i/\{0\}$, а последний фактор перспективен фактору R_i/N_i. Значит, фактор R/N проективен фактору R_i/N_i, $i=1, \ldots, t$. Следовательно, $C = C_H(R/N) = C_H(R_i/N_i)$. Предположим, что $R \not\subseteq C$. Тогда поскольку мультикольцо H/N монолитично, то $N_i \subseteq N$. Но $H/N_i \in \mathfrak{X}_1$. Значит, $A \in \mathfrak{X}_1$. Противоречие. Следовательно, $R \subseteq C$. Так как $A \notin \mathfrak{F}$, то ввиду теоремы 3.36 фактор R/N нефраттиниев. Значит, по лемме 3.31 в H найдется такая подалгебра M, что $R + M = H$ и $R \cap M = N$. Легко видеть, что $C = R$, и поэтому $M_H = N$. Но по лемме 3.29 имеет место $H/M_H \simeq F = R/N \leftthreetimes H/C$. Следовательно, $A \simeq F$. Ввиду леммы 3.29 $F \simeq D_i = R_i/N_i \leftthreetimes H/C$. По лемме 3.32 $D_i \in \mathrm{form}(H/N_i)$. Значит, поскольку $A \notin \mathfrak{F}$, то найдется такое r, что $H/N_r \notin \mathfrak{F}$. Тогда $R_r/N_r \subseteq (H/N_r)^{\mathfrak{F}}$, и поэтому фактор R_r/N_r нефраттиниев. Пусть L—такая подалгебра из H, что $L + R_r = H$ и $R_r \cap L = N_r$. По лемме 3.29 $D_r \simeq H/L_H$. Но $N_r \subseteq L_H$. Значит,

$$A \simeq D_r \in \mathrm{H}(H/L_H) \subseteq \mathrm{H}(\mathfrak{X}_1) = \mathfrak{X}_1.$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Локальные формации, порожденные мультикольцами. 3.38. В данном пункте $\mathfrak{X}$—некоторая наследственная формация мультиколец, удовлетворяющих условиям минимальности для подалгебр.

Пусть $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{X}$. Если n-кратно локальная в $\mathfrak{X}$ формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ и всякая n-кратно локальная в $\mathfrak{X}$ формация, содержащая $\mathfrak{M}$, содержит и $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F}$ назовем *n-кратно локальной в $\mathfrak{X}$ формацией, порожденной классом* $\mathfrak{M}$, и обозначим $\mathfrak{F}$ через $\mathfrak{l}_n\mathrm{form}_{\mathfrak{X}}\mathfrak{M}$.

Чтобы дать описание минимального $(n-1)$-кратно локального $\mathfrak{X}$-экрана формации $\mathfrak{l}_n\mathrm{form}_{\mathfrak{X}}\mathfrak{M}$, введем следующее обозначение: $\mathrm{F}_A(G)$—пересечение централизаторов тех главных факторов мультикольца G, каждый из которых обладает фактором, изоморфным A (если же в G нет ни одного такого главного фактора, то положим $\mathrm{F}_A(G) = G$).

3.39. Лемма. *Пусть H/K—минимальный фактор мультикольца G, обладающего главным рядом. Тогда найдется такой G-главный фактор R/M, что $H/K \in \tau(R/M)$.*

Доказательство. Проведем индукцию по длине главного ряда мультикольца G. Пусть L—минимальный идеал G. Тогда если $H\cap L\not\subseteq K$, то

$$H/K=(H\cap L)+K/K\simeq H\cap L/K\cap L.$$

Пусть $H\cap L\subseteq K$. В этом случае

$$H/K=H/(H\cap L)+K\simeq H+L/K+L.$$

По индукции найдется такой G/L-главный фактор $(R/L)/(T/L)$, один из факторов которого изоморфен фактору $H+L/K+L$. Но тогда фактор H/K изоморфен одному из факторов G-главного фактора R/L. Итак, найдется такой G-главный фактор D/M, что $H/K\in\tau(D/M)$. Лемма доказана.

3.40. Лемма. *Пусть f — произвольный локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Тогда и только тогда мультикольцо A принадлежит $\mathfrak{F}$, когда для любого $P\in\tau(A)$ имеет место $A/\mathrm{F}_p(A)\in f(P)$.*

Доказательство. Пусть $A\in\mathfrak{F}$, $P\in\tau(A)$. Тогда по лемме 3.39 мультикольцо A имеет такой A-главный фактор H/K, что $P\in\tau(H/K)$ и $A/C_A(H/K)\in f(H/K)\subseteq f(P)$. Но $f(P)$ — формация. Значит, $A/\mathrm{F}_p(A)\in f(P)$.

Обратно, пусть $A/\mathrm{F}_p(A)\in f(P)$, H/K — такой A-главный фактор, что $P\in\tau(H/K)$. Тогда $\mathrm{F}_p(A)\subseteq C_A(H/K)$. Следовательно, $A/C_A(H/K)\in f(P)$. Таким, образом, если для каждого $P\in\tau(A)$ имеет место $A/\mathrm{F}_p(A)\in f(P)$, то H/K f-централен в A. Значит, $A\in\mathfrak{F}$. Лемма доказана.

3.41. Лемма. *Пусть $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{X}$, f — такой локальный $\mathfrak{X}$-экран, что $f(A)=\mathfrak{l}_{n-1}\mathrm{form}_{\mathfrak{X}}(G/\mathrm{F}_A(G)\mid G\in\mathfrak{M})$ для любого $A\in\tau(\mathfrak{M})$ и $f(A)=\varnothing$, если $A\in\tau(\mathfrak{X})\setminus\tau(\mathfrak{M})$. Тогда f — минимальный $(n-1)$-кратно локальный $\mathfrak{X}$-экран формации $\mathfrak{l}_n\mathrm{form}_{\mathfrak{X}}\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}=\langle f\rangle$. Ввиду леммы 3.39 $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{l}_n\mathrm{form}_{\mathfrak{X}}\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{F}$, так как формация $\mathfrak{F}$ по условию n-кратно локальна.

Пусть теперь $\mathfrak{F}_1$ — такая n-кратно локальная в $\mathfrak{X}$ формация, что $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{F}_1$. Пусть f_1 — некоторый $(n-1)$-кратно локальный $\mathfrak{X}$-экран формации $\mathfrak{F}_1$ и T — произвольное мультикольцо из $\tau(\mathfrak{M})$. Покажем, что $f(T)\subseteq f_1(T)$. Действительно, пусть $T\simeq H/K$, где H/K — фактор мультикольца $G\in\mathfrak{M}$. По лемме 3.40 $G/\mathrm{F}_T(G)\in f_1(T)$. Поэтому

$$f(T)=\mathfrak{l}_{n-1}\mathrm{form}_{\mathfrak{X}}(A/\mathrm{F}_T(A)\mid A\in\mathfrak{M})\subseteq f_1(T).$$

Но вложение $f\leqslant f_1$ влечет $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{F}_1$. Итак, формация $\mathfrak{F}$ n-кратно локальна в $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ входит в любую n-кратно локальную в $\mathfrak{X}$ формацию, содержащую $\mathfrak{M}$. Значит, $\mathfrak{F}=\mathfrak{l}_n\mathrm{form}_{\mathfrak{X}}\mathfrak{M}$. Лемма доказана.

3.42. Следствие. *Пусть f_i — минимальный n-кратно локальный $\mathfrak{X}$-экран формации $\mathfrak{F}_i$, $i=1, 2$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, когда $f_1 \leqslant f_2$.*

Если мультикольцо A монолитично, то его единственный минимальный идеал будем называть *монолитом.*

3.43. Лемма. *Пусть $A \in \mathrm{l}_n\mathrm{form}_{\mathfrak{X}}\mathfrak{M}$, где A — такое монолитическое мультикольцо с монолитом R, что $R \not\subseteq C_A(R)$. Тогда $A \in \mathrm{H}(\mathfrak{M})$.*

Доказательство. Лемму докажем индукцией по n. Пусть $n=0$. Тогда $A \in \mathrm{l}_0\mathrm{form}_{\mathfrak{X}}\mathfrak{M} = \mathrm{form}\,\mathfrak{M}$. Предположим, что $A \notin \mathrm{H}(\mathfrak{M})$. Сопоставим всякому мультикольцу $G \in \mathfrak{X}$ число $\lambda(G)$, равное длине главного ряда G, и пусть

$$A \simeq H/N, \qquad H \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n,$$

— λ-минимальное представление для A в формации $\mathrm{form}\,\mathfrak{M}$. В силу следствия 2.3 и теоремы 3.11 H имеет такие идеалы $N_1, M_1, \ldots, N_t, M_t$ $(t \geqslant 2)$, что выполняются следующие условия: 1) H/N_i — монолитичное мультикольцо из $\mathrm{H}(\mathfrak{M})$ с монолитом M_i/N_i; 2) $L_i = N_1 \cap \ldots \cap N_{i-1} \cap M_i \cap N_{i+1} \cap \ldots \cap N_t$ — минимальный идеал H, причем $L_i \not\subseteq N$ и $M_i = L_i + N_i$. Пусть M/N — монолит мультикольца H/N. Из условия 2) вытекает, что факторы M/N и M_i/N_i проективны. Значит, $C_H(M/N) = C_H(M_i/N_i)$. Но $N_i \subseteq C_H(M_i/N_i)$ и $N = C_H(M/N)$. Следовательно, $A \simeq H/N \in \mathrm{H}(H/N_i) \subseteq \mathrm{H}(\mathfrak{M})$. Полученное противоречие показывает, что при $n=0$ лемма верна.

Пусть теперь $n \geqslant 1$ и предположим, что утверждение леммы при $n-1$ справедливо. Пусть $P \in \tau(R)$. Тогда ввиду леммы 3.40 $A/\mathrm{F}_p(A) \in f(P)$, где f — минимальный $(n-1)$-кратно локальный экран формации $\mathrm{l}_n\mathrm{form}_{\mathfrak{X}}\mathfrak{M}$. Так как по условию $C_A(R) = \{0\}$, то и $\mathrm{F}_p(A) = \{0\}$, т. е. $A \in f(P)$. Но по лемме 3.41 $f(P) = \mathrm{l}_{n-1}\mathrm{form}_{\mathfrak{X}}(B/\mathrm{F}_p(B) \mid B \in \mathfrak{M})$. Значит, $A \in \mathrm{H}(B/\mathrm{F}_p(B) \mid B \in \mathfrak{M}) \subseteq \mathrm{H}(\mathfrak{M})$. Лемма доказана.

3.44. Теорема. *Пусть формация $\mathfrak{X}$ φ-разрешима, а формация $\mathfrak{F}$ содержит лишь конечное число неизоморфных формационно критических мультиколец. Тогда если A — конечное мультикольцо из $\mathfrak{X}$ и $A^{\mathfrak{F}}$ не имеет фраттиниевых A-главных факторов, то в формации $\mathfrak{M} = \mathrm{l}_n\mathrm{form}_{\mathfrak{X}}A$ имеется лишь конечное число n-кратно локальных в $\mathfrak{X}$ подформаций.*

Доказательство. Проведем индукцию по n. Пусть $n=0$. Тогда $\mathfrak{M} = \mathrm{form}\,A$. Пусть G — произвольное формационно критическое мультикольцо из $\mathfrak{M}$. Если $G \notin \mathfrak{F}$, то ввиду теоремы 3.37 G — гомоморфный образ A. Следовательно, ввиду условия теоремы в $\mathfrak{M}$ имеется лишь конечное множество неизоморфных формационно критических мультиколец. В силу леммы 3.4 отсюда заключаем, что в формации $\mathfrak{M}$ имеется лишь конечное множество подформаций.

Пусть теперь $n > 0$ и теорема верна для $n-1$. Обозначим через m минимальный $(n-1)$-кратно локальный $\mathfrak{X}$-экран формации $\mathfrak{M}$. По лемме 3.41 $m(T) = \mathfrak{l}_{n-1}\mathrm{form}_{\mathfrak{X}}(A/\mathrm{F}_T(A))$, если $T \in \tau(A)$, и $m(T) = \varnothing$, если $T \in \tau(\mathfrak{X}) \setminus \tau(A)$. Ввиду теоремы 3.36 $\mathfrak{F}$-корадикал мультикольца $A/\mathrm{F}_T(A)$ не содержит фраттиниевых $(A/\mathrm{F}_T(A))$-главных факторов. Значит, в формации $\mathfrak{l}_{n-1}\mathrm{form}_{\mathfrak{X}}(A/\mathrm{F}_T(A))$ имеется лишь конечное множество $(n-1)$-кратно локальных подформаций. Так как при этом множество $\tau(A)$ конечно, то существует лишь конечное число $(n-1)$-кратно локальных $\mathfrak{X}$-экранов h с условием $h \leqslant m$. Применяя теперь следствие 3.42, заключаем, что в формации $\mathfrak{M}$ содержится лишь конечное множество n-кратно локальных в $\mathfrak{X}$ подформаций. Теорема доказана.

3.45. Укажем теперь на примеры формаций, обладающих лишь конечным числом неизоморфных формационно критических систем.

Для данного натурального числа n через $\mathfrak{S}(n)$ обозначим класс всех тех конечных разрешимых групп, у которых порядки главных факторов, ступени нильпотентных секций и экспоненты не превосходят число n. Мы покажем, что класс $\mathfrak{S}(n)$ содержит лишь конечное число неизоморфных формационно критических групп. Нам потребуется следующая интерпретация одной теоремы Оутс и Пауэла из их совместной работы [176].

3.46. Теорема. *Пусть конечная группа G содержит такие подгруппы $L, M_1, \ldots, M_n$, что $G = \langle L, M_1, \ldots, M_n \rangle$, причем подгруппы $M_1, \ldots, M_n$ нормальны в G. Обозначим через $\mathfrak{X}$ множество всех тех подгрупп из G, которые могут быть порождены L вместе с собственными подмножествами множества $\{M_1, \ldots, M_n\}$. Тогда если для любой подстановки π на $\{1, \ldots, n\}$ имеет место $[M_{\pi(1)}, \ldots, M_{\pi(n)}] = \{1\}$, то $G \in \mathrm{form}\,\mathfrak{X}$.*

Доказательство этой теоремы (формально в менее общей формулировке) можно найти в книге [52] (см. теорему 51.37).

3.47. Теорема. *Для любого натурального числа n класс $\mathfrak{S}(n)$ содержит лишь конечное множество неизоморфных формационно критических групп.*

Доказательство. Пусть G — произвольная формационно критическая группа из $\mathfrak{S}(m)$, F и Φ — соответственно ее подгруппа Фиттинга и подгруппа Фраттини. Как известно, $\Phi\subset F$. Кроме того, ясно, что F/Φ — абелева группа. Значит, по лемме 3.31 F/Φ имеет в G/Φ дополнение L/Φ, F/Φ — прямое произведение некоторых минимальных нормальных подгрупп $M_1/\Phi, \ldots, M_n/\Phi$ из G/Φ и $F=C_G(F/\Phi)$.

Если $m<n$, то подгруппы $L, M_1, \ldots, M_n$ удовлетворяют условию теоремы 3.46. Поэтому если $\mathfrak{X}$ из теоремы 3.46, то $G\in \operatorname{form}\mathfrak{X}$ и по теореме 2.3 книги [107] $\mathfrak{X}\subseteq \operatorname{form} G$. Противоречие. Значит, $n\leqslant m$, т. е. $|F/\Phi|\leqslant \leqslant m^2$. Так как $G/F=G/C_G(F/\Phi)\subseteq \operatorname{Aut}(F/\Phi)$, то $|G/F|\leqslant \leqslant |F/\Phi|!$ Таким образом, $|G/\Phi|\leqslant m^2(m^2)!$. Значит, ввиду теоремы 19.10 гл. 1 книги [162] число порождающих группы Φ не превосходит $(m^2(m^2)!)^3$. Но Φ — нильпотентная группа класса $\leqslant m$ и экспоненты $\leqslant m$. Таким образом, порядок группы G ограничен числом, зависящим только от m. Но существует лишь конечное число неизоморфных групп данного порядка. Теорема доказана.

Отметим, что в действительности (см. лемму 8.12 главы 2) класс $\mathfrak{S}(m)$ является формацией. Таким образом, из теоремы 3.47 вытекает такое утверждение.

3.48. Следствие. *Формация, порожденная конечной разрешимой группой, имеет лишь конечное множество неизоморфных формационно критических групп.*

Используя следствие 3.48 и теорему 3.44, получаем

3.49. Теорема. *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс всех конечных групп, $\mathfrak{S}$ — формация разрешимых групп и $A\in\mathfrak{X}$. Тогда если $\mathfrak{S}$-корадикал $A^{\mathfrak{S}}$ группы A не имеет фраттиниевых A-главных факторов, то в формации $l_n\operatorname{form}_{\mathfrak{X}} A$ имеется лишь конечное множество n-кратно локальных в $\mathfrak{X}$ подформаций.*

Аналогично теореме 3.49 доказывается следующая теорема.

3.50. Теорема. *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс всех конечных колец Ли, $\mathfrak{F}$ — формация разрешимых колец Ли и $A\in\mathfrak{X}$. Тогда если $\mathfrak{F}$-корадикал $A^{\mathfrak{F}}$ кольца A не имеет фраттиниевых A-главных факторов, то в формации $l_n\operatorname{form}_{\mathfrak{X}} A$ имеется лишь конечное множество n-кратно локальных в $\mathfrak{X}$ подформаций.*

Вся необходимая для доказательства теоремы 3.50 дополнительная информация может быть найдена в книге [1].

3.51. Проблема. Пусть $A\in\mathfrak{X}$. Верно ли, что формация $l_n\operatorname{form}_{\mathfrak{X}} A$ имеет лишь конечное множество n-кратно локальных подформаций, где $\mathfrak{X}$ — один из следующих классов:

1) класс всех конечных групп;
2) класс всех конечных колец Ли;
3) класс всех конечных ассоциативных колец.

§ 4. Промногообразия алгебраических систем

4.1. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольный класс алгебраических систем. Тогда для всякой бесконечной последовательности множеств тождеств

$$\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n, \ldots \qquad (\alpha)$$

(сигнатуры класса $\mathfrak{M}$) символом $\langle\alpha\rangle_{\mathfrak{M}}$ обозначим класс всех тех $\mathfrak{M}$-систем A, для которых найдется такое натуральное число t, что в A истинны все тождества из $\bigcup\limits_{i \geqslant t} \Lambda_i$. Класс алгебраических систем $\mathfrak{H}$ назовем *промногообразием* в $\mathfrak{M}$, если $\mathfrak{H} = \langle\alpha\rangle_{\mathfrak{M}}$ для некоторой последовательности множеств тождеств α. В случае, когда $\mathfrak{M}$ — класс всех алгебраических систем заданной сигнатуры, всякое промногообразие в $\mathfrak{M}$ будем называть промногообразием.

4.2. Пример. Пусть $\mathfrak{X}$ — многообразие алгебраических систем, заданное системой тождеств Λ. Тогда $\mathfrak{X}$ — промногообразие, задаваемое последовательностью Λ, $\Lambda, \ldots, \Lambda, \ldots$

4.3. Пример. Пусть $\mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп. Этот класс, как известно, многообразием не является. Однако $\mathfrak{N}$ является промногообразием, поскольку его можно задать последовательностью

$$\{[x_1, x_2] = 1\}, \{[x_1, x_2, x_3] = 1\}, \ldots$$

4.4. Теорема. *Пусть $\mathfrak{M}$ — конечная наследственная формация. Тогда и только тогда непустой класс $\mathfrak{F}$ является промногообразием в $\mathfrak{M}$, когда $\mathfrak{F}$ — наследственная подформация в $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Предположим, что существует такая последовательность множеств тождеств α, что $\mathfrak{F} = \langle\alpha\rangle_{\mathfrak{M}}$. Легко видеть, что $\mathrm{D}(\langle\alpha\rangle_{\mathfrak{M}}) \subseteq \langle\alpha\rangle_{\mathfrak{M}}$, $\mathrm{H}(\langle\alpha\rangle_{\mathfrak{M}}) \subseteq \langle\alpha\rangle_{\mathfrak{M}}$ и $\mathrm{S}(\langle\alpha\rangle_{\mathfrak{M}}) \subseteq \langle\alpha\rangle_{\mathfrak{M}}$. Значит, ввиду п. 1.2 класс $\mathfrak{F}$ — наследственная формация.

Предположим теперь, что $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная подформация формации $\mathfrak{M}$. Нетрудно понять, что в

$\mathfrak{F}$ имеется лишь счетное множество неизоморфных алгебраических систем. Выберем в $\mathfrak{F}$ такую последовательность систем A_1, A_2, ..., что любая $\mathfrak{F}$-система изоморфна одной из систем этой последовательности. Пусть $G_i = A_1 \times \ldots \times A_i$, $\mathfrak{M}_i$ — многообразие, порожденное системой G_i, и Λ_i — произвольное множество тождеств, задающее это многообразие. Обозначим через α последовательность Λ_1, Λ_2, ..., Λ_n, ... Покажем, что $\mathfrak{F} = \langle\alpha\rangle_{\mathfrak{M}}$. Пусть $A \simeq A_m$. Тогда $A \in \bigcap\limits_{i \geqslant m} \mathfrak{M}_i$, т. е. в A выполняются все тождества из $\bigcup\limits_{i \geqslant m} \Lambda_i$. Значит, $A \in \langle\alpha\rangle_{\mathfrak{M}}$. Обратно, пусть $A \in \langle\alpha\rangle_{\mathfrak{M}}$. Тогда найдется такое натуральное число r, что $A \in \mathfrak{M}_r$. Пусть $|A| = a$. Ввиду п. 14.1 книги [50] для свободной в многообразии $\mathfrak{M}_r$ системы F ранга a справедлива формула

$$F \subseteq G_r^{|G_r|^a}.$$

Но A — гомоморфный образ системы F. Следовательно, $A \in \mathrm{HSD}(G_r) \subseteq \mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \langle\alpha\rangle_{\mathfrak{M}}$. Теорема доказана.

4.5. Будем говорить, что алгебраическая система A является *минимальной не $\mathfrak{F}$-системой*, если $A \notin \mathfrak{F}$, но классу $\mathfrak{F}$ принадлежат все ее собственные подсистемы.

4.6. Теорема. *Пусть $\mathfrak{M}$ — конечная наследственная формация алгебраических систем конечной сигнатуры, $\mathfrak{F}$ — непустой подкласс $\mathfrak{M}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *$\mathfrak{F}$ — такая наследственная формация, что всякая входящая в $\mathfrak{M}$ минимальная не $\mathfrak{F}$-система n-порождена;*

2) *$\mathfrak{F} = \langle\alpha\rangle_{\mathfrak{M}}$, где α — последовательность тождеств ранга $\leqslant n$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 1), β — такая последовательность $\mathfrak{F}$-систем A_1, A_2, ..., что всякая система из $\mathfrak{F}$ изоморфна хотя бы одной системе из этой последовательности. Обозначим через $\mathfrak{M}_i$ многообразие, порожденное системой $G_i = A_1 \times \ldots \times A_i$. Пусть $F_{i,n}$ — свободная ранга n система многообразия $\mathfrak{M}_i$. Ввиду п. 14.1 из [50] система $F_{i,n}$ конечна. По условию ее сигнатура также конечна. Значит, система $F_{i,n}$ конечно определена. Поэтому существует конечная совокупность соотношений $v_{i,1}$, ..., $v_{i,a(i)}$, определяющих систему $F_{i,n}$ в ее $\mathfrak{M}_i$-свободном базисе. Ясно, что совокупность тождеств $v_{i,1}$, ..., $v_{i,a(i)}$ эквивалентна множеству всех тех тождеств многообразия $\mathfrak{M}_i$, ранги которых не превосходят n. Пусть $\mathfrak{H}_i$ — многообразие, заданное системой тождеств $v_{i,1}, \ldots, v_{i,a(i)}$. Обозначим через α последовательность $v_{1,1}, \ldots, v_{1,a(1)}, \ldots, v_{r,1}, \ldots, v_{r,a(r)}, \ldots$ Покажем, что $\mathfrak{F} = \langle\alpha\rangle_{\mathfrak{M}}$. Пусть $A \in \mathfrak{F}$ и $\{A_1, \ldots, A_r\}$ — множество всех тех подсистем системы A, которые порождаются n элементами. Тогда $H = A_1 \times \ldots \times A_r \in \mathfrak{F}$. Следовательно, найдется такая система A_l последовательности β, что $H \simeq A_l$. Значит, $H \in \mathfrak{M}_l \subseteq \mathfrak{H}_l \subseteq \mathfrak{H}_{l+1} \subseteq \ldots$ Последнее означает, что в H истинны все тождества последовательности

$$v_{l,1}, \ldots, v_{l,a(l)}, v_{l+1,1}, \ldots, v_{l+1,a(l+1)}, \ldots,$$

т. е. $H \in \langle\alpha\rangle_{\mathfrak{M}}$. Следовательно, $A \in \langle\alpha\rangle_{\mathfrak{M}}$. Таким образом, $\mathfrak{F} \subseteq \langle\alpha\rangle_{\mathfrak{M}}$.

Предположим теперь, что $\langle\alpha\rangle_{\mathfrak{M}} \not\subseteq \mathfrak{F}$, и пусть A — система минимального порядка из $\langle\alpha\rangle_{\mathfrak{M}} \setminus \mathfrak{F}$. Так как $\langle\alpha\rangle_{\mathfrak{M}}$ — наследственная формация, то A — минимальная не $\mathfrak{F}$-система. Значит, по условию система A порождается n элементами. Так как $A \in \langle\alpha\rangle_{\mathfrak{M}}$, то найдется такое натуральное число l, что в системе A истинны тождества $v_{l,1}, \ldots, v_{l,a(l)}$. В силу п. 11.2 книги [50] это означает, что A является гомоморфным образом системы $F_{l,n} \in \mathfrak{M}_l$. Но ввиду п. 14.1 книги [50] $F_{l,n} \in \mathfrak{F}$. Значит, $A \in \mathfrak{F}$. Полученное противоречит определению системы A. Следовательно, остается заключить, что $\langle\alpha\rangle_{\mathfrak{M}} \subseteq \mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \langle\alpha\rangle_{\mathfrak{M}}$ и всякое тождество последовательности α имеет ранг $\leqslant n$, т. е. выполняется условие 2). Импликация 2) $\Rightarrow$ 1) очевидна. Теорема доказана.

В более общей ситуации имеет место следующая теорема, доказываемая аналогично теореме 4.6.

4.7. Теорема. *Пусть $\mathfrak{M}$ — конечная наследственная формация, $\mathfrak{F}$ — непустой подкласс $\mathfrak{M}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *$\mathfrak{F}$ — такая наследственная формация, что всякая входящая в $\mathfrak{M}$ минимальная не $\mathfrak{F}$-система n-порождена;*

2) *$\mathfrak{F} = \langle\alpha\rangle_{\mathfrak{M}}$, где α — последовательность множеств тождеств ранга $\leqslant n$.*

4.8. Пример. Пусть $\mathfrak{G}$ — класс всех конечных групп, $\mathfrak{N}$ — класс конечных нильпотентных групп. Хорошо известно, что всякая конечная минимальная ненильпотентная группа 2-порождена (см. гл. VI книги [107]). С другой стороны, $\mathfrak{N}$ является промногообразием в $\mathfrak{G}$, задаваемым последовательностью

$$\{[x, y] = 1\}, \{[x, y, y] = 1\}, \ldots, \{[x, y, \ldots, y] = 1\}, \ldots$$

§ 5. Комментарии

5.1. Понятие формации групп и формации алгебр Ли введены соответственно в работах [149] и [117]. Общее определение формации алгебраических систем впервые рассматривалось в работе [113].

5.2. Полуформацию $\mathfrak{F}$ назовем *$\mathfrak{X}$-формацией*, если всякое поддекартово произведение $\mathfrak{F}$-систем, принадлежащее классу алгебраических систем $\mathfrak{X}$, принадлежит и классу $\mathfrak{F}$. Такая модификация определения 1.1 находит применение в вопросах приложения теории формаций к изучению бесконечных групп (см., например, [151]).

5.3. Отметим, что наряду с нашим определением 2.1 термину «мультикольцо» придается и иной смысл. Действительно, термин «мультиалгебра» в литературе иногда применяется для алгебр с многозначными операциями (см. [152, 179] и др.).

5.4. Классификация $\mathfrak{G}$-экранов и описание их общих свойств в случае, когда $\mathfrak{G}$ — класс конечных групп, дана Л. А. Шеметковым [106, 107].

5.5. n-арные группы с f-центральным рядами изучались В. И. Тютиным [100].

5.6. Как показал П. Шмид [178], справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}$, где $\mathfrak{F}$ — непустая формация, $\mathfrak{G}$ — класс конечных групп. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ насыщена в $\mathfrak{G}$, когда $\mathfrak{F}$ является локальной в $\mathfrak{G}$ формацией.*

5.7. В работе [117] показано, что в классе разрешимых конечномерных алгебр Ли аналог теоремы 5.6 не имеет места.

5.8. Аналоги формул 3.2 и 3.5 для порожденных насыщенных формаций неизвестны. Однако, как установлено в работе [131], если $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$ — класс конечных разрешимых групп и $\mathfrak{F} = \mathrm{form}_\Phi(\mathfrak{H}, \mathfrak{S})$, где $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{S}$, то имеет место формула

$$\mathfrak{F} = HR_0\Phi_{\mathfrak{S}}HR_0\Phi_{\mathfrak{S}}\mathfrak{H}.$$

Проблема. Найти формулу для насыщенной в $\mathfrak{X}$ формации, порожденной классом $\mathfrak{H}$, если $\mathfrak{X}$ — один из следующих классов:

1) класс конечных групп;
2) класс конечных ассоциативных колец;
3) класс конечных лиевых колец;
4) класс конечных альтернативных колец;
5) класс конечных йордановых колец.

5.9. Теорема 3.11 является формационной модификацией применяемого в теории многообразий минимального представления алгебр с помощью оператора HSD (см. гл. 5 книги [52] и гл. 7 книги [1]).

5.10. Понятие короны конечной группы введено В. Гашюцом в работе [147].

5.11. Теоремы 3.36 и 3.37 для конечных групп доказаны А. Н. Скибой соответственно в работах [78] и [83].

5.12. Зафиксируем некоторую непустую конечную наследственную формацию мультиколец $\mathfrak{X}$. Назовем n-кратно локальную в $\mathfrak{X}$ формацию $\mathfrak{F}$ *однопорожденной*, если $\mathfrak{F}=\mathrm{l}_n\mathrm{form}_{\mathfrak{X}} A$ для некоторого мультикольца $A\in\mathfrak{X}$.

Будем говорить, что $\mathfrak{M}$—максимальная n-кратно локальная в $\mathfrak{X}$ подформация $\mathfrak{F}$, если $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{F}$ и для любой n-кратно локальной в $\mathfrak{X}$ формации $\mathfrak{H}$ с условием $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{H}\subset\mathfrak{F}$ имеет место $\mathfrak{H}=\mathfrak{M}$.

Лемма 1. *Пусть $\{\mathfrak{F}_i\mid i\in I\}$—произвольная цепь n-кратно локальных в $\mathfrak{X}$ формаций. Тогда формация $\mathfrak{F}=\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i$ n-кратно локальна в $\mathfrak{X}$.*

Доказательство. Лемму докажем индукцией по n. Основание индукции тривиально. Пусть $n\geqslant 1$ и f_i—минимальный $(n-1)$-кратно локальный экран формации $\mathfrak{F}_i$, $i\in I$. Тогда по следствию 3.42 $\{f_i\mid i\in I\}$—такая цепь экранов, что вложение $f_i\leqslant f_j$ имеет место в точности тогда, когда имеет место включение $\mathfrak{F}_i\subseteq\mathfrak{F}_j$. Значит, по лемме 2.15

$$\mathfrak{F}=\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i=\langle f\rangle,\text{ где } f=\bigcup_{i\in I}f_i.$$

По индукции всякое значение экрана f является $(n-1)$-кратно локальной формацией. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{M}$—произвольная собственная n-кратно локальная в $\mathfrak{X}$ подформация однопорожденной n-кратно локальной в $\mathfrak{X}$ формации $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{M}$ содержится в некоторой максимальной n-кратно локальной в $\mathfrak{X}$ подформации $\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}=\mathrm{l}_n\mathrm{form}\, G$. Обозначим через Ω множество всех собственных n-кратно локальных в $\mathfrak{X}$ подформаций формации $\mathfrak{F}$. Пусть $\{\mathfrak{F}_i\mid i\in I\}$—произвольная цепь из Ω и $\mathfrak{H}=\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i$. Тогда $\mathfrak{H}\in\Omega$, и поэтому по лемме Цорна $\mathfrak{M}$ входит в некоторый максимальный элемент из Ω. Лемма доказана.

Используя лемму 2.16, легко убедиться, что пересечение любого множества тотально локальных в $\mathfrak{X}$ формаций снова является тотально локальной в $\mathfrak{X}$ формацией. Пусть $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X}$. Тогда пересечение всех тех тотально локальных в $\mathfrak{X}$ формаций, которые содержат совокупность мультиколец $\mathfrak{H}$, является наименьшей по включению тотально локальной в $\mathfrak{X}$ формацией, содержащей $\mathfrak{H}$. Такую формацию мы будем обозначать через $\mathfrak{l}_\infty \mathrm{form}_\mathfrak{X} \mathfrak{H}$ (или через $\mathfrak{l}_\infty \mathrm{form}\, \mathfrak{H}$, если класс $\mathfrak{X}$ каким-либо образом зафиксирован) и назовем тотально локальной в $\mathfrak{X}$ формацией, порожденной $\mathfrak{H}$. В случае, когда $\mathfrak{H} = \{A\}$, формацию $\mathfrak{l}_\infty \mathrm{form}_\mathfrak{X} \mathfrak{H}$ назовем однопорожденной тотально локальной в $\mathfrak{X}$ формацией.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{X}$—некоторая конечная наследственная формация мультиколец, $\mathfrak{F}$—однопорожденная разрешимая тотально локальная в $\mathfrak{X}$ формация. Тогда в $\mathfrak{F}$ имеется лишь конечное множество тотально локальных в $\mathfrak{X}$ подформаций.*

Эта теорема может быть доказана аналогично теореме 3.44.

5.13. Теорема 3.47 доказана Брайантом, Брайсом и Хартли в их совместной работе [127]. Теорема 3.49 в случаях, когда $n=0, 1$, доказана А. Н. Скибой в работе [83].

5.14. Формацию $\mathfrak{F}$ назовем *минимальной*, если всегда из $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ следует, что формация $\mathfrak{H}$ совпадает с $\mathfrak{F}$.

5.15. Проблема. Верно ли, что всякая конечная формация алгебраических систем обладает минимальными подформациями?

5.16. Проблема. Верно ли, что всякая конечная однопорожденная формация алгебраических систем имеет лишь конечное множество минимальных подформаций?

5.17. Идея задания наследственных формаций с помощью тождеств восходит к работе Брандля [123], посвященной конечным группам. В этой работе конечные наследственные формации групп получили название конечных многообразий. Там же доказано, что если $\mathfrak{F}$—произвольное конечное многообразие, то найдется такая последовательность тождеств $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$, что конечная группа A принадлежит $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда существует такой номер k, что в A выполнено тождество v_i при любом $i \geqslant k$. Отметим также, что теорема 4.6, доказанная в [93], является расширением одного из результатов работы [123].

5.18. Класс конечных групп $\mathfrak{F}$ назовем *конечным квазимногообразием*, если найдется такая последовательность квазитождеств

$$v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_t,\ \ldots, \qquad (\alpha)$$

что конечная группа A принадлежит $\mathfrak{F}$ в том и только в том случае, когда в A выполнены почти все квазитождества из (α).

Используя известный результат А. Ю. Ольшанского [53] о конечно базируемых квазимногообразиях групп и соображения из доказательства теоремы 4.4, можно доказать следующую теорему.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой класс конечных групп с абелевыми силовскими подгруппами. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *$\mathfrak{F}$ — конечное квазимногообразие;*

2) *класс $\mathfrak{F}$ наследственен и замкнут относительно взятия конечных декартовых произведений.*

ГЛАВА 2

АЛГЕБРА ФОРМАЦИЙ

§ 6. Мальцевское и репличное умножения классов алгебраических систем

Основные определения. Связь между мальцевским и репличным произведениями классов.

6.1. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольный класс алгебраических систем, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ — его подклассы. Тогда через $\mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\circ} \mathfrak{F}$ обозначают класс всех таких $\mathfrak{M}$-систем H, которые обладают такой конгруэнцией π, что факторсистема H/π принадлежит $\mathfrak{F}$, а все смежные классы $a\pi$ $(a \in H)$, являющиеся $\mathfrak{M}$-системами, принадлежат $\mathfrak{H}$. Класс $\mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\circ} \mathfrak{F}$ называют *мальцевским $\mathfrak{M}$-произведением* классов $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$.

6.2. Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольный непустой класс алгебраических систем. Если конгруэнция π алгебраической системы A такова, что $A/\pi \in \mathfrak{F}$ и для всякой конгруэнции φ системы A условие $A/\varphi \in \mathfrak{F}$ влечет $\pi \subseteq \varphi$, то факторсистему A/π будем называть *$\mathfrak{F}$-репликой* системы A.

Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольный класс алгебраических систем, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ — его подклассы. Обозначим через $\mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F}$ и назовем *репличным $\mathfrak{M}$-произведением* классов $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ совокупность всех таких $\mathfrak{M}$-систем A, что A обладает $\mathfrak{F}$-репликой A/π и все смежные классы $a\pi$ $(a \in A)$, являющиеся $\mathfrak{M}$-системами, принадлежат $\mathfrak{H}$.

Если никакая $\mathfrak{M}$-система не имеет $\mathfrak{F}$-реплики, то класс $\mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F}$ пуст. Может случиться так, что $\mathfrak{M}$-система A имеет $\mathfrak{F}$-реплику A/π, но ни один смежный класс $a\pi$ не является $\mathfrak{M}$-системой; в этом случае по определению A входит в $\mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F}$.

6.3. Теорема. *Пусть $\mathfrak{M}$ — нормально наследственный класс, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ — его подклассы, причем класс $\mathfrak{H}$ нормально наследственен в $\mathfrak{M}$ и всякая $\mathfrak{M}$-система обладает $\mathfrak{F}$-репликой. Тогда*

$$\mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F} = \mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\circ} \mathfrak{F}. \qquad (1)$$

Доказательство. Пусть $A \in \mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\circ} \mathfrak{F}$ и конгруэнция π алгебраической системы A такова, что $A/\pi \in \mathfrak{F}$, а всякий смежный класс $a\pi$ ($a \in A$), принадлежащий $\mathfrak{M}$, входит в $\mathfrak{H}$. По условию A обладает $\mathfrak{F}$-репликой A/φ. Пусть смежный класс $a\varphi$ ($a \in A$) принадлежит $\mathfrak{M}$. Тогда поскольку $\varphi \subseteq \pi$, то $a\varphi \subseteq a\pi$, поэтому $a\pi$ — подсистема алгебраической системы A. Так как $A \in \mathfrak{M}$ и класс $\mathfrak{M}$ нормально наследственен, то $a\pi \in \mathfrak{M}$. Следовательно, $a\pi \in \mathfrak{H}$. Но класс $\mathfrak{H}$ нормально наследственен в $\mathfrak{M}$. Значит, $a\varphi \in \mathfrak{H}$. Таким образом, $A \in \mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F}$. Итак, $\mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\circ} \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F}$. Обратное включение очевидно. Следовательно, имеет место равенство (1). Теорема доказана.

6.4. Рассмотрим теперь пример, показывающий, что в общем случае равенство (1) из 6.3 может оказаться неверным. Пусть $\mathfrak{H} = \mathrm{form}\, S_3$, где S_3 — симметрическая группа степени 3, $\mathfrak{F}$ — формация групп экспоненты 2 и $\mathfrak{M}$ — класс всех групп. Очевидно, $S_3 \in \mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\circ} \mathfrak{F}$. Пусть R — силовская 3-подгруппа из S_3. Тогда S_3/R — $\mathfrak{F}$-реплика группы S_3. Но ввиду теоремы 3.37 $R \notin \mathfrak{H}$. Значит, $S_3 \notin \mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F}$, т. е.

$$\mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\circ} \mathfrak{F} \neq \mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F}.$$

Свойства $\mathfrak{M}$-произведений. Опишем некоторые свойства мальцевского и репличного $\mathfrak{M}$-умножения классов.

6.5. Теорема. *Пусть класс $\mathfrak{X}$ нормально наследственен в классе $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{F}$ — некоторые подклассы из $\mathfrak{X}$. Тогда справедливы следующие равенства:*

$$\mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\circ} \mathfrak{F} \cap \mathfrak{X} = \mathfrak{H} \underset{\mathfrak{X}}{\circ} \mathfrak{F}, \qquad \mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F} \cap \mathfrak{X} = \mathfrak{H} \underset{\mathfrak{X}}{\cdot} \mathfrak{F}.$$

Установим справедливость второго равенства. Пусть $A \in \mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F} \cap \mathfrak{X}$, A/π — $\mathfrak{F}$-реплика системы A. Если смежный класс $a\pi$ ($a \in A$) принадлежит $\mathfrak{X}$, то по условию он входит в $\mathfrak{M}$, а значит, и в $\mathfrak{H}$. Следовательно, $A \in \mathfrak{H} \underset{\mathfrak{X}}{\cdot} \mathfrak{F}$, т. е. $\mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F} \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H} \underset{\mathfrak{X}}{\cdot} \mathfrak{F}$. Обратно, пусть $A \in \mathfrak{H} \underset{\mathfrak{X}}{\cdot} \mathfrak{F}$ и A/π — $\mathfrak{F}$-реплика A. Предположим, что смежный класс $a\pi$ принадлежит классу $\mathfrak{M}$. Тогда ввиду нормальной наследственности класса $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{M}$ подсистема $a\pi$ входит в $\mathfrak{X}$. Следовательно, $a\pi \in \mathfrak{H}$. Это означает, что $A \in \mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{H} \underset{\mathfrak{X}}{\cdot} \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F} \cap \mathfrak{X}$.

Таким образом, имеет место равенство

$$\mathfrak{H} \underset{\mathfrak{X}}{\cdot} \mathfrak{F} = \mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F} \cap \mathfrak{X}.$$

Аналогично доказывается и первое равенство.

6.6. Теорема. *Пусть $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ — наследственные подклассы наследственного класса алгебр $\mathfrak{M}$, причем класс $\mathfrak{F}$ абстрактен. Тогда имеют место следующие утверждения:*

1) *если всякая $\mathfrak{M}$-алгебра имеет $\mathfrak{F}$-реплику, то класс $\mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F}$ наследственен;*

2) *класс $\mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\circ} \mathfrak{F}$ наследственен.*

Доказательство. Пусть $A \in \mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F}$, A_1 — подалгебра алгебры A и A/π — ее $\mathfrak{F}$-реплика. Тогда поскольку $\pi A_1/\pi \simeq A_1/A_1^2 \cap \pi$ и класс $\mathfrak{F}$ наследственен, то $A_1/A_1^2 \cap \pi \in \mathfrak{F}$. Предположим, что алгебра A_1 обладает $\mathfrak{F}$-репликой A_1/φ. Тогда $\varphi \subseteq A_1^2 \cap \pi$. Пусть для некоторого $a \in A_1$ смежный класс $a\varphi$ есть $\mathfrak{M}$-алгебра. Так как $a\varphi \subseteq a\pi$, то $a\pi$ — подалгебра алгебры A. Из наследственности класса $\mathfrak{M}$ вытекает, что $a\pi \in \mathfrak{M}$, и поэтому $a\pi \in \mathfrak{H}$. Поскольку в свою очередь наследственен класс $\mathfrak{H}$ и $a\varphi$ — подалгебра $\mathfrak{H}$-алгебры $a\pi$, то $a\varphi \in \mathfrak{H}$. Значит, $A_1 \in \mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F}$. Таким образом, если каждая $\mathfrak{M}$-алгебра обладает $\mathfrak{F}$-репликой, то класс $\mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F}$ наследственен.

Утверждение 2) доказывается аналогично.

Подкласс $\mathfrak{H}$ класса $\mathfrak{M}$ называется *мультипликативно замкнутым в* $\mathfrak{M}$, если каждая $\mathfrak{M}$-система, изоморфная декартову произведению $\mathfrak{H}$-систем, принадлежит $\mathfrak{H}$. Класс алгебраических систем называется *мультипликативно замкнутым*, если он мультипликативно замкнут в классе всех алгебраических систем его сигнатуры.

6.7. Теорема. *Пусть $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$ — абстрактные классы алгебраических систем, причем $\mathfrak{H} \cup \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$, класс $\mathfrak{F}$ мультипликативно заткнут, а класс $\mathfrak{H}$ мультипликативно замкнут в $\mathfrak{M}$. Тогда если класс $\mathfrak{M}$ нормально наследственен, то класс $\mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\circ} \mathfrak{F}$ мультипликативно замкнут в $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Пусть $A \in \mathfrak{M}$, $A = \prod A_i$ $(i \in I)$ и $A_i \in \mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\circ} \mathfrak{F}$. Для всякого $i \in I$ через θ_i обозначим такую конгруэнцию на A_i, что $A_i/\theta_i \in \mathfrak{F}$ и условие $a_i\theta_i \in \mathfrak{M}$ $(a_i \in A_i)$ влечет $a_i\theta_i \in \mathfrak{H}$. Для всякого $a \in A$ определим $\varphi(a)$ как такой элемент из $\prod (A_i/\theta_i)\,(i \in I)$, что $\varphi(a)(i) = a(i)\theta_i$ для всякого $i \in I$. Пусть θ — ядерная конгруэнция гомоморфизма φ. Так как гомоморфизм φ сильный, то

$$A/\theta \simeq \prod (A_i/\theta_i), \quad i \in I.$$

Поскольку класс $\mathfrak{F}$ мультипликативно замкнут, то последнее означает, что $A/\theta \in \mathfrak{F}$.

Пусть для некоторого $a \in A$ смежный класс $a\theta$ принадлежит классу $\mathfrak{M}$. Тогда для всякого $i \in I$ смежный класс $a(i)\theta_i$ — подсистема системы A_i. Но $A_i \in \mathfrak{M}$ и класс $\mathfrak{M}$ нормально наследственен. Значит, $a(i)\theta_i \in \mathfrak{H}$. Система $a\theta$ есть декартово произведение систем $a(i)\theta_i$. Следовательно, поскольку класс $\mathfrak{H}$ мультипликативно замкнут в $\mathfrak{M}$, то $a\theta \in \mathfrak{H}$. Таким образом, $A \in \mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\circ} \mathfrak{F}$. Поскольку по условию классы $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$ абстрактны, то всякая алгебраическая система, изоморфная системе A, также принадлежит классу $\mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\circ} \mathfrak{F}$. Теорема доказана.

Следующий пример из работы [47] показывает, что не всегда мальцевское (репличное) произведение двух полуформаций является полуформацией.

6.8. Пример. Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие полугрупп с (сигнатурной) единицей e и $\mathfrak{A}$ — подмногообразие всех коммутативных полугрупп в $\mathfrak{M}$. Пусть F — свободная в $\mathfrak{M}$ полугруппа со свободными порождающими a, b. Фактор-полугруппа F/σ по конгруэнции σ, определенной соотношением

$$a^{m_1}b^{n_1}\ldots a^{m_k}b^{n_k}\sigma a^{p_1}b^{q_1}\ldots a^{p_t}b^{q_t} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow m_1 + \ldots + m_k = p_1 + \ldots + p_t,$$

является коммутативной полугруппой с одним порождающим $a\sigma$, а поэтому $F/\sigma \in \mathfrak{A}$. Так как единица e является сигнатурным элементом в $\mathfrak{M}$, то лишь те смежные классы $x\sigma$ принадлежат $\mathfrak{M}$, которые содержат e. Но таких классов лишь один: $e\sigma = \{e, b, b^2, \ldots\}$, и он является коммутативной полугруппой. Поэтому $F \in \mathfrak{A} \underset{\mathfrak{M}}{\circ} \mathfrak{A}$. Пусть A_5 — знакопеременная группа степени 5. Так как A_5 порождается двумя элементами, то A_5 является гомоморфным образом F. С другой стороны, A_5 не принадлежит $\mathfrak{A} \underset{\mathfrak{M}}{\circ} \mathfrak{A}$. Следовательно, класс $\mathfrak{A} \underset{\mathfrak{M}}{\circ} \mathfrak{A}$ не является полуформацией.

$\mathfrak{M}$-произведение в поляризованных классах.

6.9. *Полярной операцией* в алгебраической системе A называется термальная (т. е. выразимая термом) унарная операция $e(x)$, удовлетворяющая условиям: 1) $e(x)=e(y)=e_A$ для любых $x, y \in A$; 2) $F(e_A, \ldots, e_A)=e_A$ для любой сигнатурной операции F. Элемент e_A называется *полюсом* системы A. *Полярой* класса $\mathfrak{M}$ называется унарный терм, представляющий в каждой $\mathfrak{M}$-системе полярную операцию. Класс алгебраических систем, обладающий хотя бы одной полярой, называется *поляризованным*.

Многообразия луп и групп поляризованы. Полюсами групп и луп являются их единичные элементы. Многообразие колец в сигнатуре $\{—, \cdot\}$ имеет поляру $x—x$.

Понятно, что каждый полюс алгебраической системы A образует одноэлементную подсистему и каждая подсистема системы A содержит все ее полюсы. Поэтому каждая система может иметь не более одного полюса. Отметим также, что если e_A—полюс системы A и φ: $A \longrightarrow B$—гомоморфизм, то $\varphi(e_A)$—полюс системы B. Если θ—некоторая конгруэнция на A, то из смежных классов A/θ класс $e_A\theta$ и только он один является подсистемой системы A/θ.

Непустую полуформацию алгебр $\mathfrak{F}$ назовем *мальцевской*, если она поляризована и во всех $\mathfrak{F}$-алгебрах конгруэнции перестановочны.

6.10. Лемма. *Пусть $\mathfrak{F}$—непустая полуформация и алгебраическая система A обладает $\mathfrak{F}$-репликой A/θ. Тогда для любой конгруэнции τ на A факторсистема $(A/\tau)/(\theta\vee\tau/\tau)$—$\mathfrak{F}$-реплика системы A/τ.*

Доказательство. Ввиду изоморфизмов

$$(A/\tau)/(\theta\vee\tau/\tau) \simeq A/\theta\vee\tau \simeq (A/\theta)/(\theta\vee\tau/\theta)$$

и H-замкнутости класса имеем $\mathfrak{F}$ $(A/\tau)/(\theta\vee\tau/\tau) \in \mathfrak{F}$. Пусть теперь φ/τ—такая конгруэнция на A/τ, что

$$(A/\tau)/(\varphi/\tau) \simeq A/\varphi \in \mathfrak{F}.$$

Тогда $\theta \subseteq \varphi$. Значит, $\theta\vee\tau/\tau \subseteq \varphi/\tau$. Таким образом, $(A/\tau)/(\theta\vee\tau/\tau)$—$\mathfrak{F}$-реплика системы A/τ.

6.11. Теорема. *Пусть $\mathfrak{M}$—мальцевская нормально наследственная полуформация, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$—полуформации, входящие в $\mathfrak{M}$. Тогда класс $\mathfrak{H}\underset{\mathfrak{M}}{\cdot}\mathfrak{F}$ также является полуформацией.*

Доказательство. Пусть $A \in \mathfrak{X} = \mathfrak{H}\underset{\mathfrak{M}}{\cdot}\mathfrak{F}$, A/θ—$\mathfrak{F}$-реплика алгебры A и e—ее полюс. Тогда $e\theta$—подалгебра алгебры A и эта подалгебра принадлежит классу $\mathfrak{H}$. Пусть τ—произвольная конгруэнция на A. По лемме 6.10 $(A/\tau)/(\theta\tau/\tau)$—$\mathfrak{F}$-реплика алгебры A/τ. Смежный класс $e\theta$ является полюсом в A/τ. При этом $[e\tau](\theta\tau/\tau)=[e\theta]\tau/\tau \simeq e\theta/\tau \cap (e\theta)^2$. Так как класс $\mathfrak{H}$—полуформация и $e\theta \in \mathfrak{H}$, то последнее означает, что $[e\tau](\theta\tau/\tau) \in \mathfrak{H}$. Следовательно, поскольку $\mathfrak{M}$—полуформация, то $A/\tau \in \mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{X}$—полуформация. Теорема доказана.

Ввиду теоремы Биркгофа, из теорем 6.3, 6.6, 6.7 и 6.11 вытекает следующее утверждение.

6.12. Теорема. *Для любых двух подмногообразий $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ поляризованного мальцевского многообразия $\mathfrak{M}$ класс $\mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\circ} \mathfrak{F}$ является многообразием.*

6.13. Лемма. *Пусть всякой $\mathfrak{F}$-алгебре A ($\mathfrak{F}$—непустая формация) сопоставлена такая ее совокупность изоморфных подалгебр $\alpha(A)$, что для всякой алгебры $H \in \alpha(A)$ и для любого гомоморфизма φ алгебры A имеет место $H^\varphi \in \alpha(A^\varphi)$. Тогда если B—алгебра, принадлежащая формации, порожденной непустым классом $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, то $\alpha(B) \subseteq \operatorname{form} \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H} = \bigcup_{R \in \mathfrak{X}} \alpha(R)$.*

Доказательство. По лемме 3.2 формация, порожденная классом $\mathfrak{X}$, совпадает с $\mathrm{HR}_0(\mathfrak{X})$. Следовательно, B является гомоморфным образом некоторой алгебры $M \in \mathrm{R}_0(\mathfrak{X})$. Пусть $P \in \alpha(B)$ и $L \in \alpha(M)$. Тогда P является гомоморфным образом алгебры L. Некоторая система конгруэнций $\pi_1, \ldots, \pi_n$ алгебры M обладает тем свойством, что $\pi_1 \cap \ldots \cap \pi_n$—нулевая конгруэнция на M и $M/\pi_i \in (\mathfrak{X})$, $i=1, \ldots, n$. Пусть $\varphi_i = L^2 \cap \pi_i$. Тогда поскольку $L/\varphi_i \simeq \pi_i L/\pi_i$ и по условию $\pi_i L/\pi_i \in \alpha(M/\pi_i)$, то $L/\varphi_i \in \operatorname{form} \mathfrak{H}$. С другой стороны, поскольку $\varphi_1 \cap \ldots \cap \varphi_n$—нулевая конгруэнция алгебры L, то L изоморфна поддекартову произведению алгебр $L/\varphi_1, \ldots, L/\varphi_n$. Значит, $L \in \operatorname{form} \mathfrak{H}$. Последнее означает, что $P \in \operatorname{form} \mathfrak{H}$. Лемма доказана.

6.14. Теорема. *Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$—подформации мальцевской нормально наследственной формации $\mathfrak{M}$, причем каждая $\mathfrak{X}$-алгебра имеет $\mathfrak{F}$-реплику. Тогда $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F} \cap \mathfrak{X}$ является формацией.*

Доказательство. Для всякой $\mathfrak{X}$-алгебры A положим $\alpha(A)=\{e\pi\}$, где e—полюс алгебры A, а π—такая ее конгруэнция, что A/π—$\mathfrak{F}$-реплика A. По лемме 6.10 для любой конгруэнции φ алгебры A $(A/\varphi)/(\pi\varphi/\varphi)$—$\mathfrak{F}$-реплика алгебры A/φ. При этом $e\varphi$ — полюс алгебры A/φ. **Значит,** $[e\varphi]\pi\varphi/\varphi=[e\pi]\varphi/\varphi$. Последнее означает, что отображение $\psi\colon A\to\alpha(A)$ удовлетворяет условию леммы 6.12. Таким образом, если

$$H\in\mathrm{form}(\mathfrak{H}\underset{\mathfrak{M}}{\cdot}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{X}),$$

то $\alpha(H)\subseteq\mathrm{form}\,\mathfrak{X}_1$, где $\mathfrak{X}_1=\bigcup\limits_{B\in\mathfrak{M}_1}\alpha(B)$. Но если $B\in\mathfrak{M}_1$, то $\alpha(B)\in\mathfrak{H}$. Следовательно, $\mathrm{form}\,\mathfrak{X}_1\subseteq\mathfrak{H}$, т. е. $H\in\mathfrak{M}_1$. Значит, класс $\mathfrak{H}\underset{\mathfrak{M}}{\cdot}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{X}$ — формация. Теорема доказана.

6.15. Следствие. *Пусть $\mathfrak{M}$ — нормально наследственная мальцевская формация, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ — ее подформации. Если каждая $\mathfrak{M}$-алгебра имеет $\mathfrak{F}$-реплику, то класс $\mathfrak{H}\underset{\mathfrak{M}}{\cdot}\mathfrak{F}$ является формацией.*

6.16. Следствие. *Пусть $\mathfrak{M}$ — нормально наследственная мальцевская формация, $\mathfrak{X}$ — совокупность всех конечных $\mathfrak{M}$-алгебр. Тогда для любых подформаций $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ из $\mathfrak{M}$ класс $(\mathfrak{H}\underset{\mathfrak{M}}{\cdot}\mathfrak{F})\cap\mathfrak{X}$ является формацией.*

$\mathfrak{M}$-произведение в трансхарактеристических классах. 6.17. Напомним, что факторсистема A/θ называется *характеристической*, если для каждого автоморфизма $\varphi\colon A\to A$ и каждого $P\in\{\Omega,\ =\}$ (здесь Ω — сигнатура системы A)

$$P(a_1\theta,\ \ldots,\ a_n\theta)\Rightarrow P(a_1\varphi\theta,\ \ldots,\ a_n\varphi\theta)\quad(a_1,\ \ldots,a_n\in A).$$

Пусть $\mathfrak{M}$ — фиксированный класс алгебраических систем, $A\in\mathfrak{M}$ и A/θ — какая-нибудь факторсистема, принадлежащая $\mathfrak{M}$. На каждом смежном классе $a_m\theta$, являющемся $\mathfrak{M}$-системой, зададим какой-нибудь фактор $a_m\theta/\beta_m\in\mathfrak{M}$. Тогда совокупность $\{a_m\theta/\beta_m\mid m\in M\}$ называется *частичным $\mathfrak{M}$-подфактором факторсистемы A/θ*. Частичный подфактор называется *характеристическим*, если он состоит из характеристических факторов.

Частичный подфактор $\{a_m\theta/\beta_m\mid m\in M\}$ называется *$\mathfrak{M}$-продолжаемым*, если все его факторы совместно продолжаемы до подходящего фактора $A/\beta\in\mathfrak{M}$ $(\beta\subseteq\theta)$, т. е. если

$$x\beta=x\beta_m\qquad(x\in a_m\theta)$$

и каноническое отображение $x\beta\mapsto x\beta_m$ $(x\in a_m\theta)$ есть изоморфизм $a_m\theta/\beta$ на $a_m\theta/\beta_m$.

Система $A\in\mathfrak{M}$ называется в классе $\mathfrak{M}$ *трансхарактеристической*, если каждый ее характеристический частичный $\mathfrak{M}$-подфактор характеристического $\mathfrak{M}$-фактора $\mathfrak{M}$-продолжаем.

Класс $\mathfrak{M}$ называется *трансхарактеристическим*, если каждая его система трансхарактеристична в $\mathfrak{M}$.

Характеристическая подгруппа нормального делителя каждой группы является нормальным делителем группы. Поэтому многообразие групп является трансхарактеристическим.

Многообразие всех ассоциативных колец не является трансхарактеристическим (пример, подтверждающий это, можно найти в работе [47]).

6.18. Теорема. *В наследственном трансхарактеристическом классе алгебр $\mathfrak{M}$ для любого его наследственного подкласса $\mathfrak{X}$ и любых подмногообразий $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{F}$ выполняется условие ассоциативности*

$$\mathfrak{X}\underset{\mathfrak{M}}{\circ}(\mathfrak{H}\underset{\mathfrak{M}}{\circ}\mathfrak{F}) = (\mathfrak{X}\underset{\mathfrak{M}}{\circ}\mathfrak{H})\underset{\mathfrak{M}}{\circ}\mathfrak{F}.$$

Доказательство. Покажем прежде, что в любом нормально наследственном классе алгебраических систем $\mathfrak{M}$ для любых его подклассов $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ истинно включение

$$\mathfrak{X}\underset{\mathfrak{M}}{\circ}(\mathfrak{H}\underset{\mathfrak{M}}{\circ}\mathfrak{F}) \subseteq (\mathfrak{X}\underset{\mathfrak{M}}{\circ}\mathfrak{H})\underset{\mathfrak{M}}{\circ}\mathfrak{F}.$$

Действительно, пусть $A \in \mathfrak{X}\underset{\mathfrak{M}}{\circ}(\mathfrak{H}\underset{\mathfrak{M}}{\circ}\mathfrak{F})$ и, следовательно, $A \in \mathfrak{M}$ и для подходящей факторсистемы A/θ имеем $A/\theta \in \mathfrak{H}\underset{\mathfrak{M}}{\circ}\mathfrak{F}$ и

$$a\theta \in \mathfrak{M} \Rightarrow a\theta \in \mathfrak{X}. \tag{1}$$

Условие $A/\theta \in \mathfrak{H}\underset{\mathfrak{M}}{\circ}\mathfrak{F}$ означает, что $A/\theta \in \mathfrak{M}$ и для некоторой факторсистемы $(A/\theta)/(\sigma/\theta)$ имеем $A/\sigma \in \mathfrak{F}$ и

$$a\sigma/\theta \in \mathfrak{M} \Rightarrow a\sigma/\theta \in \mathfrak{H}. \tag{2}$$

Пусть $a\sigma \in \mathfrak{M}$. Надо показать, что отсюда следует $a\sigma \in \mathfrak{X}\underset{\mathfrak{M}}{\circ}\mathfrak{H}$. Так как $a\sigma$—подсистема в A, то $a\sigma/\theta$ является подсистемой системы A/θ. Поскольку $A/\theta \in \mathfrak{M}$ и класс $\mathfrak{M}$ нормально наследственный, то $a\sigma/\theta \in \mathfrak{M}$. В силу (2) отсюда получаем $a\sigma/\theta \in \mathfrak{H}$, что в силу (1) дает $a\sigma \in \mathfrak{X}\underset{\mathfrak{M}}{\circ}\mathfrak{H}$.

Доказательство обратного включения

$$(\mathfrak{X}\underset{\mathfrak{M}}{\circ}\mathfrak{H})\underset{\mathfrak{M}}{\circ}\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}\underset{\mathfrak{M}}{\circ}(\mathfrak{H}\underset{\mathfrak{M}}{\circ}\mathfrak{F})$$

будет основано на жестких условиях теоремы 6.18. Пусть $A \in (\mathfrak{X}\underset{\mathfrak{M}}{\circ}\mathfrak{H})\underset{\mathfrak{M}}{\circ}\mathfrak{F}$ и A/γ—$\mathfrak{F}$-реплика алгебры A. Пусть

$\Lambda=\{a_m\gamma \mid m\in M\}$—множество всех тех смежных классов из A/γ, которые являются $\mathfrak{M}$-алгебрами. Если это множество пусто, то ввиду включения $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{H}\underset{\mathfrak{M}}{\circ}\mathfrak{F}$ имеем $A\in\mathfrak{X}\underset{\mathfrak{M}}{\circ}(\mathfrak{H}\underset{\mathfrak{M}}{\circ}\mathfrak{F})$. Пусть $\Lambda\neq\varnothing$. Ввиду теоремы 6.6 класс $\mathfrak{X}\underset{\mathfrak{M}}{\circ}\mathfrak{H}$ наследственен. Следовательно, поскольку $A\in(\mathfrak{X}\underset{\mathfrak{M}}{\circ}\mathfrak{H})\underset{\mathfrak{M}}{\circ}\mathfrak{F}$, то

$$\Lambda\subseteq\mathfrak{X}\underset{\mathfrak{M}}{\circ}\mathfrak{H}. \tag{3}$$

Обозначим через $a_m\gamma/\beta_m$ $\mathfrak{H}$-реплику алгебры $a_m\gamma$. Из условия (3) и наследственности класса $\mathfrak{X}$ следует, что

$$x\beta_m\in\mathfrak{M}\Rightarrow x\beta_m\in\mathfrak{X}\quad(x\in a_m\gamma). \tag{4}$$

Понятно, что факторалгебра A/γ и все факторалгебры $a_m\gamma/\beta_n$ характеристичны. Следовательно, ввиду трансхарактеристичности класса $\mathfrak{M}$ системы $\mathfrak{H}$-реплик $a_m\gamma/\beta_m$ должна иметь общее продолжение $A/\beta\in\mathfrak{M}$ $(\beta\subseteq\gamma)$, при котором $a_m\gamma/\beta\simeq a_m\gamma/\beta_m$, и если $x\beta\in\mathfrak{M}$, то найдется m такое, что $x\in a_m\gamma$ и $x\beta=x\beta_m$. Значит, чтобы показать, что $A\in\mathfrak{X}\underset{\mathfrak{M}}{\circ}(\mathfrak{H}\underset{\mathfrak{M}}{\circ}\mathfrak{F})$, в силу (4) достаточно установить $A/\beta\in\mathfrak{H}\underset{\mathfrak{M}}{\circ}\mathfrak{F}$. Но $(A/\beta)/(\gamma/\beta)\simeq A/\gamma\in\mathfrak{F}$, и поэтому надо показать лишь, что если $x\gamma/\beta\simeq[x\beta]\gamma/\beta\in\mathfrak{M}$, то $[x\beta]\gamma/\beta\in\mathfrak{H}$ $(x\in A)$.

Пусть $x\gamma/\beta\in\mathfrak{M}$. Так как $x\gamma$ является полным прообразом подалгебры $x\gamma/\beta\subseteq A/\beta$ при гомоморфизме $A\to(A/\beta)/(\gamma/\beta)$, то $x\gamma$—подалгебра алгебры $A\in\mathfrak{M}$. Из наследственности класса $\mathfrak{M}$ вытекает, что $x\gamma\in\mathfrak{M}$, и поэтому $x\gamma=a_m\gamma\in\mathfrak{X}\underset{\mathfrak{M}}{\circ}\mathfrak{H}$, откуда

$$x\gamma/\beta\simeq a_m\gamma/\beta_m\in\mathfrak{H},$$

что и требовалось. Теорема доказана.

6.19. Лемма. *Пусть A—алгебра, удовлетворяющая условию минимальности для конгруэнций, $\mathfrak{F}$—непустая формация. Тогда A обладает $\mathfrak{F}$-репликой.*

Доказательство. Пусть $\Lambda=\{\pi_i \mid i\in I\}$—множество всех таких конгруэнций π_i на алгебре A, что $A/\pi_i\in\mathfrak{F}$ и $\varphi\subset\pi_i$ всегда влечет $A/\varphi\notin\mathfrak{F}$. Множество Λ, очевидно, непусто. Пусть π, $\varphi\in\Lambda$. Тогда $A/\pi\cap\varphi\in R_0\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{F}$. Значит, $\pi\cap\varphi\in\Lambda$. Следовательно, $\pi=\varphi$ и A/π—$\mathfrak{F}$-реплика A. Лемма доказана.

6.20. Теорема. *Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$—подклассы нормально наследственной мальцевской трансхарактеристической формации $\mathfrak{M}$. Тогда если $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$—формации и всякая $\mathfrak{M}$-алгебра удовлетворяет условию минимальности для* *конгруэнций, то*

$$(\mathfrak{X} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{H}) \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F} = \mathfrak{X} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} (\mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F}). \tag{1}$$

Доказательство. Если хотя бы один из классов $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{F}$ пуст, то равенство (1) очевидно. Поэтому в дальнейшем будем считать, что все три класса непусты. Ввиду леммы 6.19 это, в частности, означает, что каждая алгебра из $\mathfrak{M}$ обладает $\mathfrak{H}$-репликой и $\mathfrak{F}$-репликой.

Пусть $A \in \mathfrak{M}$, e — полюс алгебры A, A/π — ее $\mathfrak{F}$-реплика. Тогда смежный класс $e\pi$ — подалгебра алгебры А. Ввиду того, что класс $\mathfrak{M}$ нормально наследственен, $e\pi \in \mathfrak{M}$. Пусть $e\pi/\varphi$ — $\mathfrak{H}$-реплика алгебры $e\pi$. Обе факторалгебры A/π и $e\pi/\varphi$ характеристичны, и поэтому по условию фактор $e\pi/\varphi$ обладает продолжением A/ψ, где

$$\psi \subseteq \pi, \quad x\psi = x\varphi \quad (x \in e\pi), \quad e\pi/\varphi \simeq e\pi/\psi. \tag{2}$$

Обозначим через τ пересечение всех конгруэнций алгебры A, удовлетворяющих условию 2). Покажем, что A/τ — $\mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F}$-реплика алгебры A. Ввиду леммы 6.10 $(A/\tau)/(\pi/\tau)$ — $\mathfrak{F}$-реплика факторалгебры A/τ. При этом, ввиду условия (2), $[e\tau]\,\pi/\tau = e\pi/\tau \in \mathfrak{H}$. Поскольку $A \in \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}$ — формация, то $A/\tau \in \mathfrak{M}$. Значит, $A/\tau \in \mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F}$. Предположим, что на A имеется такая конгруэнция τ_1, что $\tau_1 \subset \tau$ и $A/\tau_1 \in \mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F}$. Тогда $\tau_1 \subset \pi$. Следовательно,

$$[e\tau_1]\,\pi/\tau_1 = e\pi/\tau_1 \in \mathfrak{H}.$$

Значит, $\varphi \subseteq \tau_1 \cap [e\pi]^2$, и поэтому $\tau \cap [e\pi]^2 = \tau_1 \cap [e\pi]^2$. Последнее означает, что конгруэнция τ_1 удовлетворяет условию (2). Следовательно, $\tau \subseteq \tau_1$. Противоречие. Итак, для всякой конгруэнции τ_1 с условием $\tau_1 \subset \tau$ имеем $A/\tau_1 \notin \mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F}$. Ввиду условия теоремы, леммы 6.19 и следствия 6.15 класс $\mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F}$ — формация. Значит, алгебра A обладает $(\mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F})$-репликой A/γ. При этом строгое включение $\gamma \subset \tau$ невозможно. Следовательно, $\gamma = \tau$. Таким образом, A/τ — $(\mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F})$-реплика алгебры A.

Предположим, что $A \in (\mathfrak{X} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{H}) \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F}$. Тогда $e\pi \in \mathfrak{X} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{H}$ и $e\varphi = e\tau \in \mathfrak{X}$. Значит, $A \in \mathfrak{X} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} (\mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F})$, т. е.

$$(\mathfrak{X} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{H}) \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} (\mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F}). \tag{3}$$

Пусть теперь $A \in \mathfrak{X} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} (\mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F})$. Тогда $e\tau = e\varphi \in \mathfrak{M}$. Но $e\pi/\varphi$ — $\mathfrak{H}$-реплика алгебры $e\pi$. Значит, $e\pi \in \mathfrak{X} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{H}$. Это влечет $A \in (\mathfrak{X} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{H}) \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F}$, т. е.

$$\mathfrak{X} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} (\mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F}) \subseteq (\mathfrak{X} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{H}) \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F}. \tag{4}$$

Из включений (3) и (4) вытекает равенство (1). Теорема доказана.

6.21. Следствие. *Пусть $\mathfrak{M}$ — формация групп с композиционными рядами. Тогда для любых трех подформаций $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ из $\mathfrak{M}$ выполняется условие ассоциативности*

$$(\mathfrak{X} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{H}) \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F} = \mathfrak{X} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} (\mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F}).$$

6.22. Зафиксируем формацию $\mathfrak{G}$ всех конечных групп и для любых двух подформаций $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ из $\mathfrak{G}$ репличное $\mathfrak{G}$-произведение $\mathfrak{H} \underset{\mathfrak{G}}{\cdot} \mathfrak{F}$ будем называть просто *произведением формаций* $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ и обозначать через $\mathfrak{H} \cdot \mathfrak{F}$ или $\mathfrak{H}\mathfrak{F}$.

Множество всех формаций, входящих в $\mathfrak{G}$, рассматриваемое вместе с операцией $\cdot$, является ввиду следствия 6.21 полугруппой с нулем $\mathfrak{G}$ и единицей $\mathfrak{E}$. Такую полугруппу обозначим через $G\mathfrak{G}$. Полугруппа $G\mathfrak{G}$ обладает идемпотентами (таковым, например, является формация $\mathfrak{N}_p$ всех конечных p-групп для данного простого числа p). Следовательно, в отличие от полугруппы многообразий (см. [52]) полугруппа $G\mathfrak{G}$ не свободна.

Формацию $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}$ назовем *неразложимой*, если равенство $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}\mathfrak{X}$ возможно лишь при $\mathfrak{E} \in \{\mathfrak{H}, \mathfrak{X}\}$.

6.23. Проблема. Является ли свободной подполугруппа полугруппы $G\mathfrak{G}$, порожденная в ней неразложимыми формациями?

6.24. Проблема. Допускает ли всякая формация из $\mathfrak{G}$, не являющаяся идемпотентом в $G\mathfrak{G}$, представление в виде произведения конечного числа неразложимых формаций?

6.25. Проблема. Верно ли, что всякая формация, являющаяся идемпотентом в $G\mathfrak{G}$, не может быть представлена в виде произведения конечного числа неразложимых формаций?

6.26. Проблема. Какова формация $\mathfrak{M}$, если для любых ее двух подформаций $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ выполнено условие коммутативности

$$\mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F} = \mathfrak{F} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{H}.$$

§ 7. Произведение локальных формаций

7.1. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустая наследственная формация мультиколец, удовлетворяющих условиям минимальности и максимальности для подалгебр. Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная в $\mathfrak{X}$ формация, $\mathfrak{H}$ — непустая подформация $\mathfrak{X}$. При каких условиях формация $\mathfrak{F} \underset{\mathfrak{X}}{\cdot} \mathfrak{H}$ локальна в $\mathfrak{X}$? Этому вопросу посвящен настоящий параграф.

7.2. Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная в $\mathfrak{X}$ формация, $A \in \mathfrak{X}$. Будем говорить, что идеал N мультикольца A *$\mathfrak{F}$-вложен* в A, если A имеет такие идеалы

$$\{0\} = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \ldots \subseteq N_t = N,$$

что для любого $i \in \{1, \ldots, t\}$ имеет место

$$N/N \cap C_A(N_i/N_{i-1}) \in f(N_i/N_{i-1}),$$

где f — минимальный локальный $\mathfrak{X}$-экран формации $\mathfrak{F}$.

7.3. Лемма. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная в $\mathfrak{X}$ формация, $R \in \mathfrak{X}$. Пусть A и B — идеалы мультикольца R. Тогда идеал $A + B/A$ $\mathfrak{F}$-вложен в R/A в том и только в том случае, когда идеал $B/A \cap B$ $\mathfrak{F}$-вложен в $R/A \cap B$.*

Доказательство. Пусть H/K — такой нормальный фактор мультикольца R, что $A \cap B \subseteq K \subset H \subseteq B$ и $B/C_R(H/K) \cap B \in f(H/K)$. Ввиду леммы 2.7 факторы H/K и $H + A/K + A$ перспективны. Значит, эти факторы изоморфны и $C = C_R(H + A/K + A) = C_R(H/K)$. Следовательно, $f(H/K) = f(H + A/K + A)$. Кроме того, поскольку $C \cap (A + B) = A + (C \cap B)$, то

$$(A + B)/(C \cap (A + B)) \simeq B/(B \cap A) + (B \cap C) = B/B \cap C.$$

Значит,

$$(B + A)/(B + A) \cap C \in f(H + A/K + A).$$

Таким образом, если идеал $B/B \cap A$ $\mathfrak{F}$-вложен в $R/B \cap A$, то идеал $B + A/A$ $\mathfrak{F}$-вложен в R/A.

Предположим теперь, что идеал $B + A/A$ $\mathfrak{F}$-вложен в R/A. Пусть H/K — такой нормальный фактор R, что $A \subseteq K \subset H \subseteq A + B$ и $(B + A)/((B + A) \cap C) \in f(H/K)$, где $C = C_R(H/K)$. Тогда ввиду леммы 2.7 фактор H/K перспективен фактору $H \cap B/K \cap B$. Значит, $C = C_R(H \cap B/K \cap B)$ и $f(H/K) = f(H \cap B/K \cap B)$. Заметим, что

$$B/B \cap C \simeq B + C/C = (B + A) + C/C \simeq$$
$$\simeq (B + A)/((B + A) \cap C) \in f(H/K).$$

Следовательно, $B/B \cap C \in f(H \cap B/K \cap B)$. Это означает, что идеал $B/A \cap B$ $\mathfrak{F}$-вложен в $R/A \cap B$.

7.4. Лемма. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная в $\mathfrak{X}$ формация, A_1, A_2 и N — идеалы мультикольца $R \in \mathfrak{X}$. Тогда если $A_i \subseteq N$ и идеал N/A_i $\mathfrak{F}$-вложен в R/A_i, $i=1, 2$, то идеал $N/A_1 \cap A_2$ $\mathfrak{F}$-вложен в $R/A_1 \cap A_2$.*

Доказательство. Не теряя общности, можно положить $A_1 \cap A_2 = \{0\}$. Пусть H/K — произвольный R-главный фактор из N. Тогда по лемме 2.6 найдется такой R-главный фактор T/M, проективный фактору H/K, что $T \subseteq N$ и либо $A_1 \subseteq M$, либо $A_2 \subseteq M$. По условию $N/C_R(T/M) \cap N \in f(T/M)$. Значит, $N/C_R(H/K) \cap N \in f(H/K)$. Таким образом, идеал N $\mathfrak{F}$-вложен в R. Лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{H}$ — произвольная непустая подформация $\mathfrak{X}$. Обозначим через $\mathfrak{F}*\mathfrak{H}$ класс всех таких мультиколец $A \in \mathfrak{X}$, у которых $\mathfrak{H}$-корадикал $\mathfrak{F}$-вложен в A.

7.5. Теорема. *Пусть $\mathfrak{H}$ — непустая подформация $\mathfrak{X}$, f_1 — минимальный локальный $\mathfrak{X}$-экран формации $\mathfrak{F}$. Обозначим через f такой локальный $\mathfrak{X}$-экран, что $f(A) = f_1(A) \underset{\mathfrak{X}}{\cdot} \mathfrak{H}$ для всякого $A \in \tau(\mathfrak{F})$ и $f(A) = \varnothing$, если $A \in \tau(\mathfrak{X}) \setminus \tau(\mathfrak{F})$. Тогда если $\tau(\mathfrak{H}) \subseteq \tau(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{F}*\mathfrak{H} = \langle f \rangle$.*

Доказательство. Докажем сначала, что $\mathfrak{F}*\mathfrak{H} \subseteq \subseteq \langle f \rangle$. Предположим, что $\mathfrak{F}*\mathfrak{H} \setminus \langle f \rangle \neq \varnothing$, и выберем в классе $\mathfrak{F}*\mathfrak{H} \setminus \langle f \rangle$ мультикольцо A с главным рядом наименьшей возможной длины. Ввиду теоремы 2.9 класс $\langle f \rangle$ — формация. Значит, A монолитично и $L = A^{\langle f \rangle}$ — минимальный идеал A. Легко видеть, что $\mathfrak{H} \subseteq \langle f \rangle$ и поэтому $A^{\mathfrak{H}} \neq \{0\}$, т. е. $L \subseteq A^{\mathfrak{H}}$. Пусть $C = C_A(L)$. Поскольку $A \in \mathfrak{F}*\mathfrak{H}$, то ввиду лемм 2.5 и 2.8 имеет место $A^{\mathfrak{H}}/A^{\mathfrak{H}} \cap \cap C \in f_1(L)$. Следовательно, $C + A^{\mathfrak{H}}/C \in f_1(L)$. Поскольку $C + A^{\mathfrak{H}}/C = (A/C)^{\mathfrak{H}}$, то последнее означает, что $A/C \in f_1(L)\mathfrak{H}$. Так как при этом справедливо

$$f_1(L)\mathfrak{H} = \Big(\bigcap_{B \in \tau(L)} f_1(B)\Big)\mathfrak{H} = \bigcap_{B \in \tau(L)} (f_1(B)\mathfrak{H}) = f(L),$$

то $A/C \in f(L)$, т. е. L f-централен в A. Но $A/L \in \langle f \rangle$. Значит, $A \in \langle f \rangle$. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{F}*\mathfrak{H} \subseteq \langle f \rangle$.

Покажем теперь, что $\langle f \rangle \subseteq \mathfrak{F}*\mathfrak{H}$. Предварительно докажем, что класс $\mathfrak{F}*\mathfrak{H}$ — формация.

Пусть $A \in \mathfrak{F}*\mathfrak{H}$ и N — идеал A. Тогда $(A/N)^{\mathfrak{H}} = A^{\mathfrak{H}} + N/N$. Понятно, что идеал $A^{\mathfrak{H}}/A^{\mathfrak{H}} \cap N$ $\mathfrak{F}$-вложен в $A/A^{\mathfrak{H}} \cap N$. Значит, по лемме 7.3 идеал $(A/N)^{\mathfrak{H}}$ $\mathfrak{F}$-вложен в A/N, т. е. $A/N \in \mathfrak{F}*\mathfrak{H}$. Следовательно, класс $\mathfrak{F}*\mathfrak{H}$ — полуформация.

Пусть $A/N_i \in \mathfrak{F}*\mathfrak{H}$, $i=1, 2$. Покажем, что $A/N_1 \cap N_2 \in \in \mathfrak{F}*\mathfrak{H}$. Не теряя общности, положим, что $N_1 \cap N_2 = \{0\}$. Поскольку $(A/N_i)^{\mathfrak{H}} = A^{\mathfrak{H}} + N_i/N_i$, то ввиду леммы 7.3 идеал $A^{\mathfrak{H}}/N_i \cap A^{\mathfrak{H}}$ $\mathfrak{F}$-вложен в $A/N_i \cap A^{\mathfrak{H}}$. Следовательно, по лемме 7.4 идеал $A^{\mathfrak{H}}$ $\mathfrak{F}$-вложен в A, т. е. $A \in \mathfrak{F}*\mathfrak{H}$. Значит, класс $\mathfrak{F}*\mathfrak{H}$ — формация.

Предположим, что $\langle f \rangle \not\subseteq \mathfrak{F}*\mathfrak{H}$. Выберем в $\langle f \rangle \setminus \mathfrak{F}*\mathfrak{H}$ мультикольцо A с главным рядом наименьшей возможной длины. Тогда A монолитично и $L = A^{\mathfrak{F}*\mathfrak{H}}$ — минимальный идеал A. Поскольку $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}*\mathfrak{H}$, то $A^{\mathfrak{H}} \neq \{0\}$, $L \subseteq A^{\mathfrak{H}}$. Так как $A \in \langle f \rangle$, то L f-централен в A, т. е. $A/C \in f(L)$, где $C = C_A(L)$. Понятно, что $f(L) = f_1(L)\mathfrak{H}$. Следовательно, поскольку $(A/C)^{\mathfrak{H}} = A^{\mathfrak{H}} + C/C$, то

$$A^{\mathfrak{H}} + C/C \simeq A^{\mathfrak{H}}/A^{\mathfrak{H}} \cap C \in f_1(L).$$

Вспоминая также, что $A/L \in \mathfrak{F}*\mathfrak{H}$, т. е. идеал $(A/L)^{\mathfrak{H}} = A^{\mathfrak{H}}/L$ $\mathfrak{F}$-вложен в A/L, заключаем, что идеал $A^{\mathfrak{H}}$ $\mathfrak{F}$-вложен в A. Значит, $A \in \mathfrak{F}*\mathfrak{H}$. Противоречие. Следовательно, $\langle f \rangle \subseteq \mathfrak{F}*\mathfrak{H}$, и поэтому $\mathfrak{F}*\mathfrak{H} = \langle f \rangle$. Теорема доказана.

7.6. Следствие. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная в $\mathfrak{X}$ формация, $\mathfrak{H}$ — непустая подформация $\mathfrak{X}$. Тогда если $\tau(\mathfrak{H}) \subseteq \tau(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{F}*\mathfrak{H}$ — формация, локальная в $\mathfrak{X}$.*

7.7. Зафиксируем теперь в качестве $\mathfrak{X}$ класс всех конечных групп $\mathfrak{G}$. Все рассматриваемые в дальнейшем в данном параграфе формации предполагаются входящими в $\mathfrak{G}$.

Так как всякая минимальная группа $A \in \mathfrak{G}$ имеет простой порядок и всякие две группы данного простого порядка изоморфны, то при задании локального $\mathfrak{G}$-экрана f удобно общее значение экрана на группах, изоморфных группе A, обозначать через $f(|A|)$.

Для всякого класса групп $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{G}$ символом $\pi(\mathfrak{H})$ будем обозначать множество всех простых делителей порядков групп из $\mathfrak{H}$. Если π — некоторое множество простых чисел, то через π' будем обозначать дополнение ко множеству π в множестве всех простых чисел, а через $\mathfrak{N}_\pi$ — класс всех нильпотентных π-групп. Для краткости мы будем писать $\pi'(\mathfrak{F})$ вместо $(\pi(\mathfrak{F}))'$.

7.8. Лемма. *Пусть f — композиционный экран формации $\mathfrak{F}$, M — нормальная подгруппа конечной группы G. Тогда если $M \in \mathfrak{F}$, то каждый G-главный фактор из M f-централен в M.*

Доказательство. Пусть H/K — произвольный G-главный фактор из M. Предположим, что $K \neq \{1\}$. Тогда

M/K содержится в $\mathfrak{F}$ и по индукции $(M/K)/C_{M/K}(H/K)\in \in f(H/K)$. Но

$$C_{M/K}(H/K)=C_{G/K}(H/K)\cap M/K = \\ = C_G(H/K)/K \cap M/K = (C_G(H/K)\cap M)/K.$$

Следовательно, $M/C_M(H/K)\in f(H/K)$, т. е. фактор H/K f-централен в M.

Пусть теперь $K=\{1\}$, т. е. H — минимальная нормальная подгруппа группы G. Пусть L_1 — минимальная нормальная подгруппа группы M, содержащаяся в H. Тогда, очевидно, H представима в виде произведения $H=L_1\dots L_n$, где L_i сопряжена с L_1 в G для любого i. Очевидно, L_i — минимальная нормальная подгруппа в M, причем $f(L_i)= = f(H)$. Так как $M\in\mathfrak{F}$, то $M/C_M(L_i)\in f(L_1)$. Таким образом, получаем

$$M/C_M(L_1)\cap\dots\cap C_M(L_n)\in f(H).$$

Но тогда $M/C_M(H)\in f(H)$, так как $C_M(L_1)\cap\dots\cap C_M(L_n)$ содержится в $C_M(H)$. Лемма доказана.

7.9. Теорема. *Пусть f_1 — композиционный экран формации $\mathfrak{F}$, h — внутренний композиционный экран формации $\mathfrak{H}$, и пусть $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})}\subseteq\mathfrak{F}$. Тогда формация $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ имеет композиционный экран f такой, что для любой простой группы H справедливы следующие утверждения:*

1) *$f(H)=f_1(H)\mathfrak{H}$, если $f_1(H)\neq\varnothing$;*

2) *$f(H)=h(H)$, если $f_1(H)=\varnothing$.*

Доказательство. Пусть f — композиционный экран, удовлетворяющий условиям 1), 2). Нам необходимо доказать, что $\mathfrak{F}\mathfrak{H}=\langle f\rangle$.

Докажем сначала, что $\mathfrak{F}\mathfrak{H}\subseteq\langle f\rangle$. Пусть G — группа наименьшего порядка среди групп, входящих в $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$, но не входящих в $\langle f\rangle$. Тогда G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу L, причем $L=G^{\langle f\rangle}$. Возможны два случая: $G^{\mathfrak{H}}=\{1\}$ и $G^{\mathfrak{H}}\neq\{1\}$. Пусть $G^{\mathfrak{H}}=\{1\}$, т. е. $G\in\mathfrak{H}$. Если K/T — главный фактор группы G, то $G/C_G(K/T)\in h(K/T)$. При этом $f_1(K/T)=\varnothing$ влечет $f(K/T)= = h(K/T)$. Если же $f_1(K/T)\neq\varnothing$, то по построению экрана f имеем $f(K/T)=f_1(K/T)\mathfrak{H}$, причем ясно, что

$$h(K/T)\subseteq\mathfrak{H}\subseteq f(K/T).$$

Таким образом, $G/C_G(K/T)\in f(K/T)$. Это означает, что $G\in\langle f\rangle$. Пусть $G^{\mathfrak{H}}\neq\{1\}$. Так как $G\in\mathfrak{F}\mathfrak{H}$, то $G^{\mathfrak{H}}\in\mathfrak{F}$. Понятно также, что $L\subseteq G^{\mathfrak{H}}$. Следовательно, ввиду леммы 7.8 подгруппа L f_1-центральна в $G^{\mathfrak{H}}$, т. е. $G^{\mathfrak{H}}/C_{G^{\mathfrak{H}}}(L)\in f_1(L)$.

Так как $C_{G^{\mathfrak{H}}}(L)=C_G(L)\cap G^{\mathfrak{H}}$, то последнее влечет

$$C_G(L)\,G^{\mathfrak{H}}/C_G(L)\in f_1(L).$$

Но

$$C_G(L)\,G^{\mathfrak{H}}/C_G(L)=(G/C_G(L))^{\mathfrak{H}}.$$

Значит, $G/C_G(L)\in f_1(L)\mathfrak{H}$, т. е. L f-центральна в G. При этом $G/L\in\langle f\rangle$, следовательно, $G\in\langle f\rangle$. Противоречие Таким образом, мы должны заключить, что $\mathfrak{F}\mathfrak{H}\subseteq\langle f\rangle$.

Установим теперь справедливость включения $\langle f\rangle\subseteq\mathfrak{F}\mathfrak{H}$. Пусть G—группа наименьшего порядка из $\langle f\rangle$, не входящая в $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$. Так как $\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{F}\mathfrak{H}$, то G не входит в $\mathfrak{H}$, т. е. $G^{\mathfrak{H}}\neq\{1\}$. Очевидно, $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$-корадикал L группы G является ее единственной минимальной нормальной подгруппой и поэтому $L\subseteq G^{\mathfrak{H}}$. Так как $G/L\in\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ и $(G/L)^{\mathfrak{H}}=G^{\mathfrak{H}}/L$, то $G^{\mathfrak{H}}/L\in\mathfrak{F}$. Обозначим $C_G(L)$ через C и рассмотрим два случая: $f_1(L)\neq\varnothing$ и $f_1(L)=\varnothing$.

Пусть $f_1(L)\neq\varnothing$. Тогда $G/C\in f_1(L)\mathfrak{H}$, а значит, $G^{\mathfrak{H}}C/C\in f_1(L)$. Но $G^{\mathfrak{H}}C/C\simeq G^{\mathfrak{H}}/C_{G^{\mathfrak{H}}}(L)$. Поэтому L f_1-центральна в $G^{\mathfrak{H}}$. Отсюда и из $G^{\mathfrak{H}}/L\in\mathfrak{F}$ следует $G^{\mathfrak{H}}\in\mathfrak{F}$, что невозможно, так как G не входит в $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$. Пусть $f_1(L)=\varnothing$. Так как $G\in\langle f\rangle$, то $G/C_G(L)\in f(L)$. Значит, $f(L)\neq\varnothing$. Согласно построению функции f, в этом случае $f(L)=h(L)\neq\varnothing$. Таким образом, L h-центральна в G. Поскольку по условию экран h внутренний, то $G/C\in h(L)\subseteq\mathfrak{H}$. Следовательно, $G^{\mathfrak{H}}\subseteq C$, т. е. $L\subseteq Z(G^{\mathfrak{H}})$. Таким образом, L является p-группой для некоторого простого числа p. Так как $f_1(L)=\varnothing$, то $\mathfrak{F}$ не содержит неединичных p-групп. Но $G^{\mathfrak{H}}/L\in\mathfrak{F}$ и по условию $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})}\subseteq\mathfrak{F}$. Значит, $G^{\mathfrak{H}}/L$ — p'-группа. По теореме Шура—Цассенхауза (см., например, С. А. Чунихин [105], теорема 1.5.2) $G^{\mathfrak{H}}$ обладает $S_{p'}$-подгруппой T. Поскольку при этом $L\subseteq Z(G^{\mathfrak{H}})$, то $G^{\mathfrak{H}}=L\times T$. Так как подгруппа T характеристична в $G^{\mathfrak{H}}$, то T—нормальная подгруппа группы G. Но L—единственная минимальная нормальная подгруппа в G. Следовательно, $T=\{1\}$, т. е. $G^{\mathfrak{H}}=L$. Вспоминая теперь, что L f-центральна в G, мы должны заключить, что $G\in\mathfrak{H}$. Полученное противоречие показывает, что $\langle f\rangle\subseteq\mathfrak{F}\mathfrak{H}$. Тем самым завершено доказательство равенства $\mathfrak{F}\mathfrak{H}=\langle f\rangle$. Теорема доказана.

7.10. Теорема. *Пусть формация $\mathfrak{F}$ имеет композиционный экран f_1 и содержит $\mathfrak{N}_\pi$, где $\pi=\pi(\mathfrak{F})$, и пусть $\mathfrak{H}$—такая непустая формация, что $\mathfrak{N}_{\pi'}\mathfrak{H}=\mathfrak{H}$. Тогда формация $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ имеет композиционный экран f такой, что* *для любой простой группы H справедливы следующие утверждения*:

1) $f(H)=f_1(H)\mathfrak{H}$, *если* $f_1(H)\neq\varnothing$;

2) $f(H)=\mathfrak{H}$, *если* $f_1(H)=\varnothing$.

Доказательство. Построим композиционный экран f, удовлетворяющий условиям 1) и 2). Докажем, что $\langle f\rangle=\mathfrak{F}\mathfrak{H}$.

Предположим, что $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ не содержится в $\langle f\rangle$. Выберем тогда в $\mathfrak{F}\mathfrak{H}\diagdown\langle f\rangle$ группу G наименьшего порядка. Легко видеть, что $\mathfrak{H}\subseteq\langle f\rangle$. Следовательно, $G^{\mathfrak{H}}\neq\{1\}$, и поэтому $L\subseteq G^{\mathfrak{H}}$, где $L=G^{\langle f\rangle}$ — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. Поскольку $G\in\mathfrak{F}\mathfrak{H}$, то $G^{\mathfrak{H}}\in\mathfrak{F}$. Значит, ввиду леммы 7.8 $G^{\mathfrak{H}}/C_{G^{\mathfrak{H}}}(L)\in f_1(L)$. Но тогда

$$C_G(L)\,G^{\mathfrak{H}}/C_G(L)=(G/C_G(L))^{\mathfrak{H}}\in f_1(L),$$

т. е. $G/C_G(L)\in f_1(L)\mathfrak{H}$. Последнее означает, что L f-централен в G. При этом, в силу выбора G, имеем $G/L\in\langle f\rangle$. Таким образом, $G\in\langle f\rangle$. Противоречие. Итак, мы должны заключить, что $\mathfrak{F}\mathfrak{H}\subseteq\langle f\rangle$.

Предположим, что формация $\langle f\rangle$ не входит в формацию $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$. Пусть G — группа наименьшего порядка из $\langle f\rangle\diagdown\mathfrak{F}\mathfrak{H}$. Так как $\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{F}\mathfrak{H}$, то $G^{\mathfrak{H}}\neq 1$. Значит, $G^{\mathfrak{H}}\supseteq L$, где $L=G^{\mathfrak{F}\mathfrak{H}}$ — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. Так как $G/L\in\mathfrak{F}\mathfrak{H}$, то $(G/L)^{\mathfrak{H}}=G^{\mathfrak{H}}/L\in\mathfrak{F}$. Пусть $f_1(L)\neq\varnothing$, $C=C_G(L)$. Поскольку L f-центральна в G, то $G/C\in f_1(L)\mathfrak{H}$. Отсюда ввиду $(G/C)^{\mathfrak{H}}=G^{\mathfrak{H}}C/C$ получаем $G^{\mathfrak{H}}C/C\simeq G^{\mathfrak{H}}/G^{\mathfrak{H}}\cap C\in f_1(L)$. Последнее означает, что L f_1-центральна в $G^{\mathfrak{H}}$. Отсюда и из $G^{\mathfrak{H}}/L\in\mathfrak{F}$ получаем $G^{\mathfrak{H}}\in\mathfrak{F}$. А это противоречит тому, что G не входит в $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$. Осталось рассмотреть случай $f_1(L)=\varnothing$.

Пусть $f_1(L)=\varnothing$. Тогда $f(L)=\mathfrak{H}$, и так как L f-центральна в G, то $G/C\in\mathfrak{H}$. Таким образом, $L\subseteq G^{\mathfrak{H}}\subseteq C$, откуда следует, что $L\subseteq Z(G^{\mathfrak{H}})$. Значит, L — p-группа для некоторого простого числа p. Так как $f_1(L)=\varnothing$, то L не содержится в $\mathfrak{F}$. Следовательно, $p\in\pi'$. Но $G^{\mathfrak{H}}/L\in\mathfrak{F}$, и поэтому ввиду условия теоремы L — силовская p-подгруппа в $G^{\mathfrak{H}}$. Значит, $G^{\mathfrak{H}}=L\times T$, где T — дополнение к L в $G^{\mathfrak{H}}$. Подгруппа T нормальна в G, и значит, $T=\{1\}$. Следовательно, $G^{\mathfrak{H}}=L$. Но так как по условию $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H}=\mathfrak{H}$, то мы приходим к тому, что $G\in\mathfrak{H}$. Противоречие. Таким образом, $\langle f\rangle\subseteq\mathfrak{F}\mathfrak{H}$. Этим самым мы завершили доказательство равенства $\mathfrak{F}\mathfrak{H}=\langle f\rangle$.

7.11. Следствие. *Пусть формация $\mathfrak{F}$ имеет композиционный экран f_1 и $\mathfrak{N}\subseteq\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторая не-*

пустая формация. Тогда формация $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ имеет композиционный экран f такой, что для любой простой группы H справедливы следующие утверждения:

1) $f(H) = f_1(H)\mathfrak{H}$, *если* $f_1(H) \neq \varnothing$;

2) $f(H) = \mathfrak{H}$, *если* $f_1(H) = \varnothing$.

Пусть ω — некоторое множество простых чисел. Непустую формацию $\mathfrak{H}$ назовем *ω-локальной*, если $\mathrm{Iform}\,\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_{\omega'}\mathfrak{H}$.

Экран f назовем *$\mathfrak{H}$-значным*, если для любой группы $G \neq \{1\}$ имеет место $f(G) \subseteq \mathfrak{H}$.

7.12. Теорема. *Пусть f_1 — локальный экран формации $\mathfrak{F}$, и пусть h — $\mathfrak{H}$-значный локальный экран формации $\mathrm{Iform}\,\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ — некоторая $\pi'(\mathfrak{F})$-локальная формация. Тогда формация $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ имеет такой локальный экран f, что для любого простого числа p справедливы утверждения:*

1) $f(p) = f_1(p)\mathfrak{H}$, *если* $p \in \pi(\mathfrak{F})$;

2) $f(p) = h(p)$, *если* $p \in \pi'(\mathfrak{F})$.

Доказательство. Пусть f — локальный экран, удовлетворяющий условиям 1) и 2). Нам нужно установить, что $\langle f \rangle = \mathfrak{F}\mathfrak{H}$.

Докажем сначала, что $\mathfrak{F}\mathfrak{H} \subseteq \langle f \rangle$. Предположим, что $\mathfrak{F}\mathfrak{H} \setminus \langle f \rangle$ непусто, и пусть G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F}\mathfrak{H} \setminus \langle f \rangle$. Тогда G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу L, причем $L = G^{\langle f \rangle}$.

Заметим, что $h \subseteq f$, так как экран h является $\mathfrak{H}$-полным по условию. Отсюда следует, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathrm{Iform}\,\mathfrak{H} \subseteq \langle f \rangle$. Поэтому G не принадлежит $\mathfrak{H}$. Следовательно, $G^{\mathfrak{H}} \neq \{1\}$, $L \subseteq G^{\mathfrak{H}}$. Так как $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{H}$, то $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}$. Применяя лемму 7.8, получаем, что L f_1-центральна в $G^{\mathfrak{H}}$. Значит, $G^{\mathfrak{H}}C/C \in f_1(L)$, где $C = C_G(L)$. Так как $G^{\mathfrak{H}}C/C = (G/C)^{\mathfrak{H}}$, то получается, что $G/C \in f_1(L)\mathfrak{H}$. Последнее означает, что L f-центральна в G и, следовательно, $G \in \langle f \rangle$. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{F}\mathfrak{H} \subseteq \langle f \rangle$.

Предположим, что $\langle f \rangle$ не содержится в $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$, и выберем в $\langle f \rangle \setminus \mathfrak{F}\mathfrak{H}$ группу G наименьшего порядка. Так как $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{H}$, то $G^{\mathfrak{H}} \neq \{1\}$. Очевидно, $L = G^{\mathfrak{F}\mathfrak{H}}$ — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и $L = G^{\mathfrak{H}}$. Так как $G/L \in \mathfrak{F}\mathfrak{H}$ и $G^{\mathfrak{H}}/L = (G/L)^{\mathfrak{H}}$, то $G^{\mathfrak{H}}/L \in \mathfrak{F}$. Обозначим $C_G(L)$ через C и рассмотрим два случая: $f_1(L) \neq \varnothing$ и $f_1(L) = \varnothing$.

Пусть $f_1(L) \neq \varnothing$, т. е. L является $\pi(\mathfrak{F})$-группой. Тогда для любого $p \in \pi(L)$ имеем:

$$G/C \in f_1(p)\mathfrak{H}, \quad G^{\mathfrak{H}}C/C = (G/C)^{\mathfrak{H}} \in f_1(p).$$

Отсюда следует, что L f_1-центральна в $G^{\mathfrak{H}}$. Так как к тому же $G^{\mathfrak{F}}/L \in \mathfrak{F}$, то получаем $G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, что невозможно.

Пусть теперь $f_1(L) = \varnothing$. Тогда в $\pi(L)$ найдется такое простое число p, что $f_1(p) = \varnothing$, т. е. $p \in \pi'(\mathfrak{F})$. Так как $\pi(\langle f \rangle) = \pi(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H})$, то $p \in \pi'(\mathfrak{F}) \cap \pi(\mathfrak{H})$. Следовательно, $f(p) = h(p) \subseteq \mathfrak{H}$. Отсюда следует, что $G/C \in f(p) \subseteq \mathfrak{H}$, т. е. $G^{\mathfrak{H}} \subseteq C$. Значит, L содержится в центре $G^{\mathfrak{F}}$ и является p-группой, $p \in \pi'(\mathfrak{F})$. Так как $G^{\mathfrak{F}}/L$ входит в $\mathfrak{F}$ и является $\pi(\mathfrak{F})$-группой, то L — силовская p-подгруппа в $G^{\mathfrak{F}}$ и p'-холловская подгруппа T из $G^{\mathfrak{F}}$ нормальна в $G^{\mathfrak{F}}$, а значит, и в G. Так как в G нет минимальных нормальных подгрупп, отличных от L, то $T = \{1\}$. Таким образом, $G^{\mathfrak{F}} = L$, причем L — p-группа и $G/C \in h(p)$. Это означает, что

$$G \in \mathrm{Iform}\,\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N}_p\mathfrak{H},\ p \in \pi'(\mathfrak{F}).$$

Теперь вспомним, что формация $\mathfrak{H}$ является $\pi'(\mathfrak{F})$-локальной и, значит, $\mathrm{Iform}\,\mathfrak{H}$ содержится в $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})}\mathfrak{H}$. Следовательно, $G \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})}\mathfrak{H}$, т. е. $G \in \mathfrak{H}$. Полученное противоречие показывает, что $\langle f \rangle \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{H}$, и поэтому $\langle f \rangle = \mathfrak{F}\mathfrak{H}$. Теорема доказана.

7.13. Следствие. *Пусть f_1 — локальный экран формации $\mathfrak{F}$, h — внутренний локальный экран формации $\mathfrak{H}$. Тогда формация $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ имеет такой локальный экран f, что для любого простого числа p справедливы утверждения:*

1) *$f(p) = f_1(p)\mathfrak{H}$, если $p \in \pi(\mathfrak{F})$;*
2) *$f(p) = h(p)$, если $p \in \pi'(\mathfrak{F})$.*

7.14. Следствие. *Множество n-кратно локальных формаций является подполугруппой в полугруппе $G\mathfrak{S}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — n-кратно локальные формации. Индукцией по n покажем, что $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ — n-кратно локальная формация. Основание индукции тривиально. Пусть $n \geqslant 1$, f_1 — $(n-1)$-кратно локальный экран $\mathfrak{F}$, а h — внутренний $(n-1)$-кратно локальный экран $\mathfrak{H}$. По следствию 7.13 формация $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ имеет такой локальный экран f, что $f(p) = f_1(p)\mathfrak{H}$, если $p \in \pi(\mathfrak{F})$, и $f(p) = h(p)$, если $p \in \pi'(\mathfrak{F})$. По индукции формация $f_1(p)\mathfrak{H}$ $(n-1)$-кратно локальна. Значит, экран f $(n-1)$-кратно локален, т. е. формация $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ n-кратно локальна.

7.15. Следствие. *Множество тотально локальных формаций является подполугруппой в полугруппе $G\mathfrak{S}$.*

Следующая лемма показывает, что условие $\pi'(\mathfrak{F})$-локальности формации $\mathfrak{H}$ в условии теоремы 7.12 является необходимым.

7.16. Лемма. *Если произведение формаций $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ является локальной формацией, то формация $\mathfrak{H}$ $\pi'(\mathfrak{F})$-локальна.*

Доказательство. Пусть формация $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ локальна. Тогда $\mathrm{lform}\,\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{F}\mathfrak{H}$. Кроме того, ввиду леммы 7.8 и следствия 7.6 $\mathrm{lform}\,\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{N}\mathfrak{H}$. Поэтому $G^{\mathfrak{H}}\in\mathfrak{N}\cap\mathfrak{F}=\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})}$ для любой группы $G\in\mathrm{lform}\,\mathfrak{H}$. Но это означает, что $\mathrm{lform}\,\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})}\mathfrak{H}$, что и требовалось.

7.17. Лемма. *Пусть ω — некоторое множество простых чисел, $\mathfrak{H}$ — такая непустая формация, что $\mathfrak{N}_q\mathfrak{H}=\mathfrak{H}$ для любого $q\in\omega$. Тогда формация $\mathrm{lform}\,\mathfrak{H}$ имеет такой $\mathfrak{H}$-значный локальный экран h, что для любого простого $p\in\omega$ имеет место $h(p)=\mathfrak{H}$.*

Доказательство. Пусть f — минимальный локальный экран формации $\mathrm{lform}\,\mathfrak{H}$. Ввиду леммы 3.41 экран f является $\mathfrak{H}$-значным. Пусть h — такой локальный экран, что $h(p)$ совпадает с $f(p)$ при $p\in\omega'$, а при $p\in\omega$ совпадает с $\mathfrak{H}$. Тогда $\mathrm{lform}\,\mathfrak{H}\subseteq\langle h\rangle$. Если $G\in\langle h\rangle$, то очевидно $G\in\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{H})}\mathfrak{H}$.

7.18. Теорема. *Пусть f_1 — локальный экран формации $\mathfrak{F}$, и пусть $\mathfrak{H}$ — такая непустая формация, что $\mathfrak{N}_q\mathfrak{H}=\mathfrak{H}$ для любого $q\in\pi'(\mathfrak{F})\cap\pi(\mathfrak{H})$. Тогда формация $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ имеет такой локальный экран f, что для любого простого числа p справедливы утверждения:*

1) $f(p)=f_1(p)\mathfrak{H}$, *если* $p\in\pi(\mathfrak{F})$;

2) $f(p)=\mathfrak{H}$, *если* $p\in\pi'(\mathfrak{F})\cap\pi(\mathfrak{H})$;

3) $f(p)=\varnothing$, *если* $p\in\pi'(\mathfrak{F}\cup\mathfrak{H})$.

Доказательство. Ввиду теоремы 7.12 и леммы 7.17 достаточно установить лишь, что формация $\mathfrak{H}$ $\pi'(\mathfrak{F})$-локальна.

Пусть $\omega=\pi'(\mathfrak{F})\cap\pi(\mathfrak{H})$. Покажем прежде, что $\mathfrak{H}=\mathfrak{S}_\omega\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{S}_\omega$ — формация всех разрешимых ω-групп. Включение $\mathfrak{S}_\omega\subseteq\mathfrak{S}_\omega\mathfrak{H}$ очевидно. Предположим, что $\mathfrak{S}_\omega\mathfrak{H}\setminus\mathfrak{H}\neq\varnothing$, и пусть G — группа минимального порядка из $\mathfrak{S}_\omega\mathfrak{H}\setminus\mathfrak{H}$. Тогда $L=G^{\mathfrak{S}_\omega\mathfrak{H}}$ — единственная минимальная нормальная подгруппа в G и $L\subseteq G^{\mathfrak{H}}$. Последнее означает, что $L\in\mathfrak{S}_\omega$, т. е. L — p-группа, где $p\in\omega$. Но $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H}=\mathfrak{H}$. Значит, $G\in\mathfrak{H}$. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{S}_\omega\mathfrak{H}$, и поэтому $\mathfrak{H}=\mathfrak{S}_\omega\mathfrak{H}$.

Из равенства $\mathfrak{H}=\mathfrak{S}_\omega\mathfrak{H}$ и следствия 6.21 вытекает, что $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})}\mathfrak{H}=(\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})}\mathfrak{S}_\omega)\mathfrak{H}$. Ввиду следствия 7.13 и п. 2.31 $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})}\mathfrak{S}_\omega$ — локальная формация. Понятно также, что $\pi(\mathfrak{H})\subseteq\pi(\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})}\mathfrak{S}_\omega)$. Следовательно, ввиду следствия 7.6 и леммы 7.8 $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})}\mathfrak{H}$ — локальная формация. Значит, $\mathrm{lform}\,\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})}\mathfrak{H}$. Теорема доказана. ◢

7.19. Следствие. *Пусть f_1—локальный экран формации $\mathfrak{F}$, и пусть $\mathfrak{H}$—такая непустая формация, что $\pi(\mathfrak{H}) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Тогда формация $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ имеет такой локальный экран f, что для любого простого числа p справедливы утверждения*:

1) $f(p) = f_1(p)\mathfrak{H}$, *если* $p \in \pi(\mathfrak{F})$;

2) $f(p) = \varnothing$, *если* $p \in \pi'(\mathfrak{F})$.

7.20. Следствие. *Множество локальных формаций $\mathfrak{F}$ с условием $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$ является правым идеалом в полугруппе $G\mathfrak{S}$.*

7.21. Проблема. Существуют ли локальные формации $\mathfrak{F}$, для которых из $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}\mathfrak{M}$, где $\{\mathfrak{H}, \mathfrak{M}\} \cap \{\mathfrak{E}, \mathfrak{F}\} = \varnothing$, всегда следует, что формации $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M}$ не локальны.

7.22. Проблема. Разлагается ли нормально наследственная формация $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}\mathfrak{F}$ в произведение двух формаций нетривиальным образом?

§ 8. Однопорождённые произведения формаций

В данном параграфе мы опишем условия, при которых однопорожденная (локальная) формация конечных групп разлагается в произведение неединичных формаций. Все имеющиеся здесь формации предполагаются входящими в класс конечных групп $\mathfrak{S}$.

Прежде чем приступить к осуществлению намеченной цели, нам необходимо продолжить изучение порожденных формаций в классе $\mathfrak{S}$.

8.1. Непустое множество формаций Θ назовем *полурешеткой* формаций, если пересечение любого множества формаций из Θ снова принадлежит Θ. Экран f назовем *Θ-значным*, если для любой группы $G \neq \{1\}$ формация $f(G)$ либо пуста, либо принадлежит Θ.

Пусть Θ—некоторая полурешетка формаций, $\mathfrak{F}$—формация, имеющая локальный Θ-значный экран f. Если f является минимальным (максимальным) элементом множества всех локальных Θ-значных экранов формации $\mathfrak{F}$, то f назовем *минимальным* (соответственно *максимальным*) *локальным Θ-значным экраном* формации $\mathfrak{F}$.

В случае, когда Θ—множество всех подформаций формации $\mathfrak{F}$, максимальный локальный Θ-значный экран формации $\mathfrak{F}$ называют также ее *максимальным внутренним локальным* экраном.

В другом случае, а именно, когда Θ—множество всех (нормально) наследственных формаций, минимальный локальный Θ-значный экран формации называют ее *минимальным локальным* (*нормально*) *наследственным* экраном.

8.2. Лемма. *Пусть f — локальный экран формации $\mathfrak{F}$, G — конечная группа. Тогда если найдется такое простое число p, что $G/O_p(G) \in f(p) \cap \mathfrak{F}$, то группа G принадлежит формации $\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть H/K — такой главный фактор G, что $H \subseteq O_p(G)$. Тогда $O_p(G) \subseteq C_G(H/K)$. Значит, $G/C_G(H/K) \in H(G/O_p(G)) \subseteq f(p)$, т. е. H/K f-централен. Но по условию $G/O_p(G) \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Пусть Θ — полурешетка формаций. Если формация $\mathfrak{F}_i$ обладает локальным Θ-значным экраном f_i $(i \in I)$, то ввиду леммы 2.16 формация $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ обладает локальным Θ-значным экраном $\bigcap_{i \in I} f_i$. Значит, множество всех тех формаций, которые имеют хотя бы один локальный Θ-значный экран, является полурешеткой формаций. Такую полурешетку мы обозначим через Θ^l.

Если Θ — произвольная полурешетка формаций и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F} \in \Theta$, то через $\Theta\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$ обозначим пересечение всех тех формаций из Θ, которые содержат $\mathfrak{X}$.

8.3. Теорема. *Пусть Θ — некоторая полурешетка формаций, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H} \in \Theta$ и $\mathfrak{F} = \Theta^l\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *формация $\mathfrak{F}$ обладает единственным минимальным локальным Θ-значным экраном f, причем $f(p) = \varnothing$, если $p \in \pi'(\mathfrak{X})$, и $f(p) = \Theta\,\mathrm{form}\,(A/F_p(A) \mid A \in \mathfrak{X})$ при всех $p \in \pi(\mathfrak{X})$;*

2) *если h — произвольный локальный Θ-значный экран формации $\mathfrak{F}$, то при всех $p \in \pi(\mathfrak{F})$ имеет место*

$$f(p) = \Theta\,\mathrm{form}\,(A \mid A \in \mathfrak{F} \cap h(p) \text{ и } O_p(A) = \{1\}).$$

Доказательство. Пусть Ω — множество всех локальных Θ-значных экранов формации $\mathfrak{F}$. Ясно, что $\Omega \neq \varnothing$. Пусть f — пересечение всех экранов из Ω. Понятно, что f — локальный Θ-значный экран. Ввиду леммы 2.16 $\langle f \rangle = \mathfrak{F}$. Таким образом, f — единственный минимальный локальный Θ-значный экран формации $\mathfrak{F}$.

Пусть f_1 — такой локальный экран, что $f_1(p) = \varnothing$, если $p \in \pi'(\mathfrak{X})$ и $f_1(p) = \Theta\mathrm{form}\,(A/F_p(A) \mid A \in \mathfrak{X})$ при всех $p \in \pi(\mathfrak{X})$. Ввиду леммы 3.40 справедливо включение $\mathfrak{X} \subseteq \langle f_1 \rangle$. Но $\langle f_1 \rangle$ — формация из Θ^l. Следовательно, $\Theta^l\mathrm{form}\,\mathfrak{X} = \mathfrak{F} \subseteq \subseteq \langle f_1 \rangle$. С другой стороны, по лемме 3.40 класс $(A/F_p(A) \mid A \in \mathfrak{X})$ входит в $f(p)$ при всяком $p \in \pi(\mathfrak{X})$, т. е. $f_1 \leqslant f$. Значит, $\langle f_1 \rangle = \mathfrak{F}$ и $f_1 = f$. Утверждение 1) доказано.

Пусть теперь h — произвольный локальный Θ-значный экран формации $\mathfrak{F}$. Обозначим через f_2 такой локальный экран, что $f_2(p) = \varnothing$, если $p \in \pi'(\mathfrak{F})$, и

$$f_2(p) = \Theta\mathrm{form}\,(A \mid A \in \mathfrak{F} \cap h(p) \text{ и } O_p(A) = \{1\})$$

при любом $p \in \pi(\mathfrak{F})$. Тогда $f \leqslant f_2$. Действительно, если $B \in \mathfrak{F}$ и $p \in \pi(B)$, то $B/F_p(B) \in \mathfrak{F} \cap h(p)$ и $O_p(B/F_p(B)) = \{1\}$. Следовательно, ввиду доказанного утверждения 1) имеем $f(p) \subseteq f_2(p)$.

Покажем теперь, что $f_2 \leqslant f$. Пусть $p \in \pi(\mathfrak{F})$. Обозначим через $\mathfrak{F}_p$ класс $(A \mid A \in \mathfrak{F} \cap h(p)$ и $O_p(A) = \{1\})$. С каждой группой G из $\mathfrak{F}_p$ сопоставим регулярное сплетение $P \wr G$, где P — группа простого порядка p, и пусть $\mathfrak{X}_p = (P \wr G \mid G \in \mathfrak{F}_p)$. Ввиду леммы 8.2 $\mathfrak{X}_p \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{F}_1 = \Theta^l\mathrm{form}\,\mathfrak{X}_p \subseteq \mathfrak{F}$. Обозначим через f_3 минимальный локальный Θ-значный экран формации $\mathfrak{F}_1$. Ввиду утверждения 1) имеем $f_3 \leqslant f$ и

$$f_3(p) = \Theta\mathrm{form}\,(A/F_p(A) \mid A \in \mathfrak{X}_p).$$

Но, как нетрудно заметить, $\mathfrak{F}_p = (A/F_p(A) \mid A \in \mathfrak{X}_p)$, т. е. $f_3(p) = f_2(p)$. Значит, $f_2(p) \subseteq f(p)$. Поскольку p бралось произвольно, то $f_2 \leqslant f$. Таким образом, $f = f_2$. Теорема доказана.

Из теоремы 8.3 непосредственно вытекает

8.4. Следствие. *Пусть f_i — минимальный локальный Θ-значный экран формации $\mathfrak{F}_i$, $i = 1, 2$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, когда $f_1 \leqslant f_2$.*

Чтобы привести еще одно полезное следствие теоремы 8.3, напомним следующую хорошо известную лемму.

8.5. Лемма. *Пусть H/K — главный фактор конечной группы G, $p \in \pi(H/K)$. Тогда $O_p(G/C_G(H/K)) = \{1\}$.*

Доказательство этой леммы можно найти, например, в книге [107].

8.6. Следствие. ***Локальная формация $\mathfrak{F}$ имеет единственный максимальный внутренний локальный экран f, причем f удовлетворяет условию $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для любого простого числа p.***

Доказательство. Пусть h — минимальный локальный экран формации $\mathfrak{F}$, f_1 — произвольный внутренний локальный экран $\mathfrak{F}$. Пусть f — такой локальный экран формации $\mathfrak{F}$, что $f(p) = \mathfrak{N}_p h(p)$ для любого простого числа p. Ввиду теоремы 8.3 $f_1 \leqslant f$. Следовательно, остается лишь показать, что $\langle f \rangle \subseteq \mathfrak{F}$. Предположим противное, и пусть G — группа минимального порядка из $\langle f \rangle \setminus \mathfrak{F}$. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ — минимальная нормальная подгруппа в G. Если

$p \in \pi(G^{\mathfrak{F}})$, то $G/C_G(G^{\mathfrak{F}}) \in f(p) = \mathfrak{N}_p h(p)$. Но по лемме 8.5 $O_p(G/C_G(G^{\mathfrak{F}})) = \{1\}$, т. е. $G/C_G(G^{\mathfrak{F}}) \in h(p)$. Значит, $G^{\mathfrak{F}}$ h-центральна в G. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$. Полученное противоречие показывает, что $\langle f \rangle = \mathfrak{F}$.

8.7. Лемма. *Пусть Θ — полурешетка всех (нормально) наследственных формаций. Тогда Θ^l совпадает с полурешеткой всех (нормально) наследственных локальных формаций.*

Доказательство. Ввиду лемм 2.17 и 2.19 необходимо лишь показать, что если $\mathfrak{F}$ — (нормально) наследственная локальная формация, то $\mathfrak{F}$ обладает (нормально) наследственным локальным экраном. Пусть f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Покажем, что экран f (нормально) наследственен. Пусть $H \in f(p)$ и T — (нормальная) подгруппа из H. Пусть $P = O_p(H)$. Ввиду леммы 8.2 регулярное сплетение $A = P_1 \wr (H/P)$, где $|P_1| = p$, принадлежит $\mathfrak{F}$. Так как всякая (нормальная) подгруппа из A также принадлежит $\mathfrak{F}$, то $P_1 \wr (PT/P) \in \mathfrak{F}$. Значит,

$$T/O_p(T) \simeq (PT/P)/O_p(PT/P) \in f(p).$$

Следовательно, по лемме 8.2 $T \in f(p)$. Этим мы доказали, что экран f (нормально) наследственен. Лемма доказана.

8.8. Лемма. *Пусть A — конечная группа. Тогда в формации* $\mathrm{sform}\, A$ *содержится лишь конечное множество наследственных подформаций.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M} = \mathrm{var}\, A$ — многообразие, порожденное группой A. Многообразие $\mathfrak{M}$ локально конечно, а решетка $\mathrm{L}(\mathfrak{M})$ его подмногообразий конечна (см. гл. 5 книги [52]). Нетрудно показать (см. § 9), что $\mathrm{sform}\, A$ — класс всех конечных $\mathfrak{M}$-групп. Используя теперь теорему 9.4 из § 9, видим, что решетка $\mathrm{L}(\mathfrak{M})$ изоморфна решетке наследственных подформаций формации $\mathrm{sform}\, A$. Следовательно, в $\mathrm{sform}\, A$ имеется лишь конечное множество наследственных подформаций. Лемма доказана.

8.9. Лемма. *Пусть A — конечная группа. Тогда в формации* $\mathfrak{l}\mathrm{form}\, A$ *содержится лишь конечное множество наследственных локальных подформаций.*

Доказательство. Пусть Θ — полурешетка всех наследственных формаций, $\mathfrak{M} = \Theta^l\mathrm{form}\, A$. Понятно, что $\mathfrak{l}\mathrm{form}\, A \subseteq \mathfrak{M}$. Покажем, что в $\mathfrak{M}$ содержится лишь конечное множество наследственных локальных подформаций. Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольная наследственная локальная формация, входящая в $\mathfrak{M}$. По лемме 8.7 $\mathfrak{F} \in \Theta^l$. Пусть f и m — минимальные локальные наследственные экраны формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$ соответственно. Тогда по следствию 8.4 $f \leqslant m$. Но ввиду теоремы 8.3 и леммы 8.8 существует лишь конечное множество наследственных локальных экранов t, удовлетворяющих вложению $t \leqslant f$. Значит, в $\mathfrak{M}$ и тем более в $\mathfrak{l}\mathrm{form}\, A$ содержится лишь конечное множество наследственных локальных подформаций. Лемма доказана.

8.10. Лемма. *Пусть $G = NM$, где $N \lhd G$ и $N \in \mathfrak{N}^{n+1}$. Тогда $M \in \mathfrak{l}_n\mathrm{form}\, G$.*

Доказательство. Проведем индукцию по n. Доказательство леммы для случая, когда $n = 0$, приведено в книге [107] (см. теорему 2.3). Пусть $n \geqslant 1$ и утверждение справедливо при $n-1$. Индукцией по $|G:M|$ покажем, что $M \in \mathfrak{F} = \mathfrak{l}_n\mathrm{form}\, G$. Обозначим через f некоторый $(n-1)$-кратно локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Пусть $p \in \pi(M)$, $T = \mathrm{F}_p(G)$. Покажем, что $M/\mathrm{F}_p(M) \in f(p)$. Если $MT = G$, то

$$G/T = TM/T \simeq M/T \cap M \in f(p).$$

Но $T \cap M \subseteq \mathrm{F}_p(M)$. Значит, $M/\mathrm{F}_p(M) \in f(p)$. Пусть $M \subset TM \subset G$. Тогда поскольку $|G:TM| < |G:M|$, то мы можем считать, что $TM \in \mathfrak{F}$. Поэтому $TM/\mathrm{F}_p(TM) \in f(p)$. Но

$$TM/\mathrm{F}_p(TM) = \mathrm{F}_p(TM)\, M/\mathrm{F}_p(TM) \simeq M/\mathrm{F}_p(TM) \cap M$$

и $\mathrm{F}_p(TM) \cap M \subseteq \mathrm{F}_p(M)$. Следовательно, $M/\mathrm{F}_p(M) \in f(p)$.

Пусть, наконец, $T \subseteq M$. Поскольку $\mathrm{F}(N)$ — характеристическая подгруппа в N и $N \lhd G$, то $\mathrm{F}(N) \lhd G$. Следовательно, $\mathrm{F}(N) \subseteq T$. Значит, ввиду изоморфизма $TN/T \simeq N/T \cap N$ факторгруппа TN/N принадлежит $\mathfrak{N}^n$. Но тогда в силу факторизации $G/T = (TN/T)(M/T)$ получаем, что $M/T \in \mathfrak{l}_{n-1}\mathrm{form}\,(G/T) \in f(p)$. Последнее влечет $M/\mathrm{F}_p(M) \in f(p)$. Итак, для всех $p \in \pi(M)$ справедливо, что $M/\mathrm{F}_p(M) \in f(p)$. Значит, $M \in \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

8.11. Лемма. *Пусть $A \in \mathrm{form}\, \mathfrak{X}$, Q — силовская q-подгруппа из A и класс $\mathfrak{F}$ содержит любую силовскую q-подгруппу любой группы из $\mathfrak{X}$. Тогда $Q \in \mathrm{form}\, \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Сопоставим всякой конечной группе G множество $\alpha(G)$, состоящее из силовских q-подгрупп G. Отображение $G \to \alpha(G)$ удовлетворяет условию леммы 6.13. Значит, лемма 8.11 — следствие леммы 6.13.

8.12. Лемма. *Пусть $A \in \mathrm{sform}\, G$, где G — конечная группа. Тогда имеют место следующие утверждения:*

1) *экспонента группы A не превосходит экспоненту группы G;*

2) *каждый главный фактор группы A изоморфен некоторому главному фактору группы G;*

3) *каждый композиционный фактор группы A изоморфен некоторому композиционному фактору группы G;*

4) *ступень любого нильпотентного фактора группы A не превосходит наибольшую из ступеней нильпотентных факторов группы G.*

Доказательство. Утверждение 1) вытекает из леммы 3.5. Утверждение 2) вытекает из леммы 2.6. Утверждение 3) в силу теоремы Жордана—Гёльдера вытекает из 2). Утверждение 4) следует из леммы 8.11. Лемма доказана.

8.13. Лемма. *Если $\mathfrak{F}=\mathfrak{M}\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$—неединичные локальные формации, а $\mathfrak{H}$—такая формация, что $\pi(\mathfrak{H})\not\subseteq\pi(\mathfrak{M})$, то множество наследственных локальных подформаций формации $\mathfrak{F}$ бесконечно.*

Доказательство. Пусть $p\in\pi(\mathfrak{H})\setminus\pi(\mathfrak{M})$. Ясно, что $\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{F}$. Значит, $p\in\pi(\mathfrak{F})$. Формация $\mathfrak{F}$ локальна. Следовательно, $\mathfrak{N}_p\subseteq\mathfrak{F}$. Пусть A—произвольная группа из $\mathfrak{N}_p$. Так как $A\in\mathfrak{F}=\mathfrak{M}\mathfrak{H}$, то $A^{\mathfrak{H}}\in\mathfrak{M}$. Но $p\notin\pi(\mathfrak{M})$. Поэтому $A\in\mathfrak{H}$. Таким образом, $\mathfrak{N}_p\subseteq\mathfrak{H}$. Пусть $q\in\pi(\mathfrak{M})$. Тогда $q\neq p$ и $\mathfrak{N}_q\subseteq\mathfrak{M}$, поскольку формация $\mathfrak{M}$ локальна. Для всякого натурального числа n зафиксируем некоторую циклическую группу P_n порядка p^n. Пусть $Q_n=Q\wr P_n$—регулярное сплетение, где Q—группа порядка q. Обозначим через $\mathfrak{F}_n$ локальную формацию, порожденную группой Q_n. Группа Q_n является расширением q-группы с помощью p-группы. Следовательно, $Q_n\in\mathfrak{N}_q\mathfrak{N}_p\subseteq\mathfrak{M}\mathfrak{H}=\mathfrak{F}$. Поэтому $\mathfrak{F}_n\subseteq\mathfrak{F}$. Поскольку группа Q_n метанильпотентна, то $\mathfrak{F}_n\subseteq\mathfrak{N}^2$. Ввиду леммы 8.10 все локальные подформации из $\mathfrak{N}^2$ наследственны. Таким образом, $\mathfrak{F}_n$—наследственная локальная подформация в $\mathfrak{F}$.

Покажем, что если n и m—различные натуральные числа, то $\mathfrak{F}_n\neq\mathfrak{F}_m$. Пусть f_n и f_m—минимальные локальные экраны формаций $\mathfrak{F}_n$ и $\mathfrak{F}_m$ соответственно. По теореме 8.3 $f_n(q)=\mathrm{form}\,(Q_n/\mathrm{F}_q(Q_n))$ и $f_m(q)=\mathrm{form}\,(Q_m/\mathrm{F}_q(Q_m))$. Легко видеть, что для любого натурального числа r имеет место $Q_r/\mathrm{F}_r(Q_r)\simeq P_r$. С другой стороны, по лемме 8.12 экспонента любой группы из $\mathrm{form}\,P_r$ не превышает экспоненту группы P_r. Но группа P_r—циклическая группа, и поэтому ее экспонента совпадает с порядком. Таким образом, $f_n(q)\neq f_m(q)$. Последнее означает, что $\mathfrak{F}_m\neq\mathfrak{F}_n$. Итак, в $\mathfrak{F}$ содержится бесконечное множество локальных наследственных подформации $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, ... **Лемма** доказана.

8.14. Лемма. *Тогда и только тогда локальная формация $\mathfrak{F}$ однопорождена, когда $\pi(\mathfrak{F})$—конечное множество и $\mathfrak{F}$ имеет такой внутренний локальный экран f, что $f(p)$—однопорожденная формация при всяком $p \in \pi(\mathfrak{F})$.*

Доказательство. Пусть найдется такая группа G, что $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}\, G$. Тогда по теореме 8.3 $\pi(\mathfrak{F}) = \pi(G)$ — конечное множество и формация $\mathfrak{F}$ имеет такой локальный экран f, что $f(p) = \mathrm{form}(G/\mathrm{F}_p(G))$ при всех $p \in \pi(G)$.

Обратно, пусть $\pi(\mathfrak{F}) = \{p_1, \ldots, p_n\}$—конечное множество и $\mathfrak{F} = \langle f \rangle$, где f—такой внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$, что $f(p)$—однопорожденная формация при любом $p \in \pi(\mathfrak{F})$. Для всякого $i \in \{1, \ldots, n\}$ через G_i обозначим группу, порождающую формацию $f(p_i)$, а через F_i—регулярное сплетение $L_i \wr (G_i/\mathrm{O}_p(G_i))$, где L_i — некоторая неединичная p_i-группа. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0 = \mathrm{lform}\, F_1 \times \ldots \times F_n$. Поскольку f—внутренний локальный экран $\mathfrak{F}$ и F_i—расширение p_i-группы с помощью группы $G_i/\mathrm{O}_{p_i}(G_i) \in f(p_i)$, то по лемме 8.2 $F_i \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{F}_0 \subseteq \mathfrak{F}$. Для доказательства обратного включения покажем, что $f \leqslant t$, где t—максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}_0$. Так как $F_i \in \mathfrak{F}_0$, то по лемме 3.40 $F_i/\mathrm{F}_{p_i}(F_i) \in t(p_i)$. Но, как нетрудно заметить,

$$F_i/\mathrm{F}_{p_i}(F_i) \simeq G_i/\mathrm{O}_{p_i}(G_i).$$

Значит, $G_i \in \mathfrak{N}_{p_i} t(p_i)$. Ввиду следствия 8.6 $t(p_i) = \mathfrak{N}_{p_i} t(p_i)$. Таким образом,

$$f(p_i) = \mathrm{form}\, G_i \subseteq t(p_i),$$

т. е. $f \leqslant t$. Поэтому $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_0$. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0 = \mathrm{lform}\, F_1 \times \ldots \times F_n$—однопорожденная локальная формация. Лемма доказана.

Следующая лемма является частным случаем результата работы [172].

8.15. Лемма. *Пусть A—простая абелева группа, n—натуральное число. Тогда ступень регулярного сплетения $A \wr A^n$ не меньше $n+1$.*

В лемме 8.15 и в дальнейшем A^n обозначает некоторую группу, являющуюся прямым произведением n изоморфных копий группы A.

8.16. Теорема. *Тогда и только тогда произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ неединичной локальной формации $\mathfrak{M}$ и неединичной формации $\mathfrak{H} \neq \varnothing$—однопорожденная локальная фор-*

мация, когда выполняются следующие условия: 1) $\pi(\mathfrak{H}) \subseteq \subseteq \pi(\mathfrak{M})$; 2) $\mathfrak{M}$ — *метанильпотентная однопорожденная локальная формация*; 3) $\pi(\mathfrak{H}) \cap \pi(m(p)) = \varnothing$ *для всех* $p \in \pi(\mathfrak{M})$, *где* m — *минимальный локальный экран формации* $\mathfrak{M}$; 4) *если* $|\pi(\mathfrak{M})| > 1$, *то* $\mathfrak{H}$ — *однопорожденная формация, причем* $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{N}$ *влечет* $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{A}$.

Доказательство. Обозначим формацию $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ через $\mathfrak{F}$. Предположим, что $\mathfrak{F}$ — локальная однопорожденная формация, т. е. для некоторой группы A справедливо $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}\, A$. Допустим, что $\pi(\mathfrak{H}) \not\subseteq \pi(\mathfrak{M})$. Тогда по лемме 8.13 в формации $\mathfrak{F}$ содержится бесконечное множество наследственных локальных подформаций, что противоречит лемме 8.9. Значит, $\pi(\mathfrak{H}) \subseteq \pi(\mathfrak{M})$, т. е. формации $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ удовлетворяют 1).

Пусть h — минимальный локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Ввиду следствия 7.19 формация $\mathfrak{F}$ имеет также такой локальный экран f, что $f(p) = m(p)\mathfrak{H}$ для всех $p \in \pi(\mathfrak{M}) = = \pi(\mathfrak{F})$ и $f(p) = \varnothing$ при всяком $p \in \pi'(\mathfrak{F})$. Поскольку m — внутренний экран формации $\mathfrak{M}$, то f — внутренний экран формации $\mathfrak{F}$. Предположим, что найдутся такие различные простые числа p и q, что в формации $m(p)$ содержится группа Z_q порядка q и $q \in \pi(\mathfrak{H})$. Пусть H — некоторая qd-группа из $\mathfrak{H}$. Для всякого натурального числа n через H_n обозначим регулярное сплетение $Z_q \wr H^n$. Ясно, что $H_n \in m(p)\mathfrak{H}$ и $O_p(H_n) = \{1\}$. Следовательно, по теореме 8.3 $H_n \in h(p)$. Если L — подгруппа порядка q из H, то $Z_q \wr L^n$ изоморфно вкладывается в H_n. Ввиду леммы 8.15 ступень нильпотентности группы $Z_q \wr L^n$ не меньше $n+1$. По теореме 8.3 $h(p) = \mathrm{form}(A/F_p(A))$. Следовательно, по лемме 8.11 всякая силовская q-подгруппа из H_n принадлежит формации, порожденной силовской q-подгруппой из $A/F_p(A)$. Последнее ввиду леммы 8.12 означает, что ступень нильпотентности группы $Z_q \wr L^n$ не превышает (при любом натуральном n) ступень нильпотентности группы $A/F_p(A)$. Противоречие.

Итак, в дальнейшем мы можем считать, что если p и q — различные простые числа и группа Z_q порядка q принадлежит формации $m(p)$, то $q \notin \pi(\mathfrak{H})$. Более того, покажем, что в такой ситуации формация $\mathfrak{H}$ абелева. Предположим противное, и пусть M — произвольная неабелева группа из $\mathfrak{H}$. Понятно, что $q \notin \pi(M)$. Пусть F_q — поле из q элементов, $\overline{F}_q$ — его алгебраическое замыкание. Поскольку группа M неабелева, то существует по крайней мере один неприводимый $\overline{F}_q[M]$-модуль T ранга $\geqslant 2$.

Пусть D — внешнее тензорное произведение (см. § 43 книги [44]) n экземпляров модуля T. $\overline{F}_q[M]$-модуль D неприводим (см. [44], с. 184) и его ранг $\geqslant 2^n$. Значит, найдется такой неприводимый $F_q[M^n]$-модуль L, что D — прямое слагаемое модуля $L^{\overline{F}_q}$ (см. упражнение 8 на с. 199 из [44]). Последнее означает, что ранг модуля L не меньше 2^n. Поскольку $M \in \mathfrak{H}$ и L — элементарная абелева q-группа, то $R = L \leftthreetimes M^n \in m(p)\mathfrak{H}$. Но $m(p)\mathfrak{H} = f(p)$. Следовательно, по теореме 8.3 $R/\mathrm{O}_p(R) \in h(p)$. Заметим, что группа $R/\mathrm{O}_p(R)$ обладает главным фактором $L\mathrm{O}_p(R)/\mathrm{O}_p(R)$ порядка $\geqslant q^{2^n}$. С другой стороны, $h(p) = \mathrm{form}(A/\mathrm{F}_p(A))$. Значит, порядок всякого главного фактора любой группы из $h(p)$ не превосходит $|A/\mathrm{F}_p(A)|$. Противоречие. Таким образом, $\mathfrak{H}$ — абелева формация.

Покажем теперь, что $\mathfrak{M}$ — метанильпотентная однопорожденная локальная формация. Предположим, что $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{N}^2$. Опираясь на теорему 3.49, нетрудно показать (см. лемму 19.6 главы 4), что в $\mathfrak{M}$ имеется неметанильпотентная локальная подформация $\mathfrak{M}_0$, у которой все собственные локальные подформации метанильпотентны. Строение таких формаций будет изучено в главе 4. В частности, следствие 19.11 устанавливает, что $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{l}\mathrm{form}\, G$, где группа G удовлетворяет одному из следующих условий: 1) $G^{\mathfrak{N}}$ — неабелева единственная минимальная нормальная подгруппа в G; 2) $G = P \leftthreetimes M$, где $P = C_G(P)$ — минимальная нормальная подгруппа в G, а $H = Q \leftthreetimes N \neq \{1\}$, где $Q = C_H(Q) = H^{\mathfrak{N}}$ — минимальная нормальная подгруппа в H. Пусть G удовлетворяет условию 1), $p \in \pi(G^{\mathfrak{N}})$. Поскольку $G \in \mathfrak{M}_0 \subseteq \mathfrak{M}$, то

$$G/C_G(G^{\mathfrak{N}}) \in m(G^{\mathfrak{N}}) \subseteq m(p).$$

Но $C_G(G^{\mathfrak{N}}) = \{1\}$. Значит, $G \in m(p)$. Пусть M — неединичная группа из $\mathfrak{H}$. Для всякого натурального числа n через G_n обозначим регулярное сплетение $G \wr M^n$. Покажем, что при некотором $p \in \pi(G^{\mathfrak{N}})$ группа G_n принадлежит $m(p)\mathfrak{H}$. Это очевидно в случае, когда G — простая группа. Предположим, что $G^{\mathfrak{N}} \neq G$. Пусть $q \in \pi(G/G^{\mathfrak{N}})$. Тогда ввиду нильпотентности группы $G/G^{\mathfrak{N}}$ в ней найдется максимальная подгруппа индекса q. Значит, одна из факторгрупп группы G имеет порядок, равный q. Следовательно, при любом $p \in \pi(G^{\mathfrak{N}})$ формация $m(p)$ имеет подгруппу порядка q. Пусть $p \in \pi(G^{\mathfrak{N}}) \setminus \{q\}$. Тогда ввиду замечаний из предыдущего абзаца формация $\mathfrak{H}$ абелева и $q \notin \pi(\mathfrak{H})$. Из последнего легко вытекает, что $\mathfrak{H}$-корадикал группы G_n совпадает с ее базой T. Но T является прямым произведением групп, изоморфных G. Значит, $T \in m(p)$. Таким образом, $G_n \in m(p)\mathfrak{H}$. Легко видеть, что $O_p(G) = \{1\}$. Следовательно, ввиду теоремы 8.3 $G_n \in h(p)$. Используя свойства сплетений, нетрудно убедиться, что группа G_n обладает минимальной нормальной подгруппой порядка $|G^{\mathfrak{N}}|^{|M|^n}$. Но как уже отмечалось, порядки главных факторов всех групп из $h(p)$ не превосходят $|A/F_p(A)|$. Противоречие.

Пусть G удовлетворяет условию 2), $p \in \pi(P)$, $q \in \pi(Q)$. Тогда поскольку $G \in \mathfrak{M}$, то

$$H \simeq G/P = G/C_G(P) \in m(p)$$

и

$$N \simeq G/PQ = G/C_G(PQ/P) \in m(q).$$

Ввиду леммы 8.5 $O_q(N) = \{1\}$. Так как, кроме того, группа N нильпотентна, то в формации $m(q)$ имеется такая группа E простого порядка, что $q \notin \pi(E)$. Значит, $\mathfrak{H}$ — абелева формация и $\pi(N) \cap \pi(\mathfrak{H}) = \varnothing$. Пусть M — некоторая неединичная группа из $\mathfrak{H}$. Используя сделанные замечания, легко убедиться, что при любом натуральном n регулярное сплетение $H \wr M^n$ принадлежит $m(p)\mathfrak{H}$. Ввиду леммы 8.5 $O_p(H) = \{1\}$. Значит, $O_p(H \wr M^n) = \{1\}$. Следовательно, $H \wr M^n \in h(p)$. Но группа $H \wr M^n$ имеет минимальную нормальную подгруппу порядка $|Q|^{|M|^n}$. Это приводит к противоречию. Итак, остается заключить, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}^2$.

Покажем, что $\mathfrak{M}$ — однопорожденная локальная формация. Ввиду леммы 8.10 всякая локальная подформация из $\mathfrak{M}$ наследственна. Следовательно, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$, и поэтому ввиду леммы 8.9 в $\mathfrak{M}$ имеется лишь конечное множество локальных подформаций. Пусть

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{F}_n = \mathfrak{M}$$

— такая цепь локальных формаций, что $\mathfrak{M}_i$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{M}_{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Пусть $H_i \in \mathfrak{M}_i \setminus \mathfrak{M}_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда

$$\mathfrak{M} = \mathrm{lform}\{H_1, \ldots, H_n\} = \mathrm{lform}\, H_1 \times \ldots \times H_n,$$

т. е. $\mathfrak{M}$ — локальная однопорожденная формация. Итак, $\mathfrak{M}$ удовлетворяет условию 2).

Предположим, что найдутся такие простые числа p и q, что $q \in \pi(\mathfrak{H}) \cap \pi(m(p))$. Так как формация $\mathfrak{M}$ метанильпотентна, то по теореме 8.3 $m(p) \subseteq \mathfrak{N}_{p'}$. Следовательно, $q \neq p$ и в формации $m(p)$ имеется группа порядка q.

Значит, как показано ранее, $q \notin \pi(\mathfrak{H})$. Противоречие. Таким образом, $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$ удовлетворяют условию 3).

Пусть $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{N}$. Тогда найдется такое $p \in \pi(\mathfrak{M})$, что $\mathfrak{E} \subset m(p)$. Но $m(p) \subseteq \mathfrak{N}_{p'}$. Следовательно, в формации $m(p)$ имеется такая группа M простого порядка, что $p \neq |M|$. В этом случае, ввиду установленного ранее, формация $\mathfrak{H}$ абелева. Предположим теперь, что $|\pi(\mathfrak{M})| > 1$. Обозначим через $\mathfrak{F}_1$ формацию

$$\operatorname{form}\{A/F_p(A) \mid p \in \pi(A)\}.$$

Поскольку формация, порожденная конечным множеством групп, совпадает с формацией, порожденной прямым произведением групп этого множества, то $\mathfrak{F}_1$ — однопорожденная формация. Пусть A_1 — произвольная монолитическая группа из $\mathfrak{H}$. Понятно, что $O_p(A_1) = \{1\}$ для некоторого $p \in \pi(\mathfrak{M})$. Значит,

$$A_1 \in h(p) = \operatorname{form}(A/F_p(A)) \subseteq \mathfrak{F}_1.$$

Следовательно, всякая монолитическая группа из $\mathfrak{H}$ входит в $\mathfrak{F}_1$. Поэтому $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Пусть $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{A}$. Тогда число неизоморфных монолитических групп из $\mathfrak{H}$ конечно, ибо все они являются циклическими группами порядка не больше $|A|$. Значит, в рассматриваемом случае формация $\mathfrak{H}$ однопорождена. Пусть $\mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{A}$. Тогда ввиду доказанного выше $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$. Следовательно, $m(p) = \mathfrak{E}$ при всех $p \in \pi(\mathfrak{M})$. Таким образом, $f(p) = m(p)\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$. Но $h \leqslant f$. Значит, $A/F_p(A) \in \mathfrak{H}$ при всех $p \in \pi(A)$, т. е. $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{H}$. Таким образом, $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}_1$ — однопорожденная формация. Итак, $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ удовлетворяют условию 4). Этим мы завершили доказательство необходимости.

Докажем теперь достаточность. Пусть $\pi(\mathfrak{M}) = \{p\}$. Тогда ввиду локальности формации $\mathfrak{M}$ имеет место $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p$. Ввиду условия 1) $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_p$. Значит, $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H} = \mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p$. Следовательно, $\mathfrak{F} = \operatorname{lform} B$, где B — произвольная неединичная p-группа.

Рассмотрим случай, когда $|\pi(\mathfrak{M})| > 1$. Ввиду условия 1) и следствия 7.18 формация $\mathfrak{F}$ имеет такой локальный экран f, что $f(p) = m(p)\mathfrak{H}$, если $p \in \pi(\mathfrak{M})$ и $f(p) = \varnothing$, если $p \in \pi'(\mathfrak{M})$. Кроме того, $\pi(\mathfrak{M}) = \pi(\mathfrak{F})$. По условию 2) $\mathfrak{M}$ — однопорожденная локальная формация. Значит, $\pi(\mathfrak{M})$ — конечное множество. Следовательно, ввиду леммы 8.14 остается показать, что для любого $p \in \pi(\mathfrak{M})$ формация $m(p)\mathfrak{H}$ однопорождена. Если $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, то $m(p) = \mathfrak{E}$ и, следовательно, $m(p)\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$ — однопорожденная формация по условию. Пусть $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{N}$. В этом случае по условию теоремы $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}^2$. Так как $\mathfrak{M}$ — однопорожденная локальная формация, то формация $m(p)$ однопорождена. По условию однопорождена также формация $\mathfrak{H}$. Пусть $m(p) = \operatorname{form} A$, $\mathfrak{H} = \operatorname{form} B$, и пусть L — произвольная группа из $m(p)\mathfrak{H}$. Так как $L^{\mathfrak{H}} \in m(p)$, то экспонента группы L не превосходит произведения экспонент групп A и B. Пусть Q — силовская q-подгруппа группы L, где q — произвольный простой делитель порядка L. Так как $QL^{\mathfrak{H}}/L^{\mathfrak{H}} \simeq Q/L^{\mathfrak{H}} \cap Q$ и по условию $\pi(m(p)) \cap \pi(\mathfrak{H}) = \varnothing$, то либо $Q \subseteq L^{\mathfrak{H}}$, либо $Q \cap L^{\mathfrak{H}} = \{1\}$. По лемме 8.11 в первом случае $Q \in \operatorname{form} A_q$, во втором $Q \in \operatorname{form} B_q$. Следовательно, ступень любой нильпотентной секции из L не превосходит наибольшую из ступеней силовских подгрупп группы A (напомним, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{A}$). Рассмотрим главный фактор H/K группы L. Так как $L^{\mathfrak{H}}$ — нильпотентная группа, то $L^{\mathfrak{H}} \subseteq$ $\subseteq C_L(H/K)$. Значит, $L/C_L(H/K)$ — циклическая группа, поскольку она является неприводимой абелевой группой автоморфизмов. Но $L/C_L(H/K) \in \mathfrak{H}$. Следовательно, порядок группы $L/C_L(H/K)$ не превышает экспоненту группы B. Но тогда по лемме 52.24 книги [52] $|H/K| \leqslant |A| \cdot |B|^{|B|}$. Итак, порядки главных факторов, экспоненты и ступени нильпотентных секций всех групп из $m(p)\mathfrak{H}$ образуют конечное множество. Следовательно, ввиду теоремы 3.47 в $m(p)\mathfrak{H}$ имеется лишь конечное множество неизоморфных формационно критических групп. Значит, ввиду следствия 3.4 формация $m(p)\mathfrak{H}$ однопорождена. Теорема доказана.

8.17. Следствие. *Тогда и только тогда произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ неединичных локальных формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — однопорожденная локальная формация, когда $\mathfrak{M} = \mathfrak{H} = \mathfrak{N}_p$, где p — некоторое простое число.*

8.18. Теорема. *Тогда и только тогда произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ неединичных формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — однопорожденная формация, когда справедливы следующие утверждения:* 1) *формации $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ однопорождены*; 2) $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{A}$; 3) $\pi(\mathfrak{M}) \cap \pi(\mathfrak{H}) = \varnothing$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}\mathfrak{H} = \operatorname{form} G$, $\pi = \pi(G) \cup$ $\cup \pi(\mathfrak{M}) \cup \{q\}$, где q — некоторое простое число, не принадлежащее $\pi(G)$. Ввиду следствия 7.18 формации $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{N}_\pi \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{N}_\pi(\mathfrak{M}\mathfrak{H})$ имеют такие локальные экраны f_1 и f_2 соответственно, что $f_1(p) = \mathfrak{M}$, $f_2(p) = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ при всех $p \in \pi$ и $f_1(p) = f_2(p) = \varnothing$, если $p \in \pi'$. Ввиду следствия 6.21 $\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_1\mathfrak{H}$. Предположим сначала, что $\pi(\mathfrak{M})$ — конечное множество. Тогда по лемме 8.14 $\mathfrak{F}_2$ — однопорожденная локальная формация. Следовательно, ввиду теоремы 8.16

$\mathfrak{H}$ — абелева однопорожденная формация, $\mathfrak{F}_1$ — метанильпотентная однопорожденная формация. Значит, $m(p)$ — нильпотентная однопорожденная формация, где m — минимальный локальный экран формации $\mathfrak{F}_1$, $p \in \pi$. Ввиду теоремы 8.3 для любой монолитической группы H из $\mathfrak{M}$ найдется такое $p \in \pi$, что $H \in m(p)$. Поэтому $\mathfrak{M} \subseteq \subseteq \mathrm{form}\left(\bigcup_{p \in \pi} m(p)\right)$ и ввиду теоремы 3.47 $\mathfrak{M}$ — нильпотентная однопорожденная формация. Поскольку по условию 3) теоремы 8.16 $\pi(\mathfrak{H}) \cap \pi(m(p)) = \varnothing$ при всех $p \in \pi$, то $\pi(\mathfrak{M}) \cap \pi(\mathfrak{H}) = \varnothing$. Итак, формации $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ удовлетворяют условиям 1)—3), если множество $\pi(\mathfrak{M})$ конечно.

Покажем, что множество $\pi(\mathfrak{M})$ действительно является конечным. Прежде установим, что $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{E}$. Предположим противное, и пусть A — простая группа из $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$. Тогда $A \wr A^{|G|} \in \mathfrak{F}$. Если $A \in \mathfrak{A}$, то по лемме 8.15 $A \wr A^{|G|}$ — нильпотентная группа степени $\geqslant |G| + 1$. Но это невозможно ввиду леммы 8.12, поскольку $A \wr A^{|G|} \in \in \mathrm{form}\, G$. Если же A — неабелева группа, то $A \wr A^{|G|}$ обладает минимальной нормальной подгруппой порядка $|A|^{|A||G|}$. Это также невозможно. Значит, $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{E}$, и, следовательно, если B — произвольная группа из $\mathfrak{M}$, то $B^{\mathfrak{H}} = \{1\}$, т. е. $B \in \mathfrak{M}$. Значит, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$, и поэтому множество $\pi(\mathfrak{M})$ конечно ввиду леммы 8.12.

Если же $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — такие однопорожденные формации, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{A}$ и $\pi(\mathfrak{M}) \cap \pi(\mathfrak{H}) = \varnothing$, то как было показано в ходе доказательства теоремы 8.16, формация $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ однопорождена. Теорема доказана.

8.19. Следствие. *Тогда и только тогда произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ нетривиальных многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — многообразие Кросса (т. е. $\mathfrak{M}\mathfrak{H} = \mathrm{var}\, G$, где G — некоторая конечная группа), когда $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ имеют ненулевые взаимно простые экспоненты, $\mathfrak{M}$ нильпотентно, $\mathfrak{H}$ абелево.*

Доказательство. Для всякого класса групп $\mathfrak{X}$ символом $\mathrm{fin}\,\mathfrak{X}$ обозначим совокупность всех конечных групп из $\mathfrak{X}$. Пусть $\mathfrak{M}\mathfrak{H} = \mathrm{var}\, G$, где G — конечная группа. Тогда ввиду леммы 9.3 $\mathrm{fin}(\mathfrak{M}\mathfrak{H}) = (\mathrm{fin}\,\mathfrak{M})(\mathrm{fin}\,\mathfrak{H})$ — однопорожденная формация. Значит, ввиду теоремы 8.18 $\mathrm{fin}\,\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, $\mathrm{fin}\,\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{A}$ и $\pi(\mathrm{fin}\,\mathfrak{M}) \cap \pi(\mathrm{fin}\,\mathfrak{H}) = \varnothing$. Многообразие $\mathrm{var}\, G$ локально конечно, и поэтому $\mathfrak{M} = \mathrm{var}\,\mathrm{fin}\,\mathfrak{M}$ нильпотентно, $\mathfrak{H} = \mathrm{var}\,\mathrm{fin}\,\mathfrak{H}$ абелево и экспоненты многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ взаимно просты.

Обратно, пусть $\mathfrak{M}$ — нильпотентное, $\mathfrak{H}$ — абелево многообразия ненулевых взаимно простых экспонент. Тогда многообразия $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ кроссовы (см. теорему 35.11 книги

[52]). Следовательно, многообразие $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ локально конечно, а формации $\mathrm{fin}\,\mathfrak{M}$ и $\mathrm{fin}\,\mathfrak{H}$ однопорождены, причем $\mathrm{fin}\,\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, $\mathrm{fin}\,\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{A}$ и $\pi(\mathrm{fin}\,\mathfrak{M}) \cap \pi(\mathrm{fin}\,\mathfrak{M}) = \varnothing$. По теореме 8.18 $\mathrm{fin}(\mathfrak{M}\mathfrak{H}) = (\mathrm{fin}\,\mathfrak{M})(\mathrm{fin}\,\mathfrak{H})$ — однопорожденная формация. Значит, $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — многообразие Кросса. Следствие доказано.

§ 9. Решетки формаций

Связь решеток F_Ω и M_Ω. 9.1. Для любых двух формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ положим $\mathfrak{M} \wedge \mathfrak{H} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$, $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{H} = \mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$. *Всякое множество формаций, замкнутое относительно операций $\wedge$ и $\vee$, является решеткой.* Таковым, например, является множество F_Ω всех конечных формаций сигнатуры Ω.

Наряду с решеткой F_Ω в данном пункте мы будем иметь дело с решеткой M_Ω всех многообразий сигнатуры Ω. При этом для любых двух многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ из M_Ω положим $\mathfrak{M} \wedge \mathfrak{H} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$, $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{H} = \mathrm{var}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$.

9.2. Лемма. *Для любых двух локально конечных многообразий $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ многообразие $\mathfrak{F}_1 \vee \mathfrak{F}_2$ также локально конечно.*

Доказательство. Как известно (см. п. 13.1 книги [50]),

$$\mathrm{var}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2) = HS\Pi(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2),$$

где $\Pi(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)$ — класс изоморфных копий декартовых произведений $(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)$-систем. Пусть H — конечно порожденная подсистема алгебраической системы $G = \prod_{i \in I} H_i$ $(H_i \in \mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)$. Пусть π_i — ядерная конгруэнция, отвечающая проектированию $G \to H_i$, $\varphi_i = \pi_i \cap H^2$. Обозначим через I_i такое подмножество множества I, что элемент $a \in I$ в точности тогда принадлежит I_i, когда $H_a \in \mathfrak{F}_i$, $i = 1, 2$, и пусть $\Delta_i = \bigcap_{i \in I_i} \varphi_i$. Ввиду теорем 1 и 2 из п. 2.4 книги [50] для каждого $j \in I_i$ существует взаимно однозначный гомоморфизм $H/\varphi_j \to D_j$, где D_j — некоторая подсистема алгебраической системы H_j. Но тогда ввиду п.2.5 книги [50] существует взаимно однозначный гомоморфизм

$$\alpha_i\colon R_i = \prod_{j \in I_i} H/\varphi_j \to D_t = \prod_{j \in I_i} D_j.$$

Для всякого $h \in H$ положим $\beta_i(h\Delta_i) = t$, где t — такой элемент из R_i, что $t(j) = h\varphi_j$ $(j \in I_i)$. Понятно, что β_i — инъективный гомоморфизм H/Δ_i в R_i. Пусть $K_i = \mathrm{Im}\,\beta_i$.

Факторсистема H/Δ_i конечно порождена, поскольку конечно порожденной является алгебраическая система H. Значит, $\alpha_i(K_i)$ конечно порожденная подсистема алгебраической системы D_i. Но $D_i \in \mathfrak{F}_i$ и многообразие $\mathfrak{F}_i$ локально конечно. Следовательно, $\alpha_i(K_i)$, а значит, и H/Δ_i — конечные алгебраические системы. Поскольку $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \Delta$ — нулевая конгруэнция на H, то последнее означает, что система H также конечна. Предположим теперь, что H — некоторая конечно порожденная алгебраическая система из $\mathrm{HS\Pi}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)$. Тогда H является гомоморфным образом некоторой конечно порожденной алгебраической системы $T \in \mathrm{S\Pi}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)$. Ввиду только что доказанного система T конечна. Следовательно, конечной является и алгебраическая система H. Таким образом, многообразие $\mathfrak{F}_1 \vee \mathfrak{F}_2 = \mathrm{var}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)$ локально конечно. Лемма доказана.

Лемма 9.2 показывает, что локально конечные многообразия образуют подрешетку решетки M_Ω. Такую подрешетку мы обозначим через L_Ω.

В дальнейшем для каждого класса алгебраических систем $\mathfrak{M}$ через $\mathrm{fin}\,\mathfrak{M}$ обозначим совокупность всех конечных $\mathfrak{M}$-систем.

9.3. Лемма. *Если $\mathfrak{M}$ — локально конечное многообразие, порожденное классом конечных алгебр $\mathfrak{X}$, то* $\mathrm{fin}\,\mathfrak{M} = \mathrm{sform}\,\mathfrak{X}$.

Доказательство. Пусть $A \in \mathrm{fin}\,\mathfrak{M}$. Тогда поскольку $\mathfrak{M} = \mathrm{HS\Pi}(\mathfrak{X})$, где $\Pi(\mathfrak{X})$ — класс всех декартовых произведений $(\mathfrak{X})$-алгебр, то A является гомоморфным образом некоторой конечно порожденной алгебры $B \in \mathrm{S\Pi}(\mathfrak{X})$. Так как многообразие $\mathfrak{M}$ локально конечно, то B — конечная алгебра. Пусть $B \subseteq \prod_{i \in I} H_i$ $(H_i \in (\mathfrak{X}))$, π_i — проектирование алгебры $\prod H_i$ на H_i, φ_i — ядерная конгруэнция, отвечающая гомоморфизму π_i и $\psi_i = B^2 \cap \varphi_i$. Понятно, что найдутся такие $i_1, \ldots, i_t \in I$, что $\psi_{i_1} \cap \ldots \cap \psi_{i_t} = \Delta_B$. Значит, B — поддекартово произведение алгебр $B/\psi_{i_1}, \ldots, B/\psi_{i_t}$. Но $B/\psi_i \simeq \varphi_i B/\varphi_i \in \mathrm{S}(\mathfrak{X})$. Следовательно, $B \in \mathrm{R_0S}(\mathfrak{X})$ и $A \in \mathrm{HR_0S}(\mathfrak{X}) \subseteq \mathrm{sform}\,\mathfrak{X}$. Таким образом, $\mathrm{fin}\,\mathfrak{M} \subseteq \mathrm{sform}\,\mathfrak{X}$. Значит, $\mathrm{fin}\,\mathfrak{M} = \mathrm{sform}\,\mathfrak{X}$. Лемма доказана.

9.4. Теорема. *Отображение* fin, *сопоставляющее всякому многообразию алгебр $\mathfrak{M}$ класс* $\mathrm{fin}\,\mathfrak{M}$, *задает мономорфизм решетки L_Ω в решетку F_Ω.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ — два произвольных многообразия из L_Ω. Как известно (см., например, п. 14.1 книги [50]), всякое локально конечное многообразие порождается своими конечными системами. Следовательно, многообразие $\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2$ порождается классом $\operatorname{fin}(\mathfrak{F}_1 \vee \mathfrak{F}_2)$. С другой стороны, поскольку многообразия $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ в свою очередь порождаются соответственно классами $\operatorname{fin}\mathfrak{F}_1$ и $\operatorname{fin}\mathfrak{F}_2$, то многообразие $\mathfrak{F}_1 \vee \mathfrak{F}_2 = \operatorname{var}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)$ порождается классом $\operatorname{fin}\mathfrak{F}_1 \vee \operatorname{fin}\mathfrak{F}_2$. По лемме 3.2

$$\operatorname{fin}\mathfrak{F}_1 \vee \operatorname{fin}\mathfrak{F}_2 = HR_0(\operatorname{fin}\mathfrak{F}_1 \cup \operatorname{fin}\mathfrak{F}_2).$$

Так как $\operatorname{fin}\mathfrak{F}_1$ и $\operatorname{fin}\mathfrak{F}_2$ — наследственные формации, то

$$HR_0(\operatorname{fin}\mathfrak{F}_1 \cup \operatorname{fin}\mathfrak{F}_2) = HR_0S(\operatorname{fin}\mathfrak{F}_1 \cup \operatorname{fin}\mathfrak{F}_2).$$

Значит, по лемме 3.5 $\operatorname{fin}\mathfrak{F}_1 \vee \operatorname{fin}\mathfrak{F}_2$ — наследственная формация. Применяя теперь лемму 9.3, заключаем, что

$$\operatorname{fin}(\mathfrak{F}_1 \vee \mathfrak{F}_2) = \operatorname{fin}\mathfrak{F}_1 \vee \operatorname{fin}\mathfrak{F}_2.$$

Ясно также, что

$$\operatorname{fin}(\mathfrak{F}_1 \wedge \mathfrak{F}_2) = \operatorname{fin}(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2) = \operatorname{fin}\mathfrak{F}_1 \cap \operatorname{fin}\mathfrak{F}_2 = \operatorname{fin}\mathfrak{F}_1 \wedge \operatorname{fin}\mathfrak{F}_2.$$

Заметим также, что равенство $\operatorname{fin}\mathfrak{F}_1 = \operatorname{fin}\mathfrak{F}_2$ влечет $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2$. Таким образом, отображение, сопоставляющее каждому многообразию $\mathfrak{M}$ из L_Ω класс $\operatorname{fin}\mathfrak{M}$, является мономорфизмом решетки L_Ω в решетку F_Ω. Теорема доказана.

9.5. Проблема. Является ли отображение fin гомоморфизмом решетки M_Ω в решетку F_Ω?

9.6. Множество многообразий Θ назовем *замкнутым*, если оно со всяким своим многообразием $\mathfrak{M}$ содержит и все подмногообразия из $\mathfrak{M}$.

Теорема. *Пусть A — некоторое замкнутое подмножество решетки многообразий алгебр M_Ω, C — множество всех тех конечных наследственных формаций, каждая из которых входит в некоторое многообразие из A. Пусть L и D — подрешетки решеток M_Ω и F_Ω, порожденные в них соответственно подмножествами A и C. Тогда всякое тождество решетки L выполняется и в решетке D.*

Доказательство. Прежде покажем, что если $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ — произвольные формации и $A \in \mathfrak{F}_1 \triangle \mathfrak{F}_2$, где $\triangle$ — одна из операций $\wedge$ и $\vee$, то найдутся такие алгебры $A_1 \in \mathfrak{F}_1$ и $A_2 \in \mathfrak{F}_2$, что $A \in \mathfrak{H}_1 \triangle \mathfrak{H}_2$, где $\mathfrak{H}_i$ — формация, порожденная алгеброй A_i, $i = 1, 2$. Это очевидно, если $\triangle = \wedge$. Пусть

$$A \in \mathfrak{F}_1 \vee \mathfrak{F}_2 = \operatorname{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2).$$

По лемме 3.2

$$\operatorname{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2) = HR_0(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)$$

Следовательно, A — гомоморфный образ некоторой алгебры $B \in R_0(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)$. По определению класса $R_0(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)$ найдутся такие $\mathfrak{F}_1$-алгебры $A_1, \ldots, A_n$ и $\mathfrak{F}_2$-алгебры $B_1, \ldots, B_m$, что B изоморфна поддекартовому произведению этих алгебр. Следовательно,

$$A \in \operatorname{form} N \vee \operatorname{form} M = \\ = \operatorname{form}(\operatorname{form} N \cup \operatorname{form} M) = \operatorname{form}(N, M),$$

где $N = A_1 \times \ldots \times A_n$ и $M = B_1 \times \ldots \times B_m$. При этом ясно, что $M \in \mathfrak{F}_1$ и $N \in \mathfrak{F}_2$.

Пусть $w = w(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольный терм сигнатуры $\Omega_1 = \langle \wedge, \vee \rangle$ и $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n$ — некоторые формации. Покажем индукцией по числу m вхождений в w символов из Ω_1, что если $A \in w(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n)$, то найдутся такие алгебры $A_1, \ldots, A_n$, что $A \in w(\operatorname{form} A_1, \ldots, \operatorname{form} A_n)$ и $A_i \in \mathfrak{F}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Утверждение очевидно при $m = 0$. Верность утверждения при $m = 1$ доказана в предыдущем абзаце. Пусть

$$w = w_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}) \triangle w_2(x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}),$$

где $\triangle \in \Omega_1$, w_1 и w_2 — термы сигнатуры Ω_1 и

$$\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}\} = \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Тогда

$$A \in w_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_r}) \triangle w_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_m}).$$

Следовательно, существуют такие алгебры A_1 и A_2, что $A \in \operatorname{form} A_1 \triangle \operatorname{form} A_2$ и $A_1 \in w_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_r})$, $A_2 \in w_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_m})$. По индукции найдутся такие алгебры $B_{i_1}, \ldots, B_{i_r}, C_{j_1}, \ldots, C_{j_m}$, что

$$A_1 \in w_1(\operatorname{form} B_{i_1}, \ldots, \operatorname{form} B_{i_r}),$$
$$A_2 \in w_2(\operatorname{form} C_{j_1}, \ldots, \operatorname{form} C_{j_m})$$

и $B_{i_t} \in \mathfrak{F}_{i_t}$ $(t = 1, \ldots, r)$, $C_{j_k} \in \mathfrak{F}_{j_k}$ $(k = 1, \ldots, m)$. Следовательно,

$$A \in w_1(\operatorname{form} B_{i_1}, \ldots, \operatorname{form} B_{i_r}) \triangle w_2(\operatorname{form} C_{j_1}, \ldots, \operatorname{form} C_{j_m}).$$

Значит, тем более

$$A \in w_1(\mathfrak{M}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{i_r}) \triangle w_2(\mathfrak{M}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{j_m}),$$

где $\mathfrak{M}_{i_t} = \operatorname{form} B_{i_t}$, если переменная x_{i_t} не входит в терм w_2, $\mathfrak{M}_{j_k} = \operatorname{form} C_{j_k}$, если переменная x_{j_k} не входит в терм w_1 и $\mathfrak{M}_{i_t} = \mathfrak{M}_{j_k} = \operatorname{form} B_{i_t} \times C_{j_k}$, если $i_t = j_k$. Теперь, поскольку

$$\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}\}=\{x_1, \ldots, x_n\},$$

можно утверждать, что найдутся такие формации $\mathfrak{M}_1, \ldots$ $\ldots, \mathfrak{M}_n$, что $A\in w(\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_n)$ и $\mathfrak{M}_i$ — формация, порожденная некоторой $\mathfrak{F}_i$-алгеброй.

Предположим теперь, что в алгебре L выполняется тождество $w_1=w_2$. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — набор переменных, входящих в терм w_1; $x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_r$ — набор переменных, входящих в терм w_2, причем $p\leqslant n$ и $\{y_1, \ldots, y_r\}\cap$ $\cap\{x_1, \ldots, x_n\}=\varnothing$. Покажем, что для произвольных формаций $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n, \mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_r\in D$ справедливо включение

$$w_1(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n)\subseteq w_2(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_p, \mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_r).$$

Найдутся такие термы

$$m_1(x_{1,1}, \ldots, x_{1,a(1)}), \ldots, m_n(x_{n,1}, \ldots, x_{n,a(n)}),$$
$$v_1(y_{1,1}, \ldots, y_{1,b(1)}), \ldots, v_r(y_{r,1}, \ldots, y_{r,b(r)})$$

сигнатуры Ω_1, что $\mathfrak{F}_i=m_i(\mathfrak{F}_{i,1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i,a(i)})$ и $\mathfrak{M}_j=$ $=v_j(\mathfrak{M}_{j,1}, \ldots, \mathfrak{M}_{j,b(j)})$ для некоторых формаций

$$\mathfrak{F}_{i,1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i,a(i)}, \mathfrak{M}_{j,1}, \ldots, \mathfrak{M}_{j,b(j)}\in C$$
$$(i=1, \ldots, n; \quad j=1, \ldots, r).$$

Пусть A — произвольная алгебра, принадлежащая формации

$$w_1(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n)=w_1(m_1(\mathfrak{F}_{1,1}, \ldots, \mathfrak{F}_{1,a(1)}), \ldots$$
$$\ldots, m_n(\mathfrak{F}_{n,1}, \ldots, \mathfrak{F}_{n,a(n)})).$$

Ввиду доказанного в предыдущем абзаце найдутся такие алгебры

$$A_{1,1}, \ldots, A_{1,a(1)}, \ldots, A_{n,1}, \ldots, A_{n,a(n)},$$

принадлежащие соответственно формациям

$$\mathfrak{F}_{1,1}, \ldots, \mathfrak{F}_{1,a(1)}, \ldots, \mathfrak{F}_{n,1}, \ldots, \mathfrak{F}_{n,a(n)},$$

что

$$A\in w_1(m_1(\overline{\mathfrak{F}}_{1,1}, \ldots, \overline{\mathfrak{F}}_{1,a(1)}), \ldots, m_n(\overline{\mathfrak{F}}_{n,1}, \ldots, \overline{\mathfrak{F}}_{n,a(n)})),$$

где $\overline{\mathfrak{F}}_{i,j}$ — формация, порожденная алгеброй $A_{i,j}$. Пусть $B_{i,j}$ — некоторая алгебра из $\mathfrak{M}_{i,j}$, $i=1, \ldots, r$; $j=1, \ldots$ $\ldots, b(i)$. Обозначим через $\mathfrak{X}_{i,j}$ многообразие, порожденное алгеброй $A_{i,j}$, а через $\mathfrak{H}_{k,l}$ — многообразие, порожденной алгеброй $B_{k,l}$. Заметим, что каждое из таких многообразий принадлежит K. В самом деле, так как алгебра $A_{i,j}$ принадлежит формации $\mathfrak{F}_{i,j}$, а $\mathfrak{F}_{i,j}$, в свою очередь, принадлежит множеству C, то в K найдется такое многообразие $\mathfrak{X}$, что $A_{i,j} \in \mathfrak{X}$. Ясно, что $\mathfrak{X}_{i,j} \subseteq \mathfrak{X}$. Следовательно, поскольку множество K по условию замкнуто, то $\mathfrak{X}_{i,j} \in K$. Теперь мы можем заключить, что

$$m_1(\mathfrak{X}_{1,1}, \ldots, \mathfrak{X}_{1,a(1)}), \ldots, m_n(\mathfrak{X}_{n,1}, \ldots, \mathfrak{X}_{n,a(n)}),$$
$$v_1(\mathfrak{H}_{1,1}, \ldots, \mathfrak{H}_{1,b(1)}), \ldots, v_r(\mathfrak{H}_{r,1}, \ldots, \mathfrak{H}_{r,b(r)}) \in L.$$

Таким образом,

$$\mathfrak{F} = w_1(m_1(\mathfrak{X}_{1,1}, \ldots, \mathfrak{X}_{1,a(1)}), \ldots, m_n(\mathfrak{X}_{n,1}, \ldots, \mathfrak{X}_{n,a(n)})) =$$
$$= w_2(m_1(\mathfrak{X}_{1,1}, \ldots, \mathfrak{X}_{1,a(1)}), \ldots, m_p(\mathfrak{X}_{p,1}, \ldots, \mathfrak{X}_{p,a(p)}),$$
$$v_1(\mathfrak{H}_{1,1}, \ldots, \mathfrak{H}_{1,b(1)}), \ldots, v_r(\mathfrak{H}_{r,1}, \ldots, \mathfrak{H}_{r,b(r)})) = \mathfrak{M}.$$

Всякое многообразие, возникающее в процессе построения многообразия $\mathfrak{M}$ из многообразий

$$\mathfrak{X}_{1,1}, \ldots, \mathfrak{X}_{1,a(1)}, \ldots, \mathfrak{X}_{n,1}, \ldots, \mathfrak{X}_{n,a(n)}, \ldots$$
$$\ldots, \mathfrak{H}_{1,1}, \ldots, \mathfrak{H}_{1,b(1)}, \ldots, \mathfrak{H}_{r,1}, \ldots, \mathfrak{H}_{r,b(r)},$$

локально конечно. Действительно, ввиду п. 14.1 книги [50] локально конечно всякое многообразие $\mathfrak{X}_{i,j}$, $\mathfrak{H}_{k,l}$. Кроме того, если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{H}$ — произвольные локально конечные многообразия, то ввиду леммы 9.2 локально конечны многообразия $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{H}$, $\mathfrak{X} \wedge \mathfrak{H}$.

Ввиду теоремы 9.4 для любых двух локально конечных многообразий $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{H}$ имеет место $\operatorname{fin}(\mathfrak{X} \vee \mathfrak{H}) = \operatorname{fin}\mathfrak{X} \vee \operatorname{fin}\mathfrak{H}$, $\operatorname{fin}(\mathfrak{X} \wedge \mathfrak{H}) = \operatorname{fin}\mathfrak{X} \wedge \operatorname{fin}\mathfrak{H}$. Используя это, а также замечание из предыдущего абзаца, можно показать индукцией по числу вхождений в терм w_2 символов из Ω_1, что

$$\operatorname{fin}\mathfrak{M} = w_2(m_1(\operatorname{fin}\mathfrak{X}_{1,1}, \ldots, \operatorname{fin}\mathfrak{X}_{1,a(1)}), \ldots$$
$$\ldots, m_p(\operatorname{fin}\mathfrak{X}_{p,1}, \ldots, \operatorname{fin}\mathfrak{X}_{p,a(p)}), v_1(\operatorname{fin}\mathfrak{H}_{1,1}, \ldots$$
$$\ldots, \operatorname{fin}\mathfrak{H}_{1,b(1)}), \ldots, v_r(\operatorname{fin}\mathfrak{H}_{r,1}, \ldots, \operatorname{fin}\mathfrak{H}_{r,b(r)})).$$

Ввиду леммы 9.3. $\operatorname{fin}\mathfrak{X}_{i,j} = \operatorname{sform} A_{i,j}$ и $\operatorname{fin}\mathfrak{H}_{k,l} = \operatorname{sform} B_{k,l}$. Значит,

$$\operatorname{fin}\mathfrak{M} \subseteq w_2(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_p, \mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_r).$$

Следовательно, поскольку

$$A \in w_1(m_1(\overline{\mathfrak{F}}_{1,1}, \ldots, \overline{\mathfrak{F}}_{1,a(1)}), \ldots$$
$$\ldots, m_n(\overline{\mathfrak{F}}_{n,1}, \ldots, \overline{\mathfrak{F}}_{n,a(n)})) \subseteq \operatorname{fin}\mathfrak{F} = \operatorname{fin}\mathfrak{M},$$

то $A \in w_2(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_p, \mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_r)$. Таким образом,

$$w_1(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n) \subseteq w_2(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_p, \mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_r).$$

Аналогично можно показать справедливость обратного включения. Следовательно,

$$w_1(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n) = w_2(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_p, \mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_r).$$

Значит, тождество $w_1 = w_2$ выполняется в решетке D. Теорема доказана.

9.7. Замечание. Покажем, что в общем случае решетка D из теоремы 9.6 не является гомоморфным образом решетки L. Пусть $\mathfrak{A}$ — многообразие абелевых групп, L — решетка подмногообразий многообразия $\mathfrak{A}$. Пусть D — решетка всех формаций конечных абелевых групп. Нетрудно установить, что множество D континуально. С другой стороны, множество L счетно. Это означает, что нельзя задать гомоморфизм решетки L на решетку D.

Прежде чем коснуться вопроса применения теорем 9.4 и 9.6, установим следующий полезный факт.

9.8. Теорема. *Если во всякой алгебре формации $\mathfrak{M}$ решетка конгруэнций модулярна, то для любых трех подформаций $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ из $\mathfrak{M}$ таких, что $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$, справедливо равенство*

$$\mathfrak{H} \wedge (\mathfrak{X} \vee \mathfrak{H}) = \mathfrak{X} \vee (\mathfrak{H} \wedge \mathfrak{F}).$$

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\mathfrak{H} \wedge (\mathfrak{X} \vee \mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{X} \vee (\mathfrak{H} \wedge \mathfrak{F}).$$

Пусть

$$A \in \mathfrak{H} \wedge (\mathfrak{X} \vee \mathfrak{F}) = \mathfrak{H} \cap \mathrm{form}\,(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{F}).$$

Ввиду леммы 3.2 A — гомоморфный образ некоторой алгебры $B \in \mathrm{R}_0(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{F})$. Легко видеть, что для некоторых конгруэнций π_1 и π_2 алгебры B имеет место $B/\pi_1 \in \mathfrak{X}$, $B/\pi_2 \in \mathfrak{F}$ и $\pi_1 \cap \pi_2$ — нулевая конгруэнция на B. Пусть π — такая конгруэнция алгебры B, что $A \simeq B/\pi$. Так как по условию решетка конгруэнций алгебры B модулярна, то имеет место равенство

$$\pi_1 \cap ((\pi_1 \cap \pi)\,\pi_2) = (\pi_1 \cap \pi)(\pi_1 \cap \pi_2) = \pi_1 \cap \pi.$$

Таким образом,

$$\pi_1/\pi_1 \cap \pi \cap (\pi_1 \cap \pi)\,\pi_2/\pi_1 \cap \pi = (\pi_1 \cap (\pi_1 \cap \pi)\,\pi_2)/\pi_1 \cap \pi$$

— нулевая конгруэнция на факторалгебре $B/\pi_1 \cap \pi$. Следовательно, поскольку

$$(B/\pi_1 \cap \pi)/(\pi_1/\pi_1 \cap \pi) \simeq B/\pi_1 \in \mathfrak{X}$$

и

$$(B/\pi_1 \cap \pi)/((\pi_1 \cap \pi)\,\pi_2/\pi_1 \cap \pi) \simeq B/(\pi_1 \cap \pi)\,\pi_2 \in \mathfrak{F},$$

то $B/\pi_1 \cap \pi \in \mathrm{R}_0(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{F})$. Так как $B/\pi \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$, то $B/\pi_1 \cap \pi \in \mathfrak{H}$. Значит,

$$B/\pi_1 \cap \pi \in \mathrm{R}_0(\mathfrak{X} \cup (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F})).$$

Поскольку алгебра A является гомоморфным образом факторалгебры $B/\pi_1 \cap \pi$, то из последнего заключаем, что

$$A \in \mathrm{HR}_0(\mathfrak{X} \cup (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F})) = \mathfrak{X} \vee (\mathfrak{H} \wedge \mathfrak{F}).$$

Теорема доказана.

Напомним, что теорема 9.4 была уже использована нами в § 8. Рассмотрим еще два примера применений теорем типа 9.4 и 9.6.

9.9. Следствие. *Решетка формаций конечных групп L модулярна, но не дистрибутивна.*

Доказательство. Модулярность решетки L вытекает из теоремы 9.8. Для доказательства второго утверждения рассмотрим класс $\mathfrak{M}$ локально конечных групп простой экспоненты p. Согласно [42] $\mathfrak{M}$ — многообразие. Пусть $L(\mathfrak{M})$ — решетка его подмногообразий. Тогда ввиду результатов Г. Хигмена [161] (см. п. 54.24 книги [52]) решетка $L(\mathfrak{M})$ не дистрибутивна. Значит, ввиду теоремы 9.4, не дистрибутивна решетка L.

Для описания нетривиальных примеров дистрибутивных подрешеток решетки L можно использовать как теорему 9.4, так и теорему 9.6. Покажем, как может быть применена теорема 9.6.

9.10. Следствие. *Решетка формаций конечных нильпотентных групп класса $\leqslant 3$ дистрибутивна.*

Доказательство. Как известно ([56], [166]), решетка многообразий нильпотентных групп класса $\leqslant 3$ дистрибутивна. Кроме того, согласно лемме 8.10 всякая формация нильпотентных групп наследственна. Теперь нам остается воспользоваться теоремой 9.8.

9.11. Следствие. *Решетка формаций конечных нильпотентных групп класса $\leqslant 4$ не является дистрибутивной.*

Это утверждение вытекает ввиду теоремы 9.4 и результатов работы [40].

Решетка кратно локальных формаций конечных групп. 9.12. Для любого целого неотрицательного числа n через G_n обозначим множество всех n-кратно локальных формаций конечных групп. Для любых двух формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$

из G_n через $\mathfrak{M} \vee_n \mathfrak{H}$ обозначим формацию $\mathfrak{l}_n\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$. Ввиду леммы 2.16 $\mathfrak{M} \wedge \mathfrak{H} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ — n-кратно локальная формация. Значит, $\langle \mathrm{G}_n, \wedge, \vee_n \rangle$ — решетка. Такую решетку мы будем обозначать через L_n. В данном пункте мы установим, что для любых n и m решетки L_n и L_m принадлежат одному многообразию решеток.

9.13. Лемма. *Пусть f — внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$, $\pi = \pi(R)$, где R — цоколь группы A. Тогда если для каждого $p \in \pi$ имеет место $A/\mathrm{F}_p(A) \in f(p)$, то $A \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть $H = \bigcap_{q \in \pi} \mathrm{F}_q(A)$. Так как подгруппа H p-нильпотентна для каждого $p \in \pi$, то H обладает π-холловской подгруппой L, причем L имеет нормальное дополнение T в H. Ясно, что подгруппа T нормальна в A. Предположим, что $T \neq \{1\}$. Тогда $T \cap R \neq \{1\}$. Но T — π'-подгруппа. Противоречие. Значит, $T = \{1\}$, т. е. $H = L$ — π-группа. При этом $A/H \in \mathfrak{F}$. Действительно, A/H изоморфна поддекартовому произведению групп $(A/H)/(\mathrm{F}_p(A)/H) \in f(p) \subseteq \mathfrak{F}$, где p пробегает все простые числа из π. Значит, $A/H \in \mathrm{R}_0\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.

Пусть теперь p — произвольное простое число из $\pi(A) \setminus \pi$. Тогда поскольку H — p'-группа, то $H \subseteq \mathrm{F}_p(A)$ и $\mathrm{F}_p(A)/H = \mathrm{F}_p(A/H)$. Но $A/H \in \mathfrak{F}$. Следовательно,

$$A/\mathrm{F}_p(A) \simeq (A/H)/(\mathrm{F}_p(A)/H) = (A/H)/\mathrm{F}_p(A/H) \in f(p).$$

Таким образом, $A/\mathrm{F}_p(A) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(A)$. В силу леммы 3.40 это означает, что $A \in \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

9.14. Лемма. *Пусть $\mathrm{O}_p(A) = \{1\}$ и $A \in \mathfrak{F} = \mathfrak{l}_n\mathrm{form}\,\mathfrak{M}$. Тогда $A \in \mathfrak{l}_n\mathrm{form}\,\mathfrak{M}_1$, где $\mathfrak{M}_1 = (G/\mathrm{O}_p(G) \mid G \in \mathfrak{M})$.*

Доказательство. Пусть $n = 0$. Можно считать, что $A \notin \mathfrak{M}_2 = \mathrm{H}\mathfrak{M}$. Сопоставим всякой группе $T \in \mathrm{form}\,\mathfrak{M}$ число $\lambda(T) = |T|$. Пусть

$$A \simeq H/N, \qquad H \subseteq A_1 \times \ldots \times A_t,$$

— λ-минимальное представление для A в $\mathrm{form}\,\mathfrak{M}$. Ввиду следствия 2.3 и теоремы 3.11 H имеет нормальные подгруппы $N_1, K_1, \ldots, N_t, K_t$ $(t \geqslant 2)$, удовлетворяющие следующим условиям: 1) для всякого $i \in \{1, \ldots, t\}$ подгруппа $L_i = N_1 \cap \ldots \cap N_{i-1} \cap K_i \cap N_{i+1} \cap \ldots \cap N_t$ является минимальной нормальной в H, причем $L_i \not\subseteq N$ и $L_iN_i = K_i$; 2) H/N_i — монолитическая $\mathfrak{M}_2$-группа с монолитом K_i/N_i; 3) $N_1 \cap \ldots \cap N_t = \{1\}$. Из условий 1)—2) следует, что $\mathrm{O}_p(H/N_i) = \{1\}$. Так как при этом $H/N_i \in \mathfrak{M}_2 = \mathrm{H}\mathfrak{M}$, то $H/N_i \in \mathrm{H}\mathfrak{M}_1$. Но условие 3) означает, что $A \in \mathrm{form}\,\{H/N_1, \ldots, H/N_t\}$. Следовательно, $A \in \mathrm{form}\,\mathfrak{M}_1$.

Пусть теперь $n > 0$, $q \in \pi(A) \setminus \{p\}$ и $\mathfrak{H} = \mathfrak{l}_n\mathrm{form}\,\mathfrak{M}$. Обозначим через f и h минимальные $(n-1)$-кратно локальные экраны формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно. Тогда поскольку для любой группы G имеет место

$$G/\mathrm{F}_q(G) \simeq (G/\mathrm{O}_p(G))/\mathrm{F}_q(G/\mathrm{O}_p(G)),$$

то ввиду теоремы 8.3 $f(q) = h(q)$. Так как по условию $A \in \mathfrak{F}$, то $A/\mathrm{F}_q(A) \in h(q)$. Таким образом, для всякого простого делителя q порядка цоколя группы A имеет место $A/\mathrm{F}_q(A) \in h(q)$. Используя теперь лемму 9.13, заключаем, что $A \in \mathfrak{H}$. Лемма доказана.

9.15. Пусть f_1 и f_2—n-кратно локальные экраны. Обозначим через $f_1 \vee_n f_2$ такой n-кратно локальный экран, что $f_1 \vee_n f_2(p) = f_1(p) \vee_n f_2(p)$ для всякого простого числа p.

Лемма. *Пусть f_i—внутренний $(n-1)$-кратно локальный экран формации $\mathfrak{F}_i$, $i=1, 2$. Тогда $\mathfrak{F}_1 \vee_n \mathfrak{F}_2 = \langle f_1 \vee_{n-1} f_2 \rangle$.*

Доказательство. Покажем прежде, что $\langle f_1 \vee_{n-1} f_2 \rangle \subseteq \mathfrak{F}_1 \vee_n \mathfrak{F}_2$. Предположим противное, и пусть A—группа наименьшего порядка среди групп, входящих в класс $\langle f_1 \vee_{n-1} f_2 \rangle \setminus \mathfrak{F}_1 \vee_n \mathfrak{F}_2$. Тогда A монолитична и ее монолит R нефраттиниев. Пусть $p \in \pi(R)$, $C = C_A(R)$. Поскольку $A \in \langle f_1 \vee_{n-1} f_2 \rangle$, то $A/C \in f_1(p) \vee_{n-1} f_2(p)$. Предположим, что R—неабелева группа. Тогда $C_A(R) = \{1\}$. Значит,

$$A \in f_1(p) \vee_{n-1} f_2(p) = \mathfrak{l}_{n-1}\mathrm{form}\,(f_1(p) \cup f_2(p)).$$

Отсюда и из леммы 3.43 вытекает, что $A \in f_1(p) \cup f_2(p) \subseteq \mathfrak{F}_1 \vee_n \mathfrak{F}_2$. Противоречие.

Пусть R—абелева группа. Выберем в A такую максимальную подгруппу M, что $A = RM$. Тогда $C = C \cap RM = R(C \cap M)$. Понятно, что $C \cap M$—нормальная в A подгруппа. Значит, $C \cap M \subset R$, т.е. $C = R$. Таким образом, $A/R \in f_1(p) \vee_{n-1} f_2(p)$. Ввиду леммы 8.2, $\mathrm{O}_p(A/R) = \{1\}$. Следовательно, по лемме 9.14 $A/R \in \mathfrak{l}_{n-1}\mathrm{form}\,(B/O_p(B) \mid B \in f_1(p) \cup f_2(p))$. Применяя теперь теорему 8.3, видим, что $A/R \in h_1(p) \vee_{n-1} h_2(p)$, где h_i—минимальный $(n-1)$-кратно локальный экран формации $\mathfrak{F}_i$, $i=1, 2$. Значит, группа R $(h_1 \vee_{n-1} h_2)$-центральна. Легко видеть, что $h_1 \vee_{n-1} h_2$—локальный экран формации $\mathfrak{F}_1 \vee_n \mathfrak{F}_2$. Следовательно, поскольку $A/R \in \mathfrak{F}_1 \vee_n \mathfrak{F}_2$, то $A \in \mathfrak{F}_1 \vee_n \mathfrak{F}_2$. Полученное противоречие показывает, что $\langle f_1 \vee_{n-1} f_2 \rangle \subseteq \mathfrak{F}_1 \vee_n \mathfrak{F}_2$. Справедливость обратного включения вытекает из вложения

$h_1 \vee_{n-1} h_2 \leqslant f_1 \vee_{n-1} f_2$. Таким образом, $\langle f_1 \vee_{n-1} f_2 \rangle = \mathfrak{F}_1 \vee_n \mathfrak{F}_2$. Лемма доказана.

9.16. Лемма. *Пусть $A \in w(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_m)$, где $w(x_1, \ldots, x_m)$ — терм сигнатуры $\{\wedge, \vee_n\}$, $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_m$ — некоторые n-кратно локальные формации. Тогда найдутся такие группы $A_1, \ldots, A_m$ $(A_i \in \mathfrak{F}_i)$, что $A \in w(\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_m)$, где $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{l}_n \mathrm{form}\, A_i$.*

Доказательство. Проведем индукцию по числу r вхождений символов из $\{\wedge, \vee_n\}$ в терм w. При $r=0$ утверждение леммы очевидно. Индукцией по n докажем, что утверждение леммы верно при $r=1$. Пусть $n=0$, т. е. либо $A \in \mathfrak{F}_1 \wedge \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$, либо

$$A \in \mathfrak{F}_1 \vee_0 \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{l}_0 \mathrm{form}\, (\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2) = \mathrm{form}\, (\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2).$$

В первом случае $A \in \mathrm{form}\, A \wedge \mathrm{form}\, A$. Во втором случае $A \simeq H/N$, где $H \in \mathrm{R}_0(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)$. Понятно, что $H^{\mathfrak{F}_1} \cap H^{\mathfrak{F}_2} = \{1\}$. Значит,

$$A \in \mathrm{form}\, \{H/H^{\mathfrak{F}_1},\ H/H^{\mathfrak{F}_2}\} = \mathrm{form}\, (H/H^{\mathfrak{F}_1}) \vee \mathrm{form}\, (H/H^{\mathfrak{F}_2}).$$

Пусть $n > 0$, $\{p_1, \ldots, p_t\} = \pi(A)$ и $A \in \mathfrak{F}_1 \vee_n \mathfrak{F}_2$. Тогда ввиду теоремы 8.3 $A/\mathrm{F}_{p_i}(A) \in f_1(p_i) \vee_{n-1} f_2(p_i)$, где f_j — минимальный $(n-1)$-кратно локальный экран формации $\mathfrak{F}_j$, $j=1, 2$. По индукции найдутся такие группы $A_{i_1} \in f_1(p_i)$, $A_{i_2} \in f_2(p_i)$, что

$$A/\mathrm{F}_{p_i}(A) \in \mathfrak{l}_{n-1} \mathrm{form}\, A_{i_1} \vee_{n-1} \mathfrak{l}_{n-1} \mathrm{form}\, A_{i_2}.$$

Ясно, что

$$\mathfrak{l}_{n-1} \mathrm{form}\, A_{i_1} \vee_{n-1} \mathfrak{l}_{n-1} \mathrm{form}\, A_{i_2} = \mathfrak{l}_{n-1} \mathrm{form}\, \{A_{i_1},\ A_{i_2}\}.$$

Следовательно, ввиду леммы 9.14 можно считать, что $|\mathrm{O}_{p_i}(A_{i_1})| = |\mathrm{O}_{p_i}(A_{i_2})| = 1$. Пусть Z_i — группа порядка p_i, $B_{i_1} = Z_i \wr A_{i_1}$, $B_{i_2} = Z_i \wr A_{i_2}$. Ввиду леммы 8.2 $B_{i_1} \in \mathfrak{F}_1$, $B_{i_2} \in \mathfrak{F}_2$. Значит, $A_1 = B_{1_1} \times B_{2_1} \times \ldots \times B_{t_1} \in \mathfrak{F}_1$, $A_2 = B_{1_2} \times B_{2_2} \times \ldots \times B_{t_2} \in \mathfrak{F}_2$. Покажем, что

$$A \in \mathfrak{F} = \mathfrak{l}_n \mathrm{form}\, A_1 \vee_n \mathfrak{l}_n \mathrm{form}\, A_2.$$

Для этого достаточно установить, что $A/\mathrm{F}_{p_i}(A) \in f(p_i)$, где f — минимальный $(n-1)$-кратно локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Понятно, что $B_{i_1} \in \mathfrak{F}$. Значит, $B_{i_1}/\mathrm{F}_{p_i}(B_{i_1}) \in f(p_i)$. Но поскольку $\mathrm{O}_{p_i}(A_{i_1}) = \{1\}$, то $B_{i_1}/\mathrm{F}_{p_i}(B_{i_1}) \simeq A_{i_1}$, т. е. $A_{i_1} \in f(p_i)$. Аналогично убеждаемся, что $A_{i_2} \in f(p_i)$. Следовательно,

$$A/\mathrm{F}_{p_i}(A) \in \mathfrak{l}_{n-1} \mathrm{form}\, \{A_{i_1},\ A_{i_2}\} \subseteq f(p_i).$$

Этим самым мы завершили доказательство леммы при $r=1$.

Пусть теперь терм w имеет $r>1$ вхождений символов из $\{\wedge, \vee_n\}$ и для термов с меньшим числом вхождений лемма верна. Пусть w имеет вид

$$w_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_a}) \triangle w_2(x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}),$$

где $\triangle \in \{\wedge, \vee_n\}$, и

$$\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_a}\} \cup \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}\} = \{x_1, \ldots, x_m\}.$$

Обозначим через $\mathfrak{H}_1$ формацию $w_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_a})$, а через $\mathfrak{H}_2$—формацию $w_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b}\}$. Тогда найдутся такие группы $A_1 \in \mathfrak{H}_1$, $A_2 \in \mathfrak{H}_2$, что $A \in \mathfrak{l}_n\mathrm{form}\, A_1 \triangle \mathfrak{l}_n \mathrm{form}\, A_2$. С другой стороны, согласно индуктивному предположению найдутся такие группы $B_1, \ldots, B_a$, $C_1, \ldots, C_b$, что $B_k \in \mathfrak{F}_{i_k}$, $C_k \in \mathfrak{F}_{j_k}$, $A_1 \in w_1(\mathfrak{l}_n\mathrm{form}\, B_1, \ldots, \mathfrak{l}_n\mathrm{form}\, B_a)$, $A_2 \in$ $\in w_2(\mathfrak{l}_n\,\mathrm{form}\, C_1, \ldots, \mathfrak{l}_n\,\mathrm{form}\, C_b)$. Пусть переменные $x_{i_1}, \ldots$ $\ldots, x_{i_t}$ не входят в слово w_2, а все переменные $x_{i_{t+1}}, \ldots$ $\ldots, x_{i_a}$ в это слово входят. Пусть $D_{i_k} = B_k$, если $k < t+$ $+1$, $D_{i_k} = B_k \times C_q$, где q такое, что $x_{i_k} = x_{j_q}$ при всех $k \geqslant t+1$, и пусть $D_{j_k} = C_k$, если $x_{j_k} \notin \{x_{i_{t+1}}, \ldots, x_{i_b}\}$. Обозначим через $\mathfrak{M}_p$ формацию $\mathfrak{l}_n\mathrm{form}\, D_{i_p}$, а через $\mathfrak{X}_c$—формацию $\mathfrak{l}_n\mathrm{form}\, D_{j_c}$, $p=1, \ldots, a$, $c=1, \ldots, b$. Тогда ясно, что

$$A_1 \in w_1(\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_a),\ A_2 \in w_2(\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_b).$$

Значит, найдутся такие формации $\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_m$, что $A \in w_1(\mathfrak{H}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{H}_{i_a}) \triangle w_2(\mathfrak{H}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{H}_{j_b}) = w(\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_m)$, кроме того, $\mathfrak{H}_i = \mathfrak{l}_n\mathrm{form}\, K_i$, где $K_i \in \mathfrak{F}_i$. Лемма доказана.

В последующих леммах для всякого терма w сигнатуры $\{\wedge, \vee_n\}$ через $\overline{w}$ будем обозначать терм сигнатуры $\{\wedge, \vee_{n-1}\}$, получаемый из терма w заменой каждого вхождения символа $\vee_n$ на символ $\vee_{n-1}$.

9.17. Лемма. *Пусть $w(x_1, \ldots, x_m)$—терм сигнатуры $\{\wedge, \vee_n\}$, f_i—внутренний $(n-1)$-кратно локальный экран формации $\mathfrak{F}_i$, $i=1, \ldots, m$. Тогда*

$$w(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_m) = \langle \overline{w}(f_1, \ldots, f_m) \rangle.$$

Доказательство. Проведем индукцию по числу r вхождений в терм w символов из $\{\wedge, \vee_n\}$. Ввиду лемм 2.16 и 9.15 утверждение леммы справедливо при $r=1$. Пусть

$$w(x_1, \ldots, x_m) = w_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_a}) \triangle w_2(x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}),$$

где $\triangle \in \{\wedge, \vee_n\}$,

$$\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_a}\} \cup \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}\} = \{x_1, \ldots, x_m\},$$

и лемма для термов w_1, w_2 выполняется. Тогда

$$w_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_a}) = \langle \overline{w}_1(f_{i_1}, \ldots, f_{i_a})\rangle,$$

$$w_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b}) = \langle \overline{w}_2(f_{j_1}, \ldots, f_{j_b})\rangle.$$

Понятно, что оба экрана $\overline{w}_1(f_{i_1}, \ldots, f_{i_a})$ и $\overline{w}_2(f_{j_1}, \ldots, f_{j_b})$ внутренние. Значит,

$$w(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_m) = w_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_a}) \triangle w_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b}) =$$
$$= \langle \overline{w}_1(f_{i_1}, \ldots, f_{i_a}) \overline{\triangle}\, \overline{w}_2(f_{j_1}, \ldots, f_{j_b})\rangle = \langle \overline{w}(f_1, \ldots, f_m)\rangle,$$

где $\overline{\triangle} = \wedge$, если $\triangle = \wedge$, и $\overline{\triangle} = \vee_{n-1}$, если $\triangle = \vee_n$. Лемма доказана.

Назовем n-кратно локальную формацию $\mathfrak{F}$ *однопорожденной*, если найдется такая группа G, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{l}_n\mathrm{form}\, G$.

9.18. Лемма. *Пусть M — такая подрешетка решетки L_n, которая со всякой своей формацией $\mathfrak{F}$ содержит и все однопорожденные n-кратно локальные подформации из $\mathfrak{F}$. Тождество $w_1 = w_2$ сигнатуры $\{\wedge, \vee_n\}$ истинно в M, если оно выполняется для всех однопорожденных n-кратно локальных формаций из M.*

Доказательство. Пусть $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ — переменные, входящие в терм w_1; $x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}$ — переменные, входящие в терм w_2, и пусть $\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_a}, \mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b} \in M$. Покажем, что

$$\mathfrak{F} = w_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_a}) \subseteq w_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b}) = \mathfrak{M}.$$

Не теряя общности, мы можем считать, что $x_{j_1}, \ldots, x_{j_t} \in \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_a}\}$, но $\{x_{j_{t+1}}, \ldots, x_{j_b}\} \cap \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_a}\} = \varnothing$. Пусть $A \in \mathfrak{F}$. Тогда по лемме 9.16 найдутся такие группы $A_{i_1}, \ldots, A_{i_a}$, что $A_{i_k} \in \mathfrak{F}_{i_k}$ и $A \in w_1(\mathfrak{l}_n\mathrm{form}\, A_{i_1}, \ldots, \mathfrak{l}_n\mathrm{form}\, A_{i_a})$. Пусть $\mathfrak{H}_{i_k} = \mathfrak{l}_n\mathrm{form}\, A_{i_k}$, $\mathfrak{H}_{j_k} = \mathfrak{H}_{i_c}$, если $x_{j_k} = x_{i_c}$, и пусть для каждого $k > t$ $\mathfrak{H}_{j_k} = \mathfrak{l}_n\mathrm{form}\, B_{j_k}$, где B_{j_k} — некоторая группа из $\mathfrak{F}_{j_k}$. По условию

$$w_1(\mathfrak{H}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{H}_{i_a}) = w_2(\mathfrak{H}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{H}_{j_b}).$$

Но $w_2(\mathfrak{H}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{H}_{j_b}) \subseteq \mathfrak{M}$. Значит, $A \in \mathfrak{M}$. Таким образом, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$. Аналогично доказывается обратное включение. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$. Лемма доказана.

9.19. Положим $\mathfrak{N}^0=\mathfrak{E}$, и пусть при $n\geqslant 1$

$$\mathfrak{N}^n=\underbrace{\mathfrak{N}\ldots\mathfrak{N}}_{n}.$$

Из следствия 7.21 вытекает, что для любой формации $\mathfrak{F}$ и для всякого целого неотрицательного числа n формация $\mathfrak{N}^n\mathfrak{F}$ n-кратно локальна. Множество всех n-кратно локальных подформаций из $\mathfrak{N}^n\mathfrak{F}$ является подрешеткой решетки L_n. Эту подрешетку мы обозначим через $\mathrm{L}_n(\mathfrak{N}^n\mathfrak{F})$.

9.20. Теорема. *При всяком натуральном n решетки $\mathrm{L}_n(\mathfrak{N}^n\mathfrak{F})$ и $\mathrm{L}_{n-1}(\mathfrak{N}^{n-1}\mathfrak{F})$ порождают одно и то же многообразие.*

Доказательство. Зафиксируем некоторое тождество

$$w_1(x_{i_1},\ \ldots,\ x_{i_a})=w_2(x_{j_1},\ \ldots,\ x_{j_b}) \qquad (1)$$

сигнатуры $\{\wedge,\ \vee_n\}$.

Предположим, что тождество (1) выполняется в решетке $\mathrm{L}_n(\mathfrak{N}^n\mathfrak{F})$. Покажем, что тождество

$$\overline{w}_1(x_{i_1},\ \ldots,\ x_{i_a})=\overline{w}_2(x_{j_1},\ \ldots,\ x_{j_b}) \qquad (2)$$

выполняется в решетке $\mathrm{L}_{n-1}(\mathfrak{N}^{n-1}\mathfrak{F})$. Для этого ввиду леммы 9.17 достаточно установить, что если $\mathfrak{F}_{i_1},\ \ldots$ $\ldots,\ \mathfrak{F}_{i_a},\ \mathfrak{F}_{j_1},\ \ldots,\ \mathfrak{F}_{j_b}$ — произвольные однопорожденные $(n-1)$-кратно локальные формации из $\mathrm{L}_{n-1}(\mathfrak{N}^{n-1}\mathfrak{F})$, то $\overline{w}_1(\mathfrak{F}_{i_1},\ \ldots,\ \mathfrak{F}_{i_a})=\overline{w}_2(\mathfrak{F}_{j_1},\ \ldots,\ \mathfrak{F}_{j_b})$. Пусть $\mathfrak{F}_{i_c}=\mathfrak{l}_{n-1}\mathrm{form}\,A_{i_c}$, $\mathfrak{F}_{j_d}=\mathfrak{l}_{n-1}\mathrm{form}\,A_{j_d}$, $c=1,\ \ldots,\ a$; $d=1,\ \ldots,\ b$. Выберем такое простое число p, что $p\notin\pi(A_{i_1},\ \ldots,\ A_{i_a},\ A_{j_1},\ \ldots,\ A_{j_b})$, и пусть $B_{i_c}=P\,\wr\,A_{i_c}$, $B_{j_d}=P\,\wr\,A_{j_d}$ — регулярные сплетения, где P — группа порядка p. Понятно, что формации

$$\mathfrak{M}_{i_1}=\mathfrak{l}_n\mathrm{form}\,B_{i_1},\ \ldots,\ \mathfrak{M}_{i_a}=\mathfrak{l}_n\mathrm{form}\,B_{i_a},$$
$$\mathfrak{M}_{j_1}=\mathfrak{l}_n\mathrm{form}\,B_{j_1},\ \ldots,\ \mathfrak{M}_{j_b}=\mathfrak{l}_n\mathrm{form}\,B_{j_b}$$

принадлежат решетке $\mathrm{L}_n(\mathfrak{N}^n\mathfrak{F})$. Значит,

$$\mathfrak{F}=w_1(\mathfrak{M}_{i_1},\ \ldots,\ \mathfrak{M}_{i_a})=\mathfrak{M}=w_2(\mathfrak{M}_{j_1},\ \ldots,\ \mathfrak{M}_{j_b}).$$

Пусть f_{i_c} — минимальный $(n-1)$-кратно локальный экран формации $\mathfrak{M}_{i_c}$, а f_{j_d} — минимальный $(n-1)$-кратно локальный экран формации $\mathfrak{M}_{j_d}$. Тогда ввиду леммы 9.17

$$w_1(\mathfrak{M}_{i_1},\ \ldots,\ \mathfrak{M}_{i_a})=\langle\overline{w}_1(f_{i_1},\ \ldots,\ f_{i_a})\rangle,$$
$$w_2(\mathfrak{M}_{j_1},\ \ldots,\ \mathfrak{M}_{j_b})=\langle\overline{w}_2(f_{j_1},\ \ldots,\ f_{j_b})\rangle.$$

Пусть f и m — минимальные $(n-1)$-кратно локальные экраны формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$ соответственно. Нетрудно убедиться, что

$$\bar{w}_1(f_{i_1}, \ldots, f_{i_a})(p) = f(p)$$

и

$$\bar{w}_2(f_{j_1}, \ldots, f_{j_b})(p) = m(p).$$

Значит,

$$\bar{w}_1(f_{i_1}(p), \ldots, f_{i_a}(p)) = \bar{w}_2(f_{j_1}(p), \ldots, f_{j_b}(p)).$$

Но ввиду теоремы 8.3.

$$f_{i_c}(p) = \mathfrak{F}_{i_c},\quad f_{j_d}(p) = \mathfrak{F}_{j_d},\quad c = 1, \ldots, a;\ d = 1, \ldots, b.$$

Следовательно,

$$\bar{w}_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_a}) = \bar{w}_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b}),$$

т. е. тождество (2) истинно в решетке $\mathrm{L}_{n-1}(\mathfrak{N}^{n-1}\mathfrak{F})$.

Предположим теперь, что тождество (2) выполняется в решетке $\mathrm{L}_{n-1}(\mathfrak{N}^{n-1}\mathfrak{F})$. Пусть $\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_a}, \mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b}$ — произвольные формации из $\mathrm{L}_n(\mathfrak{N}^n\mathfrak{F})$, f_{i_c} — минимальный $(n-1)$-кратно локальный экран формации $\mathfrak{F}_{i_c}$, f_{j_d} — минимальный $(n-1)$-кратно локальный экран формации $\mathfrak{F}_{j_d}$. По лемме 9.16

$$w_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_a}) = \langle \bar{w}_1(f_{i_1}, \ldots, f_{i_a})\rangle,$$

$$w_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b}) = \langle \bar{w}_2(f_{j_1}, \ldots, f_{j_b})\rangle.$$

Для произвольного простого числа p формации $f_{i_1}(p), \ldots, f_{i_a}(p), f_{j_1}(p), \ldots, f_{j_b}(p)$ принадлежат решетке $\mathrm{L}_{n-1}(\mathfrak{N}^{n-1}\mathfrak{F})$. Значит,

$$\bar{w}_1(f_{i_1}, \ldots, f_{i_a})(p) = \bar{w}(f_{i_1}(p), \ldots, f_{i_a}(p)) =$$
$$= \bar{w}_2(f_{j_1}(p), \ldots, f_{j_b}(p)) = \bar{w}_2(f_{j_1}, \ldots, f_{j_b})(p).$$

Следовательно,

$$w_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_a}) = w_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b}).$$

Таким образом, тождество (1) выполняется в решетке $\mathrm{L}_n(\mathfrak{N}^n\mathfrak{F})$. Теорема доказана.

9.21. Следствие. *Для любых целых неотрицательных чисел n и m имеет место*

$$\mathrm{var}\,\mathrm{L}_n = \mathrm{var}\,\mathrm{L}_m.$$

Из следствий 9.21 и 9.9 вытекает

9.22. Следствие. *Для любого целого неотрицательного числа n решетка* L_n *модулярна, но не дистрибутивна.*

Применяя следствие 9.10, получаем такой результат.

9.23. Следствие. *Пусть* $\mathfrak{F}$ — *формация конечных нильпотентных групп класса* $\leqslant 3$. *Тогда для любого целого неотрицательного числа n решетка* $\mathrm{L}_n(\mathfrak{N}^n\mathfrak{F})$ *дистрибутивна.*

§ 10. Комментарии

10.1. Параграф 6 написан на основе работ А. И. Мальцева [47] и Л. А. Шеметкова [113]. Вся терминология, связанная с поляризованными и трансхарактеристическими классами алгебраических систем, принадлежит А. И. Мальцеву [47]. Понятие репличного умножения классов алгебраических систем предложено Л. А. Шеметковым [113].

10.2. На ассоциативность умножения формаций конечных групп обратил внимание Гашюц [148]. По всей видимости (репличное) умножение формаций конечных ассоциативных колец не является ассоциативным. Было бы интересно рассмотреть примеры, подтверждающие это предположение.

10.3. Параграф 7 посвящен изложению результатов работ Л. А. Шеметкова [110] и [112].

10.4. Обозначим через G_∞ подполугруппу тотально локальных формаций полугруппы $\mathrm{G}\mathfrak{G}$. Элемент $\mathfrak{F}\in\mathrm{G}_\infty$ назовем *неразложимым*, если равенство $\mathfrak{F}=\mathfrak{M}\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}, \mathfrak{H}\in\mathrm{G}_\infty$, возможно лишь, если $\mathfrak{E}\in\{\mathfrak{M}, \mathfrak{H}\}$.

Проблема. Является ли свободной подполугруппа полугруппы G_∞, порожденная в ней неразложимыми формациями?

10.5. Проблема. Допускает ли всякий элемент из G_∞, не являющийся идемпотентом в G_∞, представление в виде произведения конечного числа неразложимых элементов из G_∞?

10.6. Проблема. Верно ли, что всякая формация, являющаяся идемпотентом в G_∞, не может быть представлена в виде произведения конечного числа неразложимых элементов из G_∞?

10.7. Проблема. Какова тотально локальная в $\mathfrak{G}$ формация $\mathfrak{M}$, если для любых ее двух тотально локальных в $\mathfrak{G}$ подформаций $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ выполнено условие коммутативности

$$\mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{F} = \mathfrak{F} \underset{\mathfrak{M}}{\cdot} \mathfrak{H}?$$

10.8. Результаты § 8, 9 принадлежат А. Н. Скибе [85, 92]. Следствие 8.6 доказано Картером и Хоуксом [130], а также П. Шмидом [177]. Следствие 8.19 принадлежит А. Л. Шмелькину [115].

10.9. Проблема. Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$—произвольные формации нильпотентных групп ступени $\leqslant 3$. Верно ли, что

$$\mathfrak{M} \wedge (\mathfrak{H} \vee \mathfrak{F}) = (\mathfrak{M} \wedge \mathfrak{H}) \vee (\mathfrak{M} \wedge \mathfrak{F})?$$

10.10. Для любых двух тотально локальных в $\mathfrak{G}$ формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ положим

$$\mathfrak{M} \vee_{\infty} \mathfrak{H} = l_{\infty}\mathrm{form}\,(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}).$$

Всякое множество тотально локальных в $\mathfrak{G}$ формаций, замкнутое относительно операций $\wedge$ и $\vee_{\infty}$, будем называть *решеткой тотально локальных формаций.*

Теорема. *Решетка разрешимых тотально локальных в $\mathfrak{G}$ формаций дистрибутивна.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 9.18.

10.11. Проблема. Дистрибутивна ли решетка тотально локальных в $\mathfrak{G}$ формаций?

10.12. Проблема. Описать такие конечные формации алгебраических систем, у которых решетка подформаций является решеткой с дополнениями.

В связи с этой задачей отметим без доказательства следующий полученный нами результат.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$—некоторая конечная мальцевская формация. Тогда решетка подформаций $\mathfrak{F}$ в том и только в том случае является решеткой с дополнениями, когда $\mathfrak{F} = \mathrm{form}\,\mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$—некоторый набор простых алгебр.*

10.13. Формацию конечных групп $\mathfrak{F}$ назовем *А-формацией*, если у любой группы из $\mathfrak{F}$ силовские подгруппы абелевы.

Теорема. *Решетка подформаций любой А-формации дистрибутивна.*

Эта теорема, как и сформулированная выше теорема 10.12, может быть доказана на основе развитых в главе 1 результатов о порожденных формациях. Ввиду теоремы 9.4 из теоремы 10.13 вытекает известный результат

Дж. Косси о том, что всякая решетка локально конечных многообразий A-групп дистрибутивна [132].

10.14. В случае групп проблема 9.5 эквивалентна задаче Ковача (задача 8.22 из сборника «Коуровская тетрадь: Нерешенные вопросы теории групп» — 9-е изд. — Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1984).

10.15. Отметим, что результаты § 9, доказанные для алгебр, могут быть распространены на алгебраические системы, сигнатура которых имеет лишь конечное множество предикатных символов.

ГЛАВА 3

ПОДАЛГЕБРЫ АЛГЕБР МАЛЬЦЕВСКОГО МНОГООБРАЗИЯ

Все рассматриваемые в данной главе алгебры предполагаются входящими в некоторое фиксированное мальцевское многообразие. Кроме того, мы будем предполагать, что все встречающиеся здесь алгебры удовлетворяют условиям максимальности и минимальности для подалгебр.

§ 11. $\mathfrak{F}$-проекторы и $\mathfrak{F}$-полупроекторы

Подалгебру H алгебры A называют *$\mathfrak{X}$-максимальной*, если H принадлежит классу $\mathfrak{X}$ и всегда из $H \subseteq T \subseteq A$, где $T \in \mathfrak{X}$, следует, что $T = H$.

11.1. Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольный класс алгебр. Подалгебру H алгебры A назовем ее ***$\mathfrak{F}$-проектором***, если всегда из $H \subseteq T \subseteq A$ следует, что для любой конгруэнции π на T алгебра $\pi H/\pi$ является $\mathfrak{F}$-максимальной в T/π.

Рассмотрим несколько известных примеров.

11.2. Пример. Пусть P — силовская p-подгруппа конечной группы G. Тогда P — $\mathfrak{F}$-проектор G, где $\mathfrak{F}$ — класс всех конечных p-групп.

11.3. Пример. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация нильпотентных алгебр Ли, A — разрешимая конечномерная алгебра Ли. Покажем, что подалгебра H тогда и только тогда является подалгеброй Картана, когда H — $\mathfrak{F}$-проектор алгебры A. Действительно, пусть H — подалгебра Картана, т. е. $H = N_A(H)$ и H нильпотентна. Предположим, что $H \subseteq T \subseteq A$ и $T/N \in \mathfrak{F}$ для некоторого идеала N подалгебры T. Можно показать, что $H+N/N$ — подалгебра Картана в T/N. Но T/N — нильпотентная алгебра, и поэтому каждая ее собственная подалгебра отлична от своего нормализатора в T/N. Значит, $H+N/N = T/N$, т. е. $H+N = T$. Таким образом, H — $\mathfrak{F}$-проектор A. С другой стороны, если H —

$\mathfrak{F}$-проектор алгебры A, то H — нильпотентная алгебра. Кроме того, если $x \in N_A(H)$, то $\langle H, x\rangle / H \in \mathfrak{F}$, и поэтому $\langle H, x\rangle = H + H = H$, т. е. $x \in H$. Значит, H — подалгебра Картана алгебры A.

11.4. Пример. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация нильпотентных групп, G — конечная разрешимая группа. Рассуждения из предыдущего примера показывают, что подгруппа H группы G тогда и только тогда является ее подгруппой Картера (т. е. H нильпотентна и $H = N_G(H)$), когда H — $\mathfrak{F}$-проектор A.

Для рассмотрения последующих примеров дадим описание $\mathfrak{F}$-проекторов в случае, когда $\mathfrak{F}$ — полуформация.

11.5. Лемма. *Пусть H — подалгебра алгебры A, Ω — множество всех таких конгруэнций π на A, что $\pi H = H$. Пусть H_A — конгруэнция на A, порожденная множеством Ω. Тогда $H_A \in \Omega$.*

Доказательство. Пусть tH_Ah, где $h \in H$. Тогда в Ω найдутся такие конгруэнции $\pi_1, \ldots, \pi_n$, что $t\pi_1 \ldots \pi_r h$ (см. § 2 гл. 1 книги [50]). Значит, $t \in H$. Следовательно, $H_AH = H$. Лемма доказана.

Подалгебру M алгебры A назовем *максимальной*, если $M \subset A$ и всегда из $M \subseteq T \subset A$ следует, что T совпадает с M.

Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторый класс алгебр, M — максимальная подалгебра алгебры A. Будем говорить: M *$\mathfrak{F}$-нормальна* в A, если $A/M_A \in \mathfrak{F}$; M *$\mathfrak{F}$-абнормальна* в A, если $A/M_A \notin \mathfrak{F}$.

Подалгебру H алгебры A назовем *$\mathfrak{F}$-абнормальной*, если всегда из $H \subseteq M \subset T \subseteq A$, где M — максимальная подалгебра в T, следует, что M $\mathfrak{F}$-абнормальна в T.

11.6. Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторая полуформация. Подалгебра H алгебры A тогда и только тогда является $\mathfrak{F}$-проектором в A, когда $H \in \mathfrak{F}$ и H $\mathfrak{F}$-абнормальна в A.*

Доказательство. Предположим, что H — $\mathfrak{F}$-проектор алгебры A. Тогда $H \in \mathfrak{F}$. Пусть $H \subseteq M \subset T \subseteq A$, где M — максимальная подалгебра алгебры T. Допустим, что $T/M_T \in \mathfrak{F}$. Тогда поскольку H — $\mathfrak{F}$-проектор A, то $M_TH = T$. Но $M_TH \subseteq M \neq T$. Противоречие. Значит, $T/M_T \notin \mathfrak{F}$. Таким образом, H $\mathfrak{F}$-абнормальна в A.

Предположим теперь, что $H \in \mathfrak{F}$ и H $\mathfrak{F}$-абнормальна в A. Допустим, что H не является $\mathfrak{F}$-проектором в A. Выберем в A такую подалгебру K, содержащую H, что H не является $\mathfrak{F}$-проектором в K, но H — $\mathfrak{F}$-проектор в любой собственной подалгебре из K, содержащей H. Пусть L — такая подалгебра алгебры K, что $H \subseteq L$, $L/\pi \in \mathfrak{F}$ и $\pi H \neq L$

для некоторой конгруэнции π на L. Тогда $L=K$. Пусть M — такая максимальная подалгебра из K, что $\pi H \subseteq M$. Так как $H \subseteq \pi H \subseteq M$ и H $\mathfrak{F}$-абнормальна в A, то $K/M_K \notin \mathfrak{F}$. Предположим, что $\pi \subseteq M_K$. Тогда $K/M_K \simeq (K/\pi)/(M_K/\pi)$ — гомоморфный образ $\mathfrak{F}$-алгебры K/π. Так как $\mathfrak{F}$ — полуформация, то последнее означает, что $K/M_K \in \mathfrak{F}$, но это невозможно. Значит, $\pi \not\subseteq M_K$, т. е. $M \subset \pi M$. Но M — максимальная подалгебра в K и поэтому $\pi M = K$. Следовательно, ввиду изоморфизма $\pi M/\pi \simeq M/\pi \cap M^2$ имеет место $M/\pi \cap M^2 \in \mathfrak{F}$. Из определения алгебры K вытекает, что H — $\mathfrak{F}$-проектор в M. Значит, $M = (\pi \cap M^2)H \subseteq \pi H$. Следовательно, $\pi H = M$, и поэтому $K = \pi M = \pi(\pi H) = \pi H$. Полученное противоречие показывает, что H — $\mathfrak{F}$-проектор в A. Теорема доказана.

11.7. Пример. Пусть G — конечная разрешимая группа. *Подгруппой Гашюца* группы G называют всякую такую ее сверхразрешимую подгруппу H, которая удовлетворяет следующему условию: для любых двух подгрупп M и T из G, где M — максимальна в T и $H \subseteq M$, число $|T:M|$ не является простым.

Пусть $\mathfrak{F}$ — формация конечных сверхразрешимых групп. Покажем, что подгруппа L группы G тогда и только тогда является ее $\mathfrak{F}$-проектором, когда L — подгруппа Гашюца G. Ввиду теоремы 11.6 достаточно установить, что если E — максимальная подгруппа конечной разрешимой группы F, то условие $F/E_F \notin \mathfrak{F}$ эквивалентно тому, что число $|F:E|$ не просто. Пусть R/E_F — минимальная нормальная подгруппа в F/E_F. Тогда $|R/E_F| = |F:E|$. Кроме того, ввиду леммы 3.29 $F/E_F \simeq R/E_F \leftthreetimes G/C_G(R/E_F)$. Пусть $|F:E|$ — простое число p. Тогда группа F/E_F сверхразрешима, так как она является расширением циклической группы порядка p при помощи некоторой группы автоморфизмов этой группы. С другой стороны, если $F/E_F \in \mathfrak{F}$, то R/E_F — группа простого порядка, т. е. $|F:E_F|$ — простое число.

11.8. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация сверхразрешимых алгебр Ли (алгебра Ли называется *сверхразрешимой*, если она конечномерна и ее главные факторы одномерны), A — конечномерная разрешимая алгебра. Используя рассуждения из примера 11.7, можно показать, что подалгебра H алгебры A тогда и только тогда является $\mathfrak{F}$-проектором в A, когда H сверхразрешима и выполняется следующее условие: для любых двух подалгебр M и T из A, где M максимальна в T и $H \subseteq M$, имеет место $\dim T - \dim M \neq 1$.

11.9. Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольный класс алгебр. Подалгебру H алгебры A назовем ее ***$\mathfrak{F}$-полупроектором***, если для любой конгруэнции π на A подалгебра $\pi H/\pi$ $\mathfrak{F}$-максимальна в A/π.

Понятно, что всякий $\mathfrak{F}$-проектор алгебры A является ее $\mathfrak{F}$-полупроектором. Как показывает следующий пример, обратное в общем случае неверно.

11.10. Пример. Пусть G—простая группа порядка 60, G_2—некоторая ее силовская 2-подгруппа. Обозначим через $\mathfrak{N}$ класс конечных нильпотентных групп. Тогда поскольку G_2—$\mathfrak{N}$-максимальная подгруппа в G, то G_2—$\mathfrak{N}$-полупроектор в G. С другой стороны, поскольку $N_G(G_2)/G_2$—группа порядка 3, то $N_G(G_2)/G_2 \in \mathfrak{N}$ и $N_G(G_2) \neq G_2$, т. е. подгруппа G_2 не является $\mathfrak{N}$-проектором в G.

11.11. Лемма. *Пусть $\mathfrak{F}$—произвольный абстрактный класс алгебр, H—$\mathfrak{F}$-проектор ($\mathfrak{F}$-полупроектор) алгебры A. Тогда для любой конгруэнции π на A подалгебра $\pi H/\pi$—$\mathfrak{F}$-проектор (соответственно $\mathfrak{F}$-полупроектор) в A/π.*

Доказательство. Предположим, что H—$\mathfrak{F}$-проектор в A. Пусть M/π—произвольная подалгебра из A/π, содержащая $\pi H/\pi$, и $\bar{\tau}$—некоторая конгруэнция на M/π. Допустим, что $(\bar{\tau}\pi H/\pi)/\bar{\tau} \subset (L/\pi)/\bar{\tau}$, где $(L/\pi)/\bar{\tau}$—некоторая подалгебра из $(M/\pi)/\bar{\tau}$, входящая в $\mathfrak{F}$. Пусть $\bar{\tau} = \tau/\pi$, где τ—конгруэнция на M. Тогда поскольку $(L/\pi)/\bar{\tau} \simeq L/\tau$, то $L/\tau \in \mathfrak{F}$. Но $H \subseteq L$ и поэтому $L = \tau H$. Значит,

$$(\bar{\tau}\pi H/\pi)/\bar{\tau} = ((\tau/\pi)(\pi H/\pi))/(\tau/\pi) = (\tau H/\pi)/(\tau/\pi) =$$
$$= (L/\pi)/(\tau/\pi) = (L/\pi)/\bar{\tau}.$$

Полученное противоречие показывает, что $\pi H/\pi$—$\mathfrak{F}$-проектор в A/π.

Аналогично показывается, что если H—$\mathfrak{F}$-полупроектор в A, то $\pi H/\pi$—$\mathfrak{F}$-полупроектор в A/π. Лемма доказана.

11.12. Лемма. *Пусть $\mathfrak{F}$—полуформация, π—некоторая конгруэнция на алгебре A. Тогда если T/π—$\mathfrak{F}$-проектор ($\mathfrak{F}$-полупроектор) в A/π, а H—$\mathfrak{F}$-проектор (соответственно $\mathfrak{F}$-полупроектор) в T, то H—$\mathfrak{F}$-проектор (соответственно $\mathfrak{F}$-полупроектор) в A.*

Доказательство. Предположим, что T/π—$\mathfrak{F}$-проектор в A/π, а H—$\mathfrak{F}$-проектор в T. Пусть $H \subseteq U \subseteq A$ и для некоторой конгруэнции φ на U имеет место $U/\varphi \in \mathfrak{F}$. Отображение f: $[x]_{U^2 \cap \pi} \to [x]_\pi$, $x \in U$, является изоморфизмом алгебры $U/U^2 \cap \pi$ на алгебру $\pi U/\pi$. Функция f переводит $(\pi \cap U^2) H/\pi \cap U^2$ в $\pi H/\pi$. Ввиду леммы 11.11 $\pi H/\pi$—$\mathfrak{F}$-проектор в T/π. Но по условию T/π—$\mathfrak{F}$-проектор в A/π. Значит, $\pi H/\pi = T/\pi$ — $\mathfrak{F}$-проектор в $\pi U/\pi$. Следовательно, $(\pi \cap U^2) H/(\pi \cap U^2)$ — $\mathfrak{F}$-проектор в $U/\pi \cap U^2$. Поскольку

$$L = (U/(U^2 \cap \pi))/(\varphi (U^2 \cap \pi)/(U^2 \cap \pi)) \simeq U/\varphi (U^2 \cap \pi)$$

— гомоморфный образ $U/\varphi \in \mathfrak{F}$, то $L \in \mathfrak{F}$, и поэтому

$$U/(U^2 \cap \pi) = (\varphi (U^2 \cap \pi)/(U^2 \cap \pi)) ((\pi \cap U^2) H/(U^2 \cap \pi)) = \\ = \varphi (U^2 \cap \pi) H/(U^2 \cap \pi).$$

Значит, $U = \varphi (U^2 \cap \pi) H$. Так как $(U^2 \cap \pi) H \subseteq U \cap T$, то последнее влечет $U = \varphi (U \cap T)$. Кроме того,

$$U/\varphi = \varphi (U \cap T)/\varphi \simeq U \cap T/(U \cap T)^2 \cap \varphi \in \mathfrak{F}.$$

Поскольку H — $\mathfrak{F}$-проектор в $U \cap T$, то $U \cap T = ((U \cap T)^2 \cap \varphi) H$. Значит,

$$U = \varphi (U \cap T) = \varphi (((U \cap T)^2 \cap \varphi) H) = \varphi H.$$

Таким образом, H — $\mathfrak{F}$-проектор A.

Предположим теперь, что T/π — $\mathfrak{F}$-полупроектор в A/π, а H — $\mathfrak{F}$-полупроектор в T. Пусть φ — произвольная конгруэнция на A, U/φ — такая подалгебра в A/φ, что $H \subseteq U$ и $U/\varphi \in \mathfrak{F}$. Тогда $\pi\varphi U = \pi U$ и

$$(\pi U/\pi)/(\pi\varphi/\pi) \simeq \pi U/\pi\varphi \simeq U/U^2 \cap \pi\varphi = \\ = U/(\varphi \cap U^2)(\pi \cap U^2) \in \mathfrak{F}.$$

Понятно, что $T = \pi H$. Следовательно, $T/\pi \subseteq \pi U/\pi$. Поэтому ввиду того, что T/π — $\mathfrak{F}$-полупроектор в A/π, имеем

$$(\pi\varphi (\pi T))/\pi = \pi\varphi T/\pi = \varphi T/\pi = \pi U/\pi.$$

Значит, $\pi U = \varphi T = \varphi\pi H$. Таким образом,

$$U = U \cap \varphi\pi H = (U^2 \cap \varphi\pi) H = (U^2 \cap \varphi) (U^2 \cap \pi) H.$$

Поскольку $(U^2 \cap \pi) H \subseteq U \cap T$, то из последнего вытекает, что $U = (U^2 \cap \varphi) (T \cap U) = \varphi (T \cap U)$. Но $U/\varphi \in \mathfrak{F}$ и поэтому ввиду изоморфизма

$$U/\varphi = \varphi (T \cap U)/\varphi \simeq T \cap U/(T \cap U)^2 \cap \varphi$$

заключаем, что $T \cap U/(T \cap U)^2 \cap \varphi \in \mathfrak{F}$. Так как, кроме того, $(T^2 \cap \varphi) (T \cap U) = T \cap U$, то

$$(T \cap U)/(T \cap U)^2 \cap \varphi = T \cap U/T^2 \cap \varphi \in \mathfrak{F}.$$

По лемме 11.11 $(T^2 \cap \varphi) H/T^2 \cap \varphi$ — $\mathfrak{F}$-полупроектор в $T/T^2 \cap \varphi$. Значит, $T \cap U/T^2 \cap \varphi = (T^2 \cap \varphi) H/T^2 \cap \varphi$. Поэтому

$T \cap U = (T^2 \cap \varphi) H$. Таким образом,

$$U = \varphi (T \cap U) = \varphi (T^2 \cap \varphi) H = \varphi H.$$

Следовательно, H — $\mathfrak{F}$-полупроектор в A. Лемма доказана.

11.13. Пусть H — подалгебра алгебры A, φ — некоторая конгруэнция на A. Будем говорить, что H *добавляет* φ *в* A, если $\varphi H = A$. Если $\varphi H = A$ и $H^2 \cap \varphi = \Delta_H$, то будем говорить, что H *дополняет* φ *в* A. Если подалгебра H такова, что для любой подалгебры T, добавляющей φ в A, из $T \subseteq H$ всегда следует $T = H$, то H назовем *минимальным добавлением к* φ *в* A.

11.14. Лемма. *Пусть* φ — *конгруэнция на алгебре* A. *Тогда и только тогда* H — *минимальное добавление к* φ *в* A, *когда* $\varphi H = A$ *и* $H^2 \cap \varphi$ — *фраттиниева конгруэнция на* H.

Доказательство. Пусть подалгебра H такова, что $\varphi H = A$ и $H^2 \cap \varphi$ — фраттиниева конгруэнция на H. Предположим, что при этом H не является минимальным добавлением к φ в A. Тогда в H имеется такая собственная подалгебра M, что $\varphi M = A$. Значит, $H = H \cap \varphi M = (\varphi \cap H^2) M$. Но это означает, что конгруэнция $\varphi \cap H^2$ на H не является фраттиниевой. Противоречие. Значит, H — минимальное добавление к φ в A.

Обратно, пусть H — минимальное добавление к φ в A. Предположим, что $H^2 \cap \varphi$ не является фраттиниевой конгруэнцией на H. Тогда в H найдется такая собственная подалгебра M, что $(H^2 \cap \varphi) M = H$. Значит,

$$A = \varphi H = \varphi ((H^2 \cap \varphi) M) = \varphi M,$$

что противоречит условию. Следовательно, $H^2 \cap \varphi$ — фраттиниева конгруэнция на H. Лемма доказана.

11.15. Теорема. *Пусть* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, *где* $\mathfrak{F}$ — *непустая формация, а* $\mathfrak{X}$ — *конечная наследственная полуформация. Тогда и только тогда каждая* $\mathfrak{X}$-*алгебра обладает хотя бы одним* $\mathfrak{F}$-*полупроектором, когда формация* $\mathfrak{F}$ *насыщена в* $\mathfrak{X}$.

Доказательство. Достаточность. Предположим, что в классе $\mathfrak{X}$ содержатся алгебры, не имеющие $\mathfrak{F}$-полупроекторов. Выберем среди таких алгебр алгебру A наименьшего порядка. Пусть π — минимальная конгруэнция на A. Тогда факторалгебра A/π имеет $\mathfrak{F}$-полупроектор T/π. Если $T \neq A$, то T имеет $\mathfrak{F}$-полупроектор H, и по лемме 11.12 H — $\mathfrak{F}$-полупроектор в A. Так как в силу выбора алгебры A последнее невозможно, то остается заключить, что $T=A$. Следовательно, $A/\pi \in \mathfrak{F}$. Итак, для любой минимальной конгруэнции π на A имеет место $A/\pi \in \mathfrak{F}$. Так как по условию $\mathfrak{F}$ — формация и $A \notin \mathfrak{F}$, то алгебра A монолитична.

Пусть φ — единственная минимальная конгруэнция на A, H — минимальное добавление к φ в A. Тогда ввиду леммы 11.14 $H^2 \cap \varphi$ — фраттиниева конгруэнция на H. Но

$$H/H^2 \cap \varphi \simeq \varphi H/\varphi = A/\varphi \in \mathfrak{F},$$

и класс $\mathfrak{F}$ насыщен в $\mathfrak{X}$. Значит, $H \in \mathfrak{F}$. Пусть E — наибольшая подалгебра алгебры A, содержащая H и принадлежащая формации $\mathfrak{F}$. Покажем, что E — $\mathfrak{F}$-полупроектор в A. Действительно, пусть ψ — произвольная конгруэнция на A и U/ψ — такая подалгебра в A/ψ, что $E \subseteq U$ и $U/\psi \in \mathfrak{F}$. Если $\psi=\Delta_A$, то $U \in \mathfrak{F}$. Следовательно, в силу выбора подалгебры E имеем $U=E=\psi E$. Пусть $\psi \neq \Delta_A$; тогда $\varphi \subseteq \psi$, и, значит, $U=A=\psi E$. Таким образом, E — $\mathfrak{F}$-полупроектор алгебры A. Полученное противоречие показывает, что каждая $\mathfrak{X}$-алгебра обладает $\mathfrak{F}$-полупроектором.

Необходимость. Пусть φ — такая фраттиниева конгруэнция на $\mathfrak{X}$-алгебре A, что $A/\varphi \in \mathfrak{F}$. Обозначим через E некоторый $\mathfrak{F}$-полупроектор алгебры A. Понятно, что $\varphi E=A$. Следовательно, $A=E \in \mathfrak{F}$. Таким образом, формация $\mathfrak{F}$ насыщена в классе $\mathfrak{X}$. Теорема доказана.

11.16. Алгебру A назовем *примитивной*, если A имеет такую максимальную подалгебру (примитиватор) M, что $M_A=\Delta_A$ и либо алгебра A монолитична, либо M — гомоморфный образ A.

Будем говорить, что класс алгебр $\mathfrak{F}$ *примитивно замкнут* в классе $\mathfrak{X}$, если ему принадлежит всякая $\mathfrak{X}$-алгебра, все примитивные гомоморфные образы которой принадлежат $\mathfrak{F}$.

11.17. Теорема. *Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — конечная наследственная полуформация, $\mathfrak{F}$ — непустой класс, примитивно замкнутый в $\mathfrak{X}$. Тогда и только тогда каждая $\mathfrak{X}$-алгебра обладает хотя бы одним $\mathfrak{F}$-полупроектором, когда $\mathfrak{F}$ — полуформация.*

Доказательство. Достаточность. Предположим, что в классе $\mathfrak{X}$ содержатся алгебры, не имеющие $\mathfrak{F}$-полупроекторов. Выберем среди таких алгебр алгебру A наименьшего порядка. Пусть π — минимальная конгруэнция на A. Тогда алгебра A/π имеет $\mathfrak{F}$-полупроектор T/π. Если $T \neq A$, то T имеет $\mathfrak{F}$-полупроектор A. Но тогда по лемме 11.12 H — $\mathfrak{F}$-полупроектор в A. Противоречие.

Значит, $T=A$. Таким образом, для любой минимальной конгруэнции π на A имеет место $A/\pi\in\mathfrak{F}$.

Предположим, что алгебра A не является примитивной. Тогда всякий примитивный гомоморфный образ алгебры A принадлежит $\mathfrak{F}$. Так как по условию класс $\mathfrak{F}$ примитивно замкнут в классе $\mathfrak{X}$, то это означает, что $A\in\mathfrak{F}$. Но в этом случае A совпадает со своим $\mathfrak{F}$-полупроектором. Так как последнее невозможно, то мы должны заключить, что алгебра A примитивна.

Предположим, что алгебра A имеет единственную минимальную конгруэнцию π. Пусть H — минимальное добавление к π в A, E — $\mathfrak{F}$-максимальная подалгебра алгебры A, содержащая H. Тогда E — $\mathfrak{F}$-полупроектор в A. Но это противоречит определению алгебры A. Следовательно, алгебра A не монолитична. Пусть M — некоторый примитиватор алгебры A. Тогда M — гомоморфный образ алгебры A. Значит, $M\simeq A/\psi$ и для некоторой конгруэнции ψ на A. Так как $M\neq A$, то $\psi\neq\Delta_A$ и поэтому $A/\psi\in\mathfrak{F}$. Следовательно, $M\in\mathfrak{F}$. С другой стороны, если $A/\tau\in\mathfrak{F}$ для некоторой конгруэнции τ на A, то $\tau\neq\Delta_A$. Значит, поскольку $M_A=\Delta_A$, то $\tau M=A$. Таким образом, M — $\mathfrak{F}$-полупроектор в A. Полученное противоречие показывает, что каждая $\mathfrak{X}$-алгебра обладает $\mathfrak{F}$-полупроектором.

Необходимость. Пусть $A\in\mathfrak{F}$ и π — произвольная конгруэнция на A. Тогда поскольку $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{X}$ и класс $\mathfrak{X}$ — полуформация, то $A/\pi\in\mathfrak{X}$. Значит, факторалгебра A/π обладает $\mathfrak{F}$-полупроектором T/π. В свою очередь, алгебра T обладает $\mathfrak{F}$-полупроектором H и по лемме 11.12 H — $\mathfrak{F}$-полупроектор в A. Но $A\in\mathfrak{F}$, т. е. A совпадает со своим $\mathfrak{F}$-полупроектором. Следовательно, $H=A$ и поэтому $A/\pi=T/\pi\in\mathfrak{F}$. Таким образом, класс $\mathfrak{F}$ — полуформация. Теорема доказана.

Аналогично доказывается следующая теорема.

11.18. Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — конечная наследственная полуформация, $\mathfrak{F}$ — непустая полуформация, примитивно замкнутая в $\mathfrak{X}$, и пусть во всякой $\mathfrak{X}$-алгебре примитиватор дополняет цокольную конгруэнцию. Тогда всякая $\mathfrak{X}$-алгебра обладает хотя бы одним $\mathfrak{F}$-проектором.*

11.19. Лемма. *Пусть M — максимальная подалгебра мультикольца A, N_1 и N_2 — различные минимальные идеалы A, причем $N_1\not\subseteq M$ и $N_2\not\subseteq M$. Тогда*

$$N_1\simeq L=(N_1+N_2)\cap M\simeq N_2,\quad N_1\cap M=\{0\}=N_2\cap M$$

и справедливы следующие утверждения:

1) *если идеалы N_1 и N_2 абелевы, то идеал L проективен обоим идеалам N_1 и N_2 и, кроме того, $N_1+M_A=N_2+M_A$;*

2) *если идеалы N_1 и N_2 неабелевы и N — произвольный минимальный идеал в A, то либо $N_1+M_A=N+M_A$, либо $N_2+M_A=N+M_A$.*

Доказательство. Понятно, что $N_1 \subseteq C_A(N_2)$ и $A=N_1+M$. Значит, $N_2 \cap M$ — идеал A. Но по условию $N_2 \not\subseteq M$. Следовательно, $N_2 \cap M=\{0\}$. Аналогично убеждаемся в том, что $N_1 \cap M=\{0\}$. Так как

$$N_1+N_2=(N_1+N_2) \cap (N_1+M)= \\ =N_1+((N_1+N_2) \cap M)=N_1+L,$$

то

$$N_2 \simeq N_2/N_1 \cap N_2 \simeq N_1+N_2/N_1 \simeq N_1+L/N_1 \simeq L/N_1 \cap L \simeq L.$$

Точно так же устанавливаем $N_1 \simeq L$. Если при этом идеалы N_1 и N_2 A-абелевы, то, очевидно, L — идеал A, проективный обоим идеалам N_1 и N_2. Следовательно, в этом случае N_1 и N_2 проективны друг другу, и поэтому ввиду леммы 2.8 имеет место $C=C_A(N_1)=C_A(N_2)$. Понятно, что $N_2 \subseteq C_A(N_1)$. Значит,

$$C=C \cap (N_2+M)=N_2+(C \cap M)=N_2+M_A.$$

Аналогично проверяется, что $C=N_1+M_A$. Таким образом, если идеалы N_1 и N_2 абелевы, то $N_1+M_A=N_2+M_A$. Подобные рассуждения используются и при доказательстве пункта 2). Лемма доказана.

Лемма 11.19 показывает, что мультикольцо A в точности тогда примитивно, когда оно имеет такую максимальную подалгебру M, что $M_A=\{0\}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольная непустая полуформация мультиколец, A — некоторое мультикольцо. Обозначим через $A^{\mathfrak{F}}$ совокупность всех таких идеалов N из A, для которых выполняются следующие условия: 1) $A/N \in \mathfrak{F}$; 2) всегда из $A/T \in \mathfrak{F}$ и $T \subseteq N$ следует, что идеал T совпадает с N. Идеал N мультикольца A назовем $\mathfrak{F}$-корадикальным, если $N \in A^{\mathfrak{F}}$. В случае, когда $A^{\mathfrak{F}}=\{N\}$, пишем $N=A^{\mathfrak{F}}$ и называем N (см. определение на с. 42) *$\mathfrak{F}$-корадикалом A*.

11.20. Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой подкласс наследственной полуформации мультиколец $\mathfrak{X}$. Тогда и только тогда каждое мультикольцо из $\mathfrak{X}$ обладает $\mathfrak{F}$-полупроектором, когда $\mathfrak{F}$ — полуформация, примитивно замкнутая в $\mathfrak{X}$.*

Доказательство. Достаточность. Покажем прежде, что $\mathfrak{F}$-полупроектором обладает всякое такое примитивное мультикольцо A из $\mathfrak{X}$, у которого один из минимальных идеалов принадлежит $A^{\mathfrak{F}}$. Действительно, пусть M — примитиватор мультикольца A, L — такой его минимальный идеал, что $L \in A^{\mathfrak{F}}$. Если $L \cap M = \{0\}$, то $M \simeq A/L \in \mathfrak{F}$, и поэтому M является $\mathfrak{F}$-полупроектором в A. Пусть $L \cap M \neq \{0\}$. Тогда ввиду леммы 11.19 L — единственный минимальный идеал мультикольца A. Пусть H — минимальное добавление к L в A. Тогда ввиду условия теоремы и леммы 11.14 $H \in \mathfrak{F}$. Обозначим через E $\mathfrak{F}$-максимальную подалгебру мультикольца A, содержащую H. Покажем, что E — $\mathfrak{F}$-полупроектор в A. Пусть R — идеал мультикольца A, U/R — такая подалгебра в A/R, что $E \subseteq U$ и $U/R \in \mathfrak{F}$. Если $R = \{0\}$, то $U \in \mathfrak{F}$, и поэтому $U = E = R + E$. Пусть $R \neq \{0\}$. Тогда $L \subseteq R$. Значит,

$$A = L + E = R + E = U.$$

Предположим теперь, что класс $\mathfrak{M}$ тех мультиколец из $\mathfrak{X}$, которые не имеют $\mathfrak{F}$-полупроекторов, непуст. Всякому мультикольцу $A \in \mathfrak{M}$ сопоставим число $t(A)$, равное наименьшей из длин композиционных рядов мультиколец из $A^{\mathfrak{F}}$. Пусть $G \in \mathfrak{M}$, причем $t(G) = \min\{t(A) \mid A \in \mathfrak{M}\}$. Понятно, что $G \notin \mathfrak{F}$. Пусть N — такой $\mathfrak{F}$-корадикальный идеал G, длина композиционного ряда которого равна $t(G)$. Пусть L — минимальный идеал G, входящий в N. Предположим, что $L \neq N$. Ясно, что $t(G/L) < t(G)$, и поэтому в G/L имеется $\mathfrak{F}$-полупроектор T/L. Так как $L \subset N$, то $t(T) < t(G)$. Следовательно, T имеет $\mathfrak{F}$-полупроектор H. По лемме 11.12 H — $\mathfrak{F}$-полупроектор в G. Полученное противоречие показывает, что $L = N$. Последнее вместе с доказанным в предыдущем абзаце означает, что мультикольцо G не примитивно.

Предположим, что для любой максимальной подалгебры T из G имеет место $G/T_G \in \mathfrak{F}$. Тогда каждый примитивный гомоморфный образ мультикольца в G принадлежит $\mathfrak{F}$. Так как класс $\mathfrak{F}$ примитивно замкнут в $\mathfrak{X}$, то это влечет $G \in \mathfrak{F}$. Полученное противоречие показывает, что в G найдется такая максимальная подалгебра M, что $G/M_G \notin \mathfrak{F}$. Так как $G/L = G/N \in \mathfrak{F}$ и класс $\mathfrak{F}$ — полуформация, то $L \not\subseteq M$. Следовательно, $L + M_G/M_G$ — минимальный идеал в G/M_G. Понятно, что $(G/M_G)/(L + M_G/M_G) \in \mathfrak{F}$. Значит, $L + M_G/M_G \in (G/M_G)^{\mathfrak{F}}$. Таким образом, ввиду доказанного ранее G/M_G обладает $\mathfrak{F}$-полупроектором T/M_G. В силу определения $\mathfrak{F}$-полупроектора имеем

$$G/M_G = (L + M_G/M_G) + T/M_G = L + T/M_G.$$

Следовательно, $L+T=G$, и поэтому $T/T\cap L\simeq G/L\in\mathfrak{F}$. Так как $G/M_G\notin\mathfrak{F}$, то $T\neq G$. Значит, $L\cap T\subset L$. Таким образом, $t(T)<t(G)$. Это означает, что T обладает $\mathfrak{F}$-полупроектором в H. Но по лемме 11.12 H будет $\mathfrak{F}$-полупроектором и в G. Снова пришли к противоречию. Таким образом, остается заключить, что всякое мультикольцо из $\mathfrak{X}$ обладает $\mathfrak{F}$-полупроектором.

Необходимость. Пусть всякое мультикольцо из $\mathfrak{X}$ имеет хотя бы один $\mathfrak{F}$-полупроектор. Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 11.17, можно показать, что $\mathfrak{F}$—полуформация. Покажем, что эта полуформация примитивно замкнута в $\mathfrak{X}$. Предположим, что в классе $\mathfrak{X}$ имеются мультикольца, не принадлежащие $\mathfrak{F}$, но у которых все примитивные гомоморфные образы классу $\mathfrak{F}$ принадлежат. Среди таких мультиколец выберем мультикольцо G с наименьшей длиной главного ряда. Понятно, что G не примитивно. Пусть E—$\mathfrak{F}$-полупроектор G, M—максимальная подалгебра из G, содержащая E. Ясно, что $M_G\neq\{0\}$. Пусть L—минимальный идеал G, входящий в M. Тогда ввиду выбора G имеем $G/L\in\mathfrak{F}$. Значит, $G=L+E$. Но $L+E\subseteq M\neq G$. Полученное противоречие показывает, что полуформация $\mathfrak{F}$ примитивно замкнута в $\mathfrak{X}$. Теорема доказана.

Пусть A—мультикольцо. Обозначим через $\mathrm{F}(A)$ и назовем *идеалом Фиттинга* пересечение централизаторов всех главных факторов A.

11.21. Лемма. *Тогда и только тогда идеал N нильпотентен в A, когда $N\subseteq\mathrm{F}(A)$.*

Доказательство. Если $N\subseteq\mathrm{F}(A)$, то, очевидно, идеал N нильпотентен в A.

Пусть теперь идеал N нильпотентен в A. Рассмотрим произвольный главный ряд

$$\{0\}=N_0\subset N_1\subset\ldots\subset N_t=N=A_0\subset A_1\subset\ldots\subset A_r=A$$

мультикольца A, проходящий через N. По лемме 2.8 для любого $i\in\{1,\ldots,r\}$ имеет место $N\subseteq C_A(A_i/A_{i-1})$. С другой стороны, из условия и лемм 2.5, 2.8 вытекает, что $N\subseteq C_A(N_i/N_{i-1})$ для любого $i\in\{1,\ldots,t\}$. Применяя еще раз лемму 2.5 и лемму 2.8, заключаем, что $N\subseteq\mathrm{F}(A)$. Лемма доказана.

11.22. Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$—наследственная полуформация мультиколец, а $\mathfrak{F}$—полуформация, примитивно замкнутая в $\mathfrak{X}$. Тогда если $A=\mathrm{F}(A)+E\in\mathfrak{X}$ и $E\in\mathfrak{F}$, то E входит в некоторый $\mathfrak{F}$-проектор мультикольца A.*

Доказательство. Сопоставим всякому мультикольцу R из $\mathfrak{X}$ число $t(R)$, равное наименьшей из длин композиционных рядов мультиколец из $R^{\mathfrak{F}}$, входящих в $\mathrm{F}(R)$.

Предположим, что класс $\mathfrak{M}$ всех тех мультиколец из $\mathfrak{X}$, в которых выполнено условие теоремы и не выполняется ее заключение, непуст. Пусть $A \in \mathfrak{M}$ и $t(A) = \min\{t(B) \mid B \in \mathfrak{M}\}$. Обозначим через R такой идеал мультикольца A, что $R \subseteq \mathrm{F}(A)$, $R \in A^{\mathfrak{F}}$ и $t(A)$ — длина композиционного ряда R. Пусть L — минимальный идеал A, входящий в R. Предположим, что $L \subset R$. Понятно, что $\mathrm{F}(A)/L \subseteq \mathrm{F}(A/L)$. Поэтому $\mathrm{F}(A/L) + (L + E/L) = A/L$. При этом

$$(A/L)/(R/L) \simeq A/L \in \mathfrak{F}, \qquad R/L \subseteq \mathrm{F}(A/L).$$

Значит, $t(A/L) < t(A)$, и поэтому $L + E/L$ входит в некоторый $\mathfrak{F}$-проектор T/L мультикольца A/L. Легко видеть, что $\mathrm{F}(A) \cap T$ — нильпотентный в T идеал. Следовательно, по лемме 11.21 $\mathrm{F}(A) \cap T \subseteq \mathrm{F}(T)$. Так как

$$T = T \cap A = T \cap (\mathrm{F}(A) + E) = E + (T \cap \mathrm{F}(A)),$$

то из последнего вытекает, что $T = \mathrm{F}(T) + E$. Поскольку $T/L \in \mathfrak{F}$, $L \subseteq \mathrm{F}(A)$ и $L \subset R$, то $t(T) < t(A)$. Значит, E входит в некоторый $\mathfrak{F}$-проектор H мультикольца T. Но по лемме 11.12 H — $\mathfrak{F}$-проектор в A. Полученное противоречие показывает, что $R = L$.

Покажем, что если M — произвольная максимальная подалгебра мультикольца A, не содержащая L, то M — $\mathfrak{F}$-проектор A. Легко видеть, что идеал L A-абелев. Значит, $L \cap M = \{0\}$, и поэтому $A/L \simeq M \in \mathfrak{F}$. Предположим, A имеет такой идеал K, что $A/K \in \mathfrak{F}$ и $K + M \neq A$. Тогда $K \subseteq M$. Следовательно, $A/M_A \in \mathfrak{F}$. По лемме 3.29 для всякой максимальной подалгебры D, не содержащей L, имеет место

$$A/D_A \simeq L \times A/C_A(L) \simeq A/M_A \in \mathfrak{F}.$$

С другой стороны, если $L \subseteq D$, то из $A/L \in \mathfrak{F}$ следует $A/D_A \in \mathfrak{F}$. Таким образом, каждый примитивный гомоморфный образ мультикольца A принадлежит $\mathfrak{F}$. Значит, $A \in \mathfrak{F}$. Полученное противоречие показывает, что $K \not\subseteq M$, и поэтому $K + M = A$. Следовательно, M — $\mathfrak{F}$-проектор в A.

Покажем теперь, что $M_A + E$ — максимальная подалгебра в A. Прежде заметим, что поскольку

$$\mathrm{F}(A) = \mathrm{F}(A) \cap (L + M) = L + (\mathrm{F}(A) \cap M)$$

и $\mathrm{F}(A) \subseteq C_A(L)$, то $\mathrm{F}(A) \cap M \subseteq M_A$. Значит,

$$M_A + E/M_A + L + M_A/M_A = E + L + M_A/M_A = \\ = E + \mathrm{F}(A)/M_A = A/M_A.$$

Легко видеть, что $L + M_A/M_A$ — главный A-абелев фактор мультикольца A. Кроме того, поскольку $A/M_A \notin \mathfrak{F}$, то $M_A + E \neq A$. Следовательно, $M_A + E/M_A$ — максимальная подалгебра в A/M_A. Поэтому $M_A + E$ — максимальная подалгебра в A. Предположим, что $L \subseteq M_A + E$. Тогда

$$A = F(A) + E \subseteq L + M_A + E = M_A + E.$$

Противоречие. Значит, $L \not\subseteq M_A + E$, и поэтому ввиду доказанного выше $M_A + E$ — $\mathfrak{F}$-проектор в A. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Легко видеть, что если идеалы A и B π-разрешимы в мультикольце G, то идеал $A + B$ также π-разрешим в G. Значит, G обладает таким π-разрешимым в G идеалом $\mathrm{R}_\pi(G)$, что всякий π-разрешимый в G идеал содержится в $\mathrm{R}_\pi(G)$. Идеал $\mathrm{R}_\pi(G)$ назовем *π-разрешимым радикалом* мультикольца G. В случае, когда π — класс всех минимальных мультиколец, вместо $\mathrm{R}_\pi(G)$ будем писать $\mathrm{R}(G)$ и идеал $\mathrm{R}(G)$ будем называть *разрешимым радикалом* мультикольца G.

11.23. Теорема. *Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — некоторая наследственная полуформация мультиколец, $\mathfrak{F}$ — полуформация, примитивно замкнутая в $\mathfrak{X}$. Тогда если $G \in \mathfrak{X}$ и $G/\mathrm{R}_\pi(G) \in \mathfrak{F}$, где $\pi = \tau(\mathfrak{F})$, то всякий $\mathfrak{F}$-полупроектор G является его $\mathfrak{F}$-проектором.*

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{M}$ подкласс класса $\mathfrak{X}$, состоящий из всех таких мультиколец A, что по крайней мере один из идеалов множества $A^{\mathfrak{F}}$ $\tau(\mathfrak{F})$-разрешим в A. Для всякого мультикольца $B \in \mathfrak{M}$ через $t(B)$ обозначим наименьшую из длин композиционных рядов тех идеалов из $B^{\mathfrak{F}}$, которые $\tau(\mathfrak{F})$-разрешимы в B.

Ввиду теоремы 11.20 всякое мультикольцо из $\mathfrak{X}$ обладает хотя бы одним $\mathfrak{F}$-полупроектором. Предположим, что класс $\mathfrak{H}$ всех тех мультиколец из $\mathfrak{M}$, у которых имеются $\mathfrak{F}$-полупроекторы, не являющиеся $\mathfrak{F}$-проекторами, непуст. Пусть G — такое мультикольцо из $\mathfrak{H}$, что $t(G) = \min\{t(A) \mid A \in \mathfrak{H}\}$, и пусть E — произвольный $\mathfrak{F}$-полупроектор в G. Обозначим через R такой идеал из $G^{\mathfrak{F}}$, что R $\tau(\mathfrak{F})$-разрешим в G и $t(G)$ — длина композиционного ряда R.

Пусть A — произвольный минимальный идеал G, входящий в R. Покажем, что E — $\mathfrak{F}$-проектор в $A + E$. Предположим, что $\tau(\mathfrak{F}) \cap \tau(A) = \varnothing$. Пусть $E \subseteq U \subseteq A + E$, U_0 — такой идеал U, что $U/U_0 \in \mathfrak{F}$. Тогда поскольку

$$U_0 + (A \cap U)/U_0 \simeq A \cap U/(A \cap U) \cap U_0,$$

то $A \cap U \subseteq U_0$. Но $U = U \cap (A + E) = E + (U \cap A)$. Значит, $U = U_0 + E$. Следовательно, в рассматриваемом случае E — $\mathfrak{F}$-проектор в $A + E$. Предположим, что $\tau(\mathfrak{F}) \cap \tau(A) \neq \varnothing$. Легко видеть, что в этом случае $A \subseteq C_G(A)$. Значит, $A \subseteq F(A + E)$, и поэтому по теореме 11.22 $E \subseteq H$, где H — $\mathfrak{F}$-проектор в $A + E$. Но E — $\mathfrak{F}$-полупроектор в G. Следовательно, $E = H$ — $\mathfrak{F}$-проектор в $A + E$.

Покажем теперь, что E — $\mathfrak{F}$-проектор в G. Это верно, если $G = A + E$. Пусть $A + E \neq G$. Рассмотрим мультикольцо G/A. По лемме 11.11 $E + A/A$ — $\mathfrak{F}$-полупроектор в G/A. Понятно, что идеал R/A $\tau(\mathfrak{F})$-разрешим в G/A и $R/A \in (G/A)^{\mathfrak{F}}$. Следовательно, $G/A \in \mathfrak{M}$ и $t(G/A) < t(G)$. Значит, $E + A/A$ является $\mathfrak{F}$-проектором в G/A. Выше было установлено, что E — $\mathfrak{F}$-проектор в $A + E$. Следовательно, по лемме 11.12 E — $\mathfrak{F}$-проектор мультикольца G. Таким образом, каждый $\mathfrak{F}$-полупроектор G является $\mathfrak{F}$-проектором в G. Но это противоречит определению мультикольца G. Значит, остается заключить, что класс $\mathfrak{H}$ пуст. Теорема доказана.

Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторый класс алгебр. Максимальную подалгебру M алгебры A назовем *$\mathfrak{F}$-предельной*, если M $\mathfrak{F}$-абнормальна в A и $M/M_A \in \mathfrak{F}$.

11.24. Лемма. *Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — некоторая наследственная полуформация мультиколец, $\mathfrak{F}$ — полуформация, примитивно замкнутая в $\mathfrak{X}$. Тогда если $A \in \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{F}$ и $A/\mathrm{R}(A) \in \mathfrak{F}$, то всякий $\mathfrak{F}$-проектор A содержится в некоторой максимальной $\mathfrak{F}$-предельной подалгебре из A.*

Доказательство. Пусть H — произвольный $\mathfrak{F}$-проектор мультикольца A, B — минимальный идеал A, входящий в $\mathrm{R}(A)$. Идеал B абелев, и поэтому если $B + H = A$, то, очевидно, H — максимальная подалгебра в A. При этом поскольку H является $\mathfrak{F}$-проектором в A, то $A/H_A \notin \mathfrak{F}$. Значит, в рассматриваемом случае H — максимальная $\mathfrak{F}$-предельная подалгебра в A. Пусть $B + H \neq A$. По лемме 11.11 $B + H/B$ — $\mathfrak{F}$-проектор в A/B. Следовательно, $A/B \notin \mathfrak{F}$. Понятно также, что идеал $\mathrm{R}(A)/B$ разрешим в A/R и $(A/B)/(\mathrm{R}(A)/B) \in \mathfrak{F}$. Так как длина главного ряда мультикольца A/B меньше длины главного ряда A, то мы можем считать, что утверждение леммы относительно A/B справедливо. Значит, в A/B найдется такая максимальная $\mathfrak{F}$-предельная подалгебра M/B, что $H + B/B \subseteq M/B$. Тогда

$H \subseteq M$ и M — максимальная $\mathfrak{F}$-предельная подалгебра в A. Лемма доказана.

11.25. Теорема. *Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — некоторая наследственная полуформация, $\mathfrak{F}$ — непустая полуформация, примитивно замкнутая в $\mathfrak{X}$. Предположим, что $A \in \mathfrak{X}$ и $A/\mathrm{R}(A) \in \mathfrak{F}$. Тогда подалгебра H является $\mathfrak{F}$-проектором в A в том и только в том случае, когда $H \in \mathfrak{F}$ и существует цепь*

$$A = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_t = H, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

в которой M_i — максимальная $\mathfrak{F}$-предельная подалгебра в M_{i-1}, $i=1, \ldots, t$.

Доказательство. Пусть $H \in \mathfrak{F}$ и A имеет цепь (1). Индукцией по t покажем, что H является $\mathfrak{F}$-проектором в A. Утверждение очевидно, если $t=0$. Пусть $t \geqslant 1$. Мы можем считать, что H — $\mathfrak{F}$-проектор в M_1. Легко видеть, что $M_1/(M_1)_A$ — $\mathfrak{F}$-проектор в $A/(M_1)_A$. Значит, по лемме 11.12 H — $\mathfrak{F}$-проектор в A.

Пусть теперь H — произвольный $\mathfrak{F}$-проектор в A. Тогда $H \in \mathfrak{F}$. По лемме 11.24 $H \subseteq M_1$, где M_1 — максимальная $\mathfrak{F}$-предельная подалгебра в A. Понятно, что $\mathrm{R}(A) \not\subseteq M_1$, и поэтому $M_1/\mathrm{R}(A) \cap M_1 \in \mathfrak{F}$. При этом, очевидно, идеал $\mathrm{R}(A) \cap M_1$ разрешим в M_1. Поэтому либо $H = M_1$, либо $H \subseteq M_2$, где M_2 — максимальная $\mathfrak{F}$-предельная подалгебра в M_1, и т. д. В результате мы придем к цепи (1). Теорема доказана.

11.26. Лемма. *Для любых трех подгрупп A, B и C группы G следующие два условия эквивалентны:*

1) $A \cap BC = (A \cap B)(A \cap C)$;

2) $AB \cap AC = A(B \cap C)$.

Доказательство. Пусть имеет место 1). Понятно, что $A(B \cap C) \subseteq AB \cap AC$. Установим справедливость обратного включения. Пусть $ab = a_1c \in AB \cap AC$, где a, $a_1 \in A$, $b \in B$, $c \in C$. Тогда $a^{-1}a_1 = bc^{-1} \in A \cap BC = (A \cap B)(A \cap C)$. Следовательно, $bc^{-1} = b_1c_1$, где $b_1 \in A \cap B$, $c_1 \in A \cap C$. Значит, $b_1^{-1}b = c_1c \in B \cap C$ и $ab = (ab_1)(b_1^{-1}b) \in A(B \cap C)$. Поэтому $AB \cap AC \subseteq A(B \cap C)$. Таким образом, $AB \cap AC = A(B \cap C)$.

Предположим теперь, что справедливо равенство $AB \cap AC = A(B \cap C)$. Пусть $a = bc$, где $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$. Тогда $b = ac^{-1} \in AB \cap AC = A(B \cap C)$. Значит, $b = ac^{-1} = a_1b_1$, где $a_1 \in A$, $b_1 \in B \cap C$. Отсюда следует, что $a_1 = bb_1^{-1} \in A \cap B$. В свою очередь, $b_1c = a_1^{-1}a \in A \cap C$. Поэтому $a = a_1(b_1c) \in (A \cap B)(A \cap C)$. Значит, $A \cap BC \subseteq (A \cap B)(A \cap C)$. Обратное включение очевидно. Следовательно, $A \cap BC = (A \cap B)(A \cap B)$. Лемма доказана.

11.27. Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторая формация и H — $\mathfrak{F}$-проектор мультикольца A. Тогда для любых двух идеалов N_1 и N_2 мультикольца A имеют место равенства*

$$(N_1+N_2)\cap H=(N_1\cap H)+(N_2\cap H), \qquad (1)$$

$$(N_1+H)\cap(N_2+H)=(N_1\cap N_2)+H. \qquad (2)$$

Доказательство. Ввиду леммы 11.26 достаточно установить справедливость одного из равенств (1), (2). Покажем, что имеет место равенство (1).

Можно считать, что теорема справедлива относительно всех собственных факторов мультикольца A. Предположим, что $N_1+H\neq A$. Тогда

$$(N_1+N_2)\cap H=((N_1+N_2)\cap(N_1+H))\cap H=$$
$$=(N_1+(N_2\cap(N_1+H)))\cap H=$$
$$=(N_1\cap H)+((N_2\cap(N_1+H))\cap H)=(N_1\cap H)+(N_2\cap H).$$

Аналогично убеждаемся в справедливости равенства (1) в предположении, что $N_2+H\neq A$. Таким образом, в дальнейшем мы можем считать, что $A=N_1+H=N_2+H$. Так как $H\in\mathfrak{F}$, то из последнего вытекает, что $A/N_i\in\mathfrak{F}$, $i=1, 2$. Значит, $A/N_1\cap N_2\in\mathfrak{F}$. Пусть $L=N_1\cap N_2$. Если $L=\{0\}$, то $A=H$ — в этом случае равенство (1) выполняется тривиальным образом. Пусть $L\neq\{0\}$. По лемме 11.11 $H+L/L$ — $\mathfrak{F}$-проектор в A/L. Значит,

$$(N_1/L+N_2/L)\cap(H+L/L)=$$
$$=(N_1/L\cap H+L/L)+(N_2/L\cap L+H/L).$$

Поэтому

$$(N_1+N_2)\cap(H+L)=(N_1\cap(H+L))+(N_2\cap(H+L)).$$

Следовательно,

$$(N_1+N_2)\cap H\subseteq((N_1+N_2)\cap(L+H))\cap H=$$
$$=((N_1\cap(H+L))+(N_2\cap(H+L)))\cap H=$$
$$=((N_1\cap H)+(N_2\cap H)+L)\cap H=$$
$$=(N_1\cap H)+(N_2\cap H)+(L\cap H)=(N_1\cap H)+(N_2\cap H),$$

т. е. $(N_1+N_2)\cap H\subseteq(N_1\cap H)+(N_2\cap H)$. Значит,

$$(N_1+N_2)\cap H=(N_1\cap H)+(N_2\cap H).$$

Теорема доказана.

§ 12. $\mathfrak{F}$-нормализаторы

Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторый класс алгебр. Конгруэнцию π на алгебре A назовем *$\mathfrak{F}$-корадикальной*, если $A/\pi\in\mathfrak{F}$, но $A/\varphi\notin\mathfrak{F}$ для всякой такой конгруэнции φ, что $\varphi\subset\pi$. Множество всех $\mathfrak{F}$-корадикальных конгруэнций на A обозначим символом $A^{\mathfrak{F}}$. Мы будем писать $\pi = A^{\mathfrak{F}}$, если $A^{\mathfrak{F}} = \{\pi\}$. Если N — $\mathfrak{F}$-корадикальный идеал мультикольца A (см. определение 3.34), то ясно, что задаваемая им конгруэнция на A $\mathfrak{F}$-корадикальна.

Предположим, что алгебра A принадлежит некоторой наследственной формации $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ — произвольная непустая полуформация. Тогда множество $A^{\mathfrak{F}}$ непусто. Действительно, так как в соответствии с принятыми в данной главе соглашениями все $\mathfrak{X}$-алгебры удовлетворяют условию минимальности для подалгебр, то всякая $\mathfrak{X}$-алгебра удовлетворяет и условию минимальности для конгруэнций. Следовательно, поскольку $A/A^2 \in \mathfrak{F}$, то множество $A^{\mathfrak{F}}$ непусто.

12.1. Конгруэнцию φ на A назовем *$\mathfrak{F}$-предельной*, если найдутся такие $\mathfrak{F}$-корадикальная конгруэнция π и фраттиниева конгруэнция ψ на A, что $\psi \subset \varphi \subseteq \pi$ и φ/ψ — нефраттиниевая минимальная конгруэнция на A/ψ. В случае мультиколец *$\mathfrak{F}$-предельным* будем называть всякий идеал, соответствующий $\mathfrak{F}$-предельной конгруэнции.

Будем говорить, что максимальная подалгебра M алгебры A является *$\mathfrak{F}$-критической* в A, если M добавляет в A некоторую $\mathfrak{F}$-предельную конгруэнцию на A.

12.2. Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольный класс алгебр. Подалгебру H алгебры A назовем *$\mathfrak{F}$-нормализатором*, если $H \in \mathfrak{F}$ и существует такая цепь

$$A = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_t = H, \qquad t \geqslant 0,$$

в которой M_i — максимальная $\mathfrak{F}$-критическая подалгебра алгебры M_{i-1}, $i = 1, \ldots, t$.

12.3. Лемма. *Пусть Ω — множество всех максимальных подалгебр алгебры A. Тогда $\varphi(A) = \bigcap_{M \in \Omega} M_A$ — фраттиниева конгруэнция на A и всякая фраттиниева конгруэнция A входит в $\varphi(A)$.*

Доказательство. Пусть H — произвольная собственная подалгебра алгебры A. Тогда найдется такая максимальная в A подалгебра M, что $H \subseteq M$. Значит, $M_A H \subseteq M$ и тем более $\varphi(A) H \subseteq M \neq A$. Следовательно, $\varphi(A)$ — фраттиниева конгруэнция на A.

Пусть теперь ψ — произвольная фраттиниева конгруэнция алгебры A, M — произвольная максимальная подалгебра из A. Тогда $\psi M = M$, т. е. $\psi \subseteq M_A$. Следовательно, $\psi \subseteq \varphi(A) = \bigcap_{M \in \Omega} M_A$. Лемма доказана.

12.4. Теорема. *Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — наследственная формация, а $\mathfrak{F}$ — непустая формация, насыщенная в $\mathfrak{X}$. Тогда всякая $\mathfrak{X}$-алгебра A обладает хотя бы одним $\mathfrak{F}$-нормализатором, причем если H — произвольный $\mathfrak{F}$-нормализатор A, то $A = A^{\mathfrak{F}}H$.*

Доказательство. Покажем прежде, что если G — произвольная алгебра из $\mathfrak{X}$, не принадлежащая $\mathfrak{F}$, то G обладает $\mathfrak{F}$-критической максимальной подалгеброй. Так как по условию формация $\mathfrak{F}$ насыщена в $\mathfrak{X}$, то $\pi = \varphi(G) \cap \cap G^{\mathfrak{F}} \subset G^{\mathfrak{F}}$. Пусть τ — такая конгруэнция на G, что $\pi \subseteq \tau \subseteq G^{\mathfrak{F}}$ и τ/π — минимальная конгруэнция на G/π. Понятно, что $\tau/\pi \not\subseteq \varphi(G/\pi)$. Следовательно, ввиду леммы 12.3 конгруэнция τ/π нефраттиниева, и в G/π найдется такая максимальная подалгебра M/π, что $\tau/\pi\ M/\pi = G/\pi$. Значит, M — максимальная $\mathfrak{F}$-критическая подалгебра в G.

Покажем, что A обладает хотя бы одним $\mathfrak{F}$-нормализатором. Если $A \in \mathfrak{F}$, то A, очевидно, совпадает со своим $\mathfrak{F}$-нормализатором. Пусть $A \notin \mathfrak{F}$. Тогда ввиду доказанного A имеет максимальную $\mathfrak{F}$-критическую подалгебру M_1. Если $M_1 \in \mathfrak{F}$, то M_1 — $\mathfrak{F}$-нормализатор A. В противном случае M_1 имеет максимальную $\mathfrak{F}$-критическую подалгебру M_2 и т. д. Так как A удовлетворяет условию минимальности для подалгебр, то на некотором шаге t мы придем к подалгебре $M_t \in \mathfrak{F}$, которая и является $\mathfrak{F}$-нормализатором A.

Пусть теперь H — произвольный $\mathfrak{F}$-нормализатор алгебры A. Тогда $H \in \mathfrak{F}$ и существует такая цепь

$$A = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_t = H, \qquad t \geqslant 0,$$

в которой M_i — максимальная $\mathfrak{F}$-критическая подалгебра в M_{i-1}, $i = 1, \ldots, t$. Индукцией по t покажем, что $A = A^{\mathfrak{F}}H$. При $t = 0$ это очевидно. Пусть $t \geqslant 1$. Так как H является $\mathfrak{F}$-нормализатором в M_1, то мы можем считать, что $M_1 = M_1^{\mathfrak{F}}H$. Поскольку M_1 — максимальная $\mathfrak{F}$-критическая подалгебра в A, то $A = A^{\mathfrak{F}}M_1$. Значит, $A/A^{\mathfrak{F}} \simeq M_1/M_1^{\mathfrak{F}} \cap A^{\mathfrak{F}}$. Следовательно, $M_1^{\mathfrak{F}} \subseteq M_1^{\mathfrak{F}} \cap A^{\mathfrak{F}}$. Таким образом, $A = A^{\mathfrak{F}}M_1 = A^{\mathfrak{F}}(M_1^{\mathfrak{F}}H) = A^{\mathfrak{F}}H$. Теорема доказана.

12.5. Теорема. *Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — наследственная формация, а $\mathfrak{F}$ — непустая формация, насыщенная в $\mathfrak{X}$. Тогда если H — $\mathfrak{F}$-нормализатор алгебры $A \in \mathfrak{X}$ и φ — произвольный гомоморфизм A, то H^{φ} — $\mathfrak{F}$-нормализатор в A^{φ}.*

Доказательство. Достаточно показать, что если π — произвольная конгруэнция на A, то $\pi H/\pi$ — $\mathfrak{F}$-нормализатор в A/π. Пусть

$$A = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_t = H, \qquad t \geqslant 0,$$

— цепь, в которой M_i — максимальная $\mathfrak{F}$-критическая подалгебра алгебры M_{i-1}, $i=1, \ldots, t$. Если $t=0$, то $A=H\in\mathfrak{F}$. Значит, $A/\pi\in\mathfrak{F}$, т. е. факторалгебра A/π совпадает со своим $\mathfrak{F}$-нормализатором. Пусть $t>0$. Тогда поскольку H — $\mathfrak{F}$-нормализатор в M_1, то ввиду соображений индукции $(M_1^2\cap\pi)H/M_1^2\cap\pi$ — $\mathfrak{F}$-нормализатор в $M_1/M_1^2\cap\pi$. Следовательно, поскольку отображение $[m]_{M_1^2\cap\pi}\to[m]_\pi$, $m\in M_1$, — изоморфизм $M_1/M_1^2\cap\pi$ на $\pi M_1/\pi$, при котором $(M_1^2\cap\pi)H/M_1^2\cap\pi$ переходит в $\pi H/\pi$, то $\pi H/\pi$ — $\mathfrak{F}$-нормализатор в $\pi M_1/\pi$. Значит, если $\pi M_1=A$, то $\pi H/\pi$ — $\mathfrak{F}$-нормализатор в A/π.

Пусть $\pi M_1=M_1$. Покажем, что максимальная подалгебра M_1/π является $\mathfrak{F}$-критической в A/π. Пусть ψ — такая $\mathfrak{F}$-предельная конгруэнция на A, что $A=\psi M_1$, и пусть $\varphi=\varphi(A)\cap\psi$. Предположим, что $\pi\psi=\pi\varphi$. Тогда $\psi=\psi\cap\pi\varphi=\varphi(\psi\cap\pi)$. Значит, $A=\psi M_1=\varphi(\psi\cap\pi)M_1=\varphi M_1=M_1$. Противоречие. Следовательно, $\pi\psi\neq\pi\varphi$. Так как решетка конгруэнций A, заключенных между $\pi\varphi$ и $\pi\psi$, изоморфна решетке конгруэнций A, заключенных между $\varphi(\psi\cap\pi)$ и ψ, то из последнего вытекает, что $\pi\psi/\pi\varphi$ — минимальная конгруэнция на $A/\pi\varphi$. Поэтому $(\pi\psi/\pi)/(\pi\varphi/\pi)$ — минимальная конгруэнция на $(A/\pi)/(\pi\varphi/\pi)$. Эта конгруэнция нефраттиниева, поскольку $\pi\psi/\pi M_1/\pi=\psi M_1/\pi=A/\pi$ и $\pi\varphi/\pi\subseteq(M/\pi)_{A/\pi}$. Понятно также, что $\pi\varphi/\pi\subseteq\varphi(A/\pi)$. Поскольку $\psi\subseteq A^{\mathfrak{F}}$, и ввиду леммы 6.10 $A^{\mathfrak{F}}\pi/\pi=(A/\pi)^{\mathfrak{F}}$, то $\psi\pi/\pi\subseteq(A/\pi)^{\mathfrak{F}}$. Таким образом, $\psi\pi/\pi$ — $\mathfrak{F}$-предельная конгруэнция на A/π, и поэтому M_1/π — максимальная $\mathfrak{F}$-критическая подалгебра в A/π. Но как показано выше, $\pi H/\pi$ — $\mathfrak{F}$-нормализатор в M_1/π. Следовательно, $\pi H/\pi$ — $\mathfrak{F}$-нормализатор алгебры A/π. Теорема доказана.

12.6. Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — некоторая наследственная формация, $\mathfrak{F}$ — непустая формация, насыщенная в $\mathfrak{X}$, и пусть $A\in\mathfrak{X}$. Тогда максимальная подалгебра M $\mathfrak{F}$-абнормальна в A в том и только в том случае, когда M содержит некоторый $\mathfrak{F}$-нормализатор алгебры A.*

Доказательство. Пусть M содержит некоторый $\mathfrak{F}$-нормализатор H алгебры A. Предположим, что M $\mathfrak{F}$-нормальна в A, т. е. $A/M_A\in\mathfrak{F}$. Тогда $A^{\mathfrak{F}}\subseteq M_A$. Следовательно, $A^{\mathfrak{F}}H\subseteq M$. Но по теореме 12.4 $A^{\mathfrak{F}}H=A$. Противоречие. Значит, $A/M_A\notin\mathfrak{F}$, т. е. M — $\mathfrak{F}$-абнормальна в A.

Прежде чем доказать обратное утверждение теоремы, покажем, что если $T \in \mathfrak{X}$, M и L — такие максимальные подалгебры в T, что $T = L_T M$ и L $\mathfrak{F}$-абнормальна в T, то $L \cap M$ — максимальная $\mathfrak{F}$-абнормальная подалгебра в M. Отображение φ: $[m]_{L_T} \to [m]_{M^2 \cap \pi}$, $m \in M$, является изоморфизмом алгебры T/L_T на алгебру $M/M^2 \cap L_T$. Легко видеть, что $L = L_T(M \cap L)$. Следовательно,

$$(L/L_T)^{\varphi} = (M^2 \cap L_T)(M \cap L)/M^2 \cap L_T = M \cap L/M^2 \cap L_T.$$

Значит, поскольку L — максимальная $\mathfrak{F}$-абнормальная подалгебра в T, то $M \cap L/M^2 \cap L_T$ — максимальная $\mathfrak{F}$-абнормальная подалгебра в $M/M^2 \cap L_T$, а $M \cap L$ — максимальная $\mathfrak{F}$-абнормальная подалгебра в M.

Пусть теперь M — произвольная максимальная $\mathfrak{F}$-абнормальная подалгебра в A. Покажем, что M содержит некоторый $\mathfrak{F}$-нормализатор алгебры A. По теореме 12.4 M имеет $\mathfrak{F}$-нормализатор H. Если M $\mathfrak{F}$-критична в A, то H является и $\mathfrak{F}$-нормализатором алгебры A. Пусть M не $\mathfrak{F}$-критична в A и M_1 — произвольная максимальная $\mathfrak{F}$-критическая подалгебра в A. Тогда, очевидно, $M_A M_1 = A$. Следовательно, ввиду доказанного выше $M_2 = M \cap M_1$ — максимальная $\mathfrak{F}$-абнормальная подалгебра в M_1. Если M_2 $\mathfrak{F}$-критична в M_1, то $\mathfrak{F}$-нормализатор H алгебры M_2 является $\mathfrak{F}$-нормализатором алгебры A и, кроме того, $H \subseteq M$. В противном случае, взяв в M_1 произвольную максимальную $\mathfrak{F}$-критическую подалгебру M_3, получим максимальную $\mathfrak{F}$-абнормальную подалгебру $M_4 = M_3 \cap M_2$ в M_3 и т. д. Так как в результате описанного процесса возникает строго убывающая цепь

$$A \supset M_1 \supset M_3 \supset \ldots$$

подалгебр алгебры A, то найдется такой номер $t = 2k - 1$, что M_{2k} — максимальная $\mathfrak{F}$-критическая подалгебра в M_{2k-1}. Поэтому $\mathfrak{F}$-нормализатор H алгебры M_{2k} является $\mathfrak{F}$-нормализатором алгебры A и, очевидно, $H \subseteq M$. Теорема доказана.

12.7. Пусть H/K — нормальный фактор мультикольца A, M — некоторая его подалгебра. Будем говорить, что M *покрывает* (*изолирует*) фактор H/K, если $H \subseteq K + M$ (соответственно $M \cap H \subseteq K$). Если при этом $K = \{0\}$, то мы будем говорить, что M покрывает (соответственно изолирует) идеал H.

Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольный класс мультиколец. Нормальный фактор H/K мультикольца A назовем $\mathfrak{F}$-*центральным*

($\mathfrak{F}$-*эксцентральным*), если $H/K \rightthreetimes A/C_A(H/K) \in \mathfrak{F}$ (соответственно $H/K \rightthreetimes A/C_A(H/K) \notin \mathfrak{F}$).

12.8. Лемма. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация мультиколец, H/K — главный фактор мультикольца A, M — максимальная подалгебра в A, не покрывающая H/K. Тогда и только тогда M $\mathfrak{F}$-нормальна в A, когда фактор H/K $\mathfrak{F}$-централен в A.*

Доказательство. Пусть $C = C_A(H/K)$. Легко видеть, что факторы H/K и $H + M_A/M_A$ перспективны. Значит, $C = C_A(H + M_A/M_A)$ и ввиду лемм 3.28 и 3.27 имеет место

$$H/K \rightthreetimes A/C \simeq H + M_A/M_A \rightthreetimes A/C.$$

Предположим, что M $\mathfrak{F}$-нормальна в A, т. е. $A/M_A \in \mathfrak{F}$. Тогда по лемме 3.32 $H + M_A/M_A \rightthreetimes A/C \in \mathfrak{F}$. Следовательно, фактор H/K $\mathfrak{F}$-централен в A.

Обратно, пусть фактор H/K $\mathfrak{F}$-централен в A. Тогда, если $H \subseteq C$, то ввиду леммы 3.29 $A/M_A \simeq H/K \rightthreetimes A/C \in \mathfrak{F}$. Пусть $H \nsubseteq C$. Если $C = M_A$, то $A/M_A \in \mathfrak{F}$. Предположим, что $C \neq M_A$. Тогда по лемме 11.19 в A/M_A имеются в точности два минимальных идеала $H + M_A/M_A$ и T/M_A, и оба эти идеала дополняются в A/M_A подалгеброй M/M_A. Нетрудно заметить, что $T/M_A = C/M_A$. Значит,

$$(A/M_A)/(H + M_A/M_A) \simeq (A/M_A)/(C/M_A) \in \mathfrak{F}.$$

Следовательно, A/M_A — подпрямое произведение двух мультиколец из $\mathfrak{F}$. Таким образом, $A/M_A \in \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

12.9. Лемма. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация мультиколец и M — максимальная подалгебра мультикольца A, не покрывающая некоторый его главный фактор L/K. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если L/K $\mathfrak{F}$-централен, то M не покрывает фактор $L + A^{\mathfrak{F}}/K + A^{\mathfrak{F}}$, который перспективен фактору L/K;*

2) *если L/K $\mathfrak{F}$-эксцентрален, то M не покрывает фактор $L \cap A^{\mathfrak{F}}/K \cap A^{\mathfrak{F}}$, который перспективен фактору L/K.*

Доказательство. Пусть фактор L/K $\mathfrak{F}$-централен. Тогда по лемме 12.8 M $\mathfrak{F}$-нормальна в A. Следовательно, $A^{\mathfrak{F}} \subseteq M$. Предположим, что M покрывает фактор $L + A^{\mathfrak{F}}/K + A^{\mathfrak{F}}$. Тогда $L \subseteq M + K + A^{\mathfrak{F}} \subseteq M + K$. Противоречие. Значит, M не покрывает $L + A^{\mathfrak{F}}/K + A^{\mathfrak{F}}$. Это, в свою очередь, означает, что $L + A^{\mathfrak{F}} \neq K + A^{\mathfrak{F}}$, т. е. $L \neq (L \cap A^{\mathfrak{F}}) + K$. Поэтому фактор $L + A^{\mathfrak{F}}/K + A^{\mathfrak{F}}$ перспективен фактору $L/K = L/(L \cap A^{\mathfrak{F}}) + K$.

Предположим теперь, что фактор L/K $\mathfrak{F}$-эксцентрален. Если $K+(L\cap A^{\mathfrak{F}})\neq L$, то фактор L/K перспективен фактору $L+A^{\mathfrak{F}}/K+A^{\mathfrak{F}}$. Но ввиду леммы 12.8 последний фактор $\mathfrak{F}$-централен. Следовательно, по лемме 3.28 $\mathfrak{F}$-центральным должен быть и фактор L/K. Таким образом, $K+(L\cap A^{\mathfrak{F}})=L$, и поэтому фактор $L\cap A^{\mathfrak{F}}/K\cap A^{\mathfrak{F}}$ перспективен фактору $L/K=K+(L\cap A^{\mathfrak{F}})/K$. При этом поскольку M не покрывает фактор L/K, то $L\cap A^{\mathfrak{F}}\not\subseteq M$, т. е. M не покрывает фактор $L\cap A^{\mathfrak{F}}/K\cap A^{\mathfrak{F}}$.

При изучении мультиколец через $\varphi(A)$ будем обозначать идеал $\cap M_A$, где M пробегает все максимальные подалгебры из A. Идеал R мультикольца A назовем $\mathfrak{F}$-*предельным*, если $R\subseteq A^{\mathfrak{F}}$ и $R/R\cap\varphi(A)$ — минимальный идеал в $A/R\cap\varphi(A)$. *Обобщенным идеалом Фиттинга* мультикольца A назовем такой его идеал $\tilde{\mathrm{F}}(A)$, что $\varphi(A)\subseteq\tilde{\mathrm{F}}(A)$ и $\tilde{\mathrm{F}}(A)/\varphi(A)$ — цоколь мультикольца $A/\varphi(A)$.

12.10. Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, M — максимальная подалгебра мультикольца A. Тогда и только тогда M $\mathfrak{F}$-критична в A, когда M $\mathfrak{F}$-абнормальна и $A=\tilde{F}(A)+M$.*

Доказательство. Пусть M $\mathfrak{F}$-критична в A, т. е. A имеет такой $\mathfrak{F}$-предельный идеал H, что $M+H=A$. Так как $H\subseteq A^{\mathfrak{F}}$, то $A^{\mathfrak{F}}\subseteq M$. Значит, M $\mathfrak{F}$-абнормальна в A. Фактор $\varphi(A)+H/\varphi(A)$ перспективен фактору $H/\varphi(A)\cap H$. Но последний является главным фактором A. Значит, $\varphi(A)+H/\varphi(A)$ — A-главный фактор. Следовательно, $\varphi(A)+H\subseteq\tilde{\mathrm{F}}(A)$. Поэтому $\tilde{\mathrm{F}}(A)\not\subseteq M$.

Предположим теперь, что M $\mathfrak{F}$-абнормальна в A и $A=\tilde{\mathrm{F}}(A)+M$. Пусть M не покрывает главный фактор $H/\varphi(A)$. Тогда ввиду леммы 12.8 фактор $H/\varphi(A)$ $\mathfrak{F}$-эксцентрален. Следовательно, по лемме 12.9 M не покрывает фактор $H\cap A^{\mathfrak{F}}/\varphi(A)\cap A^{\mathfrak{F}}$, перспективный фактору $H/\varphi(A)$. Понятно, что идеал $H\cap A^{\mathfrak{F}}$ $\mathfrak{F}$-пределен в A. Таким образом, максимальная подалгебра M $\mathfrak{F}$-критична в A.

12.11. Следствие. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, H — подалгебра мультикольца A. Тогда H является $\mathfrak{F}$-нормализатором в A в том и только в том случае, когда $H\in\mathfrak{F}$ и существует цепь*

$$A=M_0\supset M_1\supset\ldots\supset M_t=H,\quad t\geqslant 0,$$

в которой M_i — максимальная $\mathfrak{F}$-абнормальная подалгебра M_{i-1}, не содержащая $\tilde{\mathrm{F}}(M_{i-1})$, $i=1,\ldots,t$.

Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ — произвольные классы мультиколец. Будем говорить, что класс $\mathfrak{X}$ *регулярен* в классе $\mathfrak{F}$, если каждый $\mathfrak{F}$-предельный идеал L произвольного мультикольца $A \in \mathfrak{X}$ удовлетворяет одному из следующих условий: 1) $L \subseteq \mathrm{F}(A)$; 2) $\tau(L) \cap \tau(\mathfrak{F}) = \varnothing$.

12.12. Теорема. *Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$—некоторая наследственная полуформация мультиколец, $\mathfrak{F}$—непустая насыщенная в $\mathfrak{X}$ формация. Пусть $A \in \mathfrak{X}$ и H—произвольный $\mathfrak{F}$-нормализатор A. Тогда имеют место следующие утверждения:*

1) *H покрывает каждый $\mathfrak{F}$-центральный главный фактор A;*

2) *если полуформация $\mathfrak{X}$ φ-разрешима, то H не покрывает ни один неабелев $\mathfrak{F}$-эксцентральный главный фактор A;*

3) *если класс $\mathfrak{X}$ регулярен в классе $\mathfrak{F}$, то H изолирует все $\mathfrak{F}$-эксцентральные главные факторы A.*

Доказательство. Мы можем считать, что утверждение теоремы справедливо для всех тех мультиколец из $\mathfrak{X}$, у которых длина главного ряда меньше длины главного ряда A.

Пусть L/K—произвольный главный фактор A. По теореме 12.5 $H+K/K$—$\mathfrak{F}$-нормализатор в A/K. При этом, очевидно, $H+K/K$ в точности тогда покрывает (изолирует) L/K в A/K, когда H покрывает (соответственно изолирует) L/K в A. Следовательно, для доказательства теоремы достаточно ограничиться лишь рассмотрением случая, когда L—минимальный идеал A.

Пусть

$$A = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_t = H, \quad t \geqslant 0,$$

—цепь, в которой M_i—максимальная $\mathfrak{F}$-критическая подалгебра в M_{i-1}, $i=1, \ldots, t$. Утверждение теоремы относительно идеала L докажем индукцией по t. Если $t=0$, то $H = A \in \mathfrak{F}$, и поэтому по лемме 3.32 каждый главный фактор A $\mathfrak{F}$-централен. Пусть $t \geqslant 1$. Если $L \not\subseteq M_1$, то поскольку M_1 $\mathfrak{F}$-абнормальна в A, то ввиду леммы 12.7 идеал L $\mathfrak{F}$-эксцентрален в A. Из этого, в частности, вытекает, что $L \subseteq A^{\mathfrak{F}}$, т. е. идеал L $\mathfrak{F}$-пределен в A. Понятно, что H не покрывает L. Если же $L \subseteq C_A(L)$, то $L \cap M_1 = \{0\}$. Значит, H изолирует L.

Пусть $L \subseteq M_1$ и R—такой идеал A, что $R + M_1 = A$ и $R \subseteq C_A(L)$. Тогда L—минимальный идеал M_1. Кроме того, очевидно, $C_{M_1}(L) = C_A(L) \cap M_1$. Проверка покажет, что пары $(L, A/C_A(L))$ и $(L, M_1/C_{M_1}(L))$ эквивалентны. Следовательно, ввиду леммы 3.27 идеал L в точности тогда $\mathfrak{F}$-централен ($\mathfrak{F}$-эксцентрален) в A, когда он $\mathfrak{F}$-централен (соответственно $\mathfrak{F}$-эксцентрален) в M_1.

Предположим, что L $\mathfrak{F}$-централен в A, т. е. $L \rtimes A/C_A(L) \in \mathfrak{F}$. Тогда $A/C_A(L) \in \mathfrak{F}$. Значит, $A^{\mathfrak{F}} \subseteq C_A(L)$. Но $A^{\mathfrak{F}} \not\subseteq M_1$. Следовательно, ввиду доказанного в предыдущем абзаце L—$\mathfrak{F}$-центральный минимальный идеал в M_1. Но H—$\mathfrak{F}$-нормализатор в M_1. Значит, по индукции H покрывает L.

Пусть теперь L $\mathfrak{F}$-эксцентрален в A. Выберем в A такой $\mathfrak{F}$-предельный идеал R, что $R+M_1=A$. Предположим, что L неабелев и во всяком мультикольце из $\mathfrak{X}$ каждый фраттиниев главный фактор абелев. Тогда $L \not\subseteq R \cap \varphi(A)$. Значит, если $L \subseteq R$, то $R=L+(R \cap \varphi(A)) \subseteq$ $\subseteq M_1$. Противоречие. Следовательно, $L \not\subseteq R$ и поэтому $L \cap R=\{0\}$. Последнее означает, что $R \subseteq C_A(L)$. Таким образом, ввиду доказанного ранее L—неабелев $\mathfrak{F}$-эксцентральный минимальный идеал в M_1. Значит, по индукции H не покрывает L.

Предположим, что класс $\mathfrak{X}$ регулярен в классе $\mathfrak{F}$. Тогда либо $\tau(R) \cap \tau(\mathfrak{F})=\varnothing$, либо идеал R нильпотентен в A. Это означает, что либо $\tau(L) \cap \tau(\mathfrak{F})=\varnothing$, либо $R \subseteq C_A(L)$. Если имеет место первое, то поскольку $H \in \mathfrak{F}$, то $H \cap L=\{0\}$, т. е. H изолирует L. Пусть имеет место второе. Тогда L—минимальный $\mathfrak{F}$-эксцентральный идеал в M_1, и поэтому по индукции H изолирует L. Теорема доказана.

12.13. Следствие. *Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$—некоторая наследственная полуформация мультиколец, $\mathfrak{F}$—непустая насыщенная в $\mathfrak{X}$ формация, причем $\mathfrak{X}$ регулярна в $\mathfrak{F}$. Пусть $R \in \mathfrak{X}$ и A, B—некоторые $\mathfrak{F}$-нормализаторы в A. Тогда если*

$$\{0\}=A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_t=A \qquad (1)$$

—некоторый композиционный ряд A,

$$\{0\}=B_0 \subset B_1 \subset \ldots \subset B_r=B \qquad (2)$$

—композиционный ряд B, то $t=r$, причем между факторами этих рядов можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором соответственные факторы изоморфны.

Доказательство. Пусть

$$\{0\}=R_0 \subset R_1 \subset \ldots \subset R_m=R$$

—произвольный главный ряд R. Достаточно показать, что для всякого $i \in \{1, \ldots, m\}$ факторы $R_i \cap A/R_{i-1} \cap A$ и $R_i \cap B/R_{i-1} \cap B$ изоморфны. По теореме 12.12 A и B либо изолируют фактор R_i/R_{i-1}, либо покрывают его.

Пусть имеет место первое. Тогда $R_i \cap B/R_{i-1} \cap B \simeq \simeq R_{i-1} + (R_i \cap B)/R_{i-1} = R_i/R_{i-1} = R_{i-1} + (A \cap R_i)/R_{i-1} \simeq \simeq R_i \cap A/R_{i-1} \cap A$. Если имеет место второе, то $R_i \cap B/R_{i-1} \cap B \simeq R_{i-1} + (R_i \cap B)/R_{i-1} = R_i/R_{i-1} = R_{i-1} + + (R_i + A)/R_{i-1} \simeq R_i \cap A/R_{i-1} \cap A$.

12.14. Следствие. *Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — некоторая наследственная полуформация мультиколец, $\mathfrak{F}$ — непустая насыщенная в $\mathfrak{X}$ формация. Предположим также, что класс $\mathfrak{X}$ регулярен в $\mathfrak{F}$. Тогда если H — некоторый $\mathfrak{F}$-нормализатор мультикольца $A \in \mathfrak{X}$ и N_1, N_2 — идеалы в A, то имеют место равенства*

$$(H + N_1) \cap (H + N_2) = H + (N_1 \cap N_2), \tag{1}$$

$$(H \cap N_1) + (H \cap N_2) = H \cap (N_1 + N_2). \tag{2}$$

Доказательство. Можно считать, что следствие верно относительно любого собственного фактора мультикольца A. Ввиду леммы 11.26 достаточно установить справедливость равенства (1).

Мы можем положить, что $N_1 \neq \{0\} \neq N_2$, $N_1 \cap N_2 = \{0\}$. Пусть L — минимальный идеал A, входящий в N_1. По теореме 10.4 $L + H/L$ — $\mathfrak{F}$-нормализатор в A/L. Значит, $(N_1 + H/L) \cap (H + L + N_2/L) = H + L/L$. Поэтому $(H + L) \cap \cap (H + N_2) = (N_1 + H) \cap (H + L + N_2) \cap (H + N_2) = (N_1 + H) \cap \cap (N_2 + H)$. Следовательно, можно считать, что N_1 — минимальный идеал A. Понятно также, что аналогичное допущение можно принять и относительно идеала N_2. Если хотя бы один из идеалов N_1, N_2 $\mathfrak{F}$-централен в A, то по теореме 12.12 H покрывает этот идеал, и поэтому в рассматриваемой ситуации равенство (1) справедливо. Пусть оба идеала N_1, N_2 $\mathfrak{F}$-эксцентральны в A. Тогда H изолирует оба фактора $N_1 + N_2/N_1$ и N_1. Значит, $H \cap (N_1 + N_2) = \{0\}$. Поэтому имеет место равенство (2) и, следовательно, ввиду леммы 11.26 также и равенство (1). Следствие доказано.

Для произвольного класса $\mathfrak{F}$ через $\mathrm{P}_{\mathfrak{F}}(A)$ обозначим множество всех $\mathfrak{F}$-проекторов алгебры A.

12.15. Лемма. *Пусть $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — некоторая наследственная полуформация мультиколец, $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ — насыщенные в $\mathfrak{X}$ формации. Пусть $\pi = \tau(\mathfrak{F}_2)$, $A \in \mathfrak{X}$ и $A/R_\pi(A) \in \mathfrak{F}_1$. Тогда если $\mathrm{P}_{\mathfrak{F}_1}(A) = \mathrm{P}_{\mathfrak{F}_2}(A)$, то каждый $\mathfrak{F}_2$-центральный главный фактор A $\mathfrak{F}_1$-централен.*

Доказательство. Для всякого мультикольца B из $\mathfrak{X}$ через $t(B)$ обозначим длину композиционного ряда мультикольца $B^{\mathfrak{F}_1}$. Предположим, что класс $\mathfrak{M}$ всех тех мультиколец из $\mathfrak{X}$, в которых выполняются условия леммы и не выполняется ее заключение, непуст. Пусть A — такое мультикольцо из $\mathfrak{M}$, что $t(A)=\min\{t(K)\mid K\in\mathfrak{M}\}$. Тогда $A^{\mathfrak{F}_1}\neq\{0\}$. Пусть L — минимальный идеал A, входящий в $A^{\mathfrak{F}_1}$. Покажем, что $\mathrm{P}_{\mathfrak{F}_1}(A/L)=\mathrm{P}_{\mathfrak{F}_2}(A/L)$. Пусть $U/L\in\in\mathrm{P}_{\mathfrak{F}_1}(A/L)$. Ввиду теоремы 11.23, $\mathrm{P}_{\mathfrak{F}_1}(U)\neq\varnothing$. Пусть $H\in\mathrm{P}_{\mathfrak{F}_1}(U)$. Тогда по лемме 11.12 $H\in\mathrm{P}_{\mathfrak{F}_1}(A)$. Значит, по лемме 11.11 $U=L+H$. По условию $H\in\mathrm{P}_{\mathfrak{F}_2}(A)$, и поэтому ввиду леммы 11.11 $U/L=L+H/L\in\mathrm{P}_{\mathfrak{F}_2}(A/L)$. Аналогично убеждаемся, что $\mathrm{P}_{\mathfrak{F}_2}(A/L)\subseteq P_{\mathfrak{F}_1}(A/L)$. Следовательно, $\mathrm{P}_{\mathfrak{F}_1}(A/L)=\mathrm{P}_{\mathfrak{F}_2}(A/L)$. При этом, очевидно, $t(A/L)\leqslant\leqslant t(A)$. Таким образом, всякий $\mathfrak{F}_2$-центральный главный фактор мультикольца A/L $\mathfrak{F}_1$-централен. Вспоминая, как был произведен выбор мультикольца A, мы должны заключить, что идеал L $\mathfrak{F}_2$-централен и $\mathfrak{F}_1$-эксцентрален в A.

Пусть U/L — произвольный $\mathfrak{F}_2$-проектор в A/L, H — $\mathfrak{F}_2$-проектор в U. Тогда H — $\mathfrak{F}_2$-проектор в A. Значит, по условию H — $\mathfrak{F}_1$-проектор в A. Следовательно, H — $\mathfrak{F}_2$-проектор в U. Аналогично можно показать, что $\mathrm{P}_{\mathfrak{F}_1}(U)\subseteq\subseteq\mathrm{P}_{\mathfrak{F}_2}(U)$. Таким образом, $\mathrm{P}_{\mathfrak{F}_1}(U)=\mathrm{P}_{\mathfrak{F}_2}(U)$. Предположим, что $t(U)=t(A)$. Тогда $A^{\mathfrak{F}_2}=L$. Значит, всякий главный фактор мультикольца A $\mathfrak{F}_2$-централен, и поэтому ввиду леммы 12.8 для любой максимальной подалгебры M из A имеет место $A/M_A\in\mathfrak{F}$. Значит, по лемме 12.3 $A/\varphi(A)\in\mathfrak{F}_2$. Таким образом, $A\in\mathfrak{F}_2$, т. е. $\{A\}=\mathrm{P}_{\mathfrak{F}_2}(A)==\mathrm{P}_{\mathfrak{F}_1}(A)$. Следовательно, $A\in\mathfrak{F}_1$. Противоречие. Итак, мы должны заключить, что $t(U)<t(A)$, и поэтому всякий $\mathfrak{F}_2$-центральный главный фактор U $\mathfrak{F}_1$-централен.

Поскольку идеал L $\mathfrak{F}_2$-централен, то $A/C_A(L)\in\mathfrak{F}_2$. Следовательно, $(A/L)/(L+C_A(L)/L)\in\mathfrak{F}_2$. Значит, $L++C_A(L)/L+U/L=A/L$, и поэтому $A=C_A(L)+U$. Последнее означает, что L — минимальный идеал в U. Так как при этом пары $(L,\ A/C_A(L))$ и $(L,\ U/C_U(L))$ эквивалентны, то L $\mathfrak{F}_2$-централен и $\mathfrak{F}_1$-эксцентрален в U. Но это противоречит установленному выше. Лемма доказана.

12.16. Лемма. *Пусть M — подалгебра, а R — идеал алгебры A. Тогда если $R\subseteq F(A)$ и $A=R+M$, то $R\cap M$ — идеал A.*

Доказательство. Пусть L — минимальный идеал A, входящий в R. Предположим, что $L\subseteq M$. Тогда, привлекая индукцию по длине главных рядов, видим, что $R/L\cap M/L=R\cap M/L$ — идеал в A/L. Значит, $R\cap M$ — идеал в A. Пусть $L\not\subseteq M$. Тогда поскольку $A=L+M$ и $R\subseteq C_A(L)$, то $M\cap R$ — идеал в A.

12.17. Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ — непустые насыщенные подформации наследственной формации муль-*

тиколец $\mathfrak{X}$, причем $\mathfrak{X}$ регулярна в классе $\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2$. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$. Тогда если $A \in \mathfrak{X}$ и $\mathrm{P}_{\mathfrak{F}_1}(A) = \mathrm{P}_{\mathfrak{F}_2}(A) = \mathrm{P}_{\mathfrak{F}}(A)$, то множество $\mathfrak{F}_1$-нормализаторов A совпадает с множеством $\mathfrak{F}_2$-нормализаторов.

Доказательство. Прежде покажем, что во всяком мультикольце $G \in \mathfrak{X}$ имеет место $G^{\mathfrak{F}} \subseteq \mathrm{R}_{\pi}(\pi)$, где $\pi = \tau(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)$. Предположим противное, и пусть B — мультикольцо с наименьшей длиной главного ряда среди тех мультиколец из $\mathfrak{X}$, для которых это утверждение не выполняется. Пусть L — минимальный идеал B, входящий в $B^{\mathfrak{F}}$. Тогда $(B/L)^{\mathfrak{F}} = B^{\mathfrak{F}}/L$. Следовательно, по индукции $B^{\mathfrak{F}}/L \subseteq \mathrm{R}_{\pi}(B/L)$. Покажем, что L входит в некоторый $\mathfrak{F}$-предельный идеал B. Если $L \not\subseteq \varphi(B)$, то сам идеал L $\mathfrak{F}$-пределен. Пусть $L \subseteq T = B^{\mathfrak{F}} \cap \varphi(B)$. Так как $B \notin \mathfrak{F}$ и формация $\mathfrak{F}$ насыщена в $\mathfrak{X}$, то $T \subset B^{\mathfrak{F}}$. Следовательно, B имеет такой $\mathfrak{F}$-предельный идеал M, что $L \subseteq T \subseteq M$. Значит, идеал L π-разрешим в B. Следовательно, $B^{\mathfrak{F}} \subseteq \mathrm{R}_{\pi}(B)$. Полученное противоречие показывает, что для всякого мультикольца $G \in \mathfrak{X}$ имеет место $G^{\mathfrak{F}} \subseteq \mathrm{R}_{\pi}(G)$. Ввиду условия теоремы и леммы 12.15 это означает, что каждый $\mathfrak{F}_1$-центральный главный фактор мультикольца A является $\mathfrak{F}_2$-центральным и наоборот.

Пусть H — произвольный $\mathfrak{F}_1$-нормализатор A. Тогда A имеет такую цепь

$$A = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_t = H, \quad t \geqslant 0,$$

в которой M_i — максимальная $\mathfrak{F}_1$-критическая подалгебра в M_{i-1}, $i = 1, \ldots, t$. Индукцией по t покажем, что H — $\mathfrak{F}_2$-нормализатор A. Случай $t = 0$ тривиален. Пусть $t \geqslant 1$. Ввиду теоремы 12.10 и леммы 12.8 M_1 $\mathfrak{F}_2$-критична. Следовательно, необходимо лишь показать, что множество $\mathfrak{F}_1$-центральных главных факторов M_1 совпадает с множеством ее $\mathfrak{F}_2$-центральных главных факторов. Пусть R — такой $\mathfrak{F}$-предельный идеал A, что $R \not\subseteq M_1$. Тогда $A/R = R + M_1/R \simeq M_1/R \cap M_1$. Значит, если E/K — такой M_1-главный фактор, что $R \cap M_1 \subseteq K$, то этот фактор в точности тогда $\mathfrak{F}_1$-централен, когда он $\mathfrak{F}_2$-централен. Пусть H/K — такой M_1-главный фактор, что $H \subseteq R \cap M_1$. По условию либо $\tau(R) \cap \tau(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2) = \varnothing$, либо $R \subseteq F(A)$. Если имеет место первое, то фактор H/K $\mathfrak{F}_i$-эксцентрален в M_1, $i = 1, 2$. Предположим, что $R \subseteq \mathrm{F}(A)$. Тогда ввиду леммы 12.16 H/K — главный фактор мультикольца A. Легко видеть также, что пары $(H/K, A/C_A(H/K))$ и $(H/K, M_1/C_{M_1}(H/K))$ эквивалентны. Значит, фактор H/K $\mathfrak{F}_1$-

централен в M_1 тогда и только тогда, когда он $\mathfrak{F}_2$-централен в M_1. Теорема доказана.

12.18. Теорема. *Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — некоторая наследственная полуформация мультиколец, $\mathfrak{F}$ — непустая формация, насыщенная в $\mathfrak{X}$. Пусть φ: $A \to A^*$ эпиморфизм, где $A \in \mathfrak{X}$. Тогда каждый $\mathfrak{F}$-нормализатор мультикольца A^* является образом некоторого $\mathfrak{F}$-нормализатора мультикольца A.*

Доказательство. Предположим, что теорема не верна. Выберем в классе $\mathfrak{X}$ такое мультикольцо A, что утверждение теоремы выполняется относительно любого собственного фактора A, но не выполняется относительно самого A. Тогда A имеет такой идеал N, что для некоторого $\mathfrak{F}$-нормализатора T/N из A/N в мультикольце A не существует $\mathfrak{F}$-нормализатора D с условием $T = N + D$.

Пусть L — минимальный идеал A, входящий в N. Тогда теорема верна для A/L. Следовательно, $T/L = N/L + H/L = N + H/L$ для некоторого $\mathfrak{F}$-нормализатора H/L мультикольца A/L. Поэтому $T = N + H$. Значит, ввиду выбора A для всякого $\mathfrak{F}$-нормализатора E из A имеет место $H \neq L + E$.

Рассмотрим цепь

$$H/L = H_t/L \subset \ldots \subset H_1/L \subset H_0/L = A/L, \quad t \geqslant 0,$$

где H_i/L — максимальная $\mathfrak{F}$-критическая подалгебра в H_{i-1}/L, $i = 1, \ldots, t$; R/L — $\mathfrak{F}$-предельный идеал A/L со свойством $R/L + H_1/L = A/L$. Тогда H/L — $\mathfrak{F}$-нормализатор в H_1/L. Следовательно, $H = L + D$, где D — некоторый $\mathfrak{F}$-нормализатор H_1. Значит, H_1 не $\mathfrak{F}$-критична в A. Последнее означает, что $\tilde{\mathrm{F}}(A) \subseteq H_1$. Если предположить, что $L \subseteq \varphi(A)$, то, очевидно, $R \subseteq \tilde{\mathrm{F}}(A)$. Но $R + H = A$. Противоречие. Значит, $L \not\subseteq \varphi(A)$.

Пусть L $\mathfrak{F}$-эксцентрален. Тогда L — $\mathfrak{F}$-предельный идеал A. Пусть M — такая максимальная подалгебра A, что $H \subseteq M$, $L \not\subseteq M$. Тогда $H/M \cap L$ — $\mathfrak{F}$-нормализатор в M. Значит, $H = E + (M \cap L) = E + L$ для некоторого $\mathfrak{F}$-нормализатора E мультикольца M. Но M $\mathfrak{F}$-критична в A и поэтому E — $\mathfrak{F}$-нормализатор A. Снова пришли к противоречию. Следовательно, L — $\mathfrak{F}$-центральный идеал A. Ввиду леммы 12.9, $L \not\subseteq A^{\mathfrak{F}}$.

Пусть $R_1 = R \cap A^{\mathfrak{F}}$, $R_2 = R_1 \cap \varphi(A)$. Поскольку $R \subseteq A^{\mathfrak{F}} + L$, то $R = R \cap (L + A^{\mathfrak{F}}) = L + R_1$. Значит, $R_1 \not\subseteq H_1$ и поэтому R_1 не является $\mathfrak{F}$-предельным идеалом A. Следовательно, R_1/R_2 не является главным фактором мультикольца A. Но этот фактор перспективен фактору R/R_2+L. Из этого вытекает, что $R_2+L/L\subset T/L$, где $T/L=R/L\cap\cap\varphi(A/L)$. Поэтому A имеет такой фраттиниев главный фактор D/R_2+L, что $D\subseteq T$. Легко видеть, что $D=R_3+L$, где R_3 — такой идеал A, что $R_3\subseteq T$ и $R_2\subseteq R_3$. Понятно, что R_3/R_2 — A-главный фактор, перспективный фактору D/R_2+L. Так как при этом $R_3\subseteq A^{\mathfrak{F}}$ и, очевидно, $R_3\not\subseteq\varphi(A)$, то ввиду леммы 12.9 R_3/R_2 — нефраттиниев $\mathfrak{F}$-эксцентральный главный фактор A. Пусть M — максимальная подалгебра A, не покрывающая фактор R_3/R_2. Допустим, что $L\subseteq M$. Тогда M не покрывает фраттиниев A-главный фактор $D/R_2+L=R_3+L/R_2+L$. Противоречие. Значит, $L\not\subseteq M$. Таким образом, M не покрывает $\mathfrak{F}$-эксцентральный главный фактор R_3/R_2 и $\mathfrak{F}$-центральный минимальный идеал L. Но это невозможно ввиду леммы 12.8. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

§ 13. $\mathfrak{F}$-профраттиниевы подалгебры

Доказательство следующей леммы аналогично доказательству леммы 3.34.

13.1. Лемма. *Между A-абелевыми факторами произвольных двух главных рядов мультикольца A можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором соответствующие факторы проективны и оба одновременно либо фраттиниевы, либо нефраттиниевы.*

13.2. Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольный класс мультиколец, A — мультикольцо, в главных рядах которого имеется ровно по t A-абелевых нефраттиниевых $\mathfrak{F}$-эксцентральных факторов. Будем говорить, что H — *$\mathfrak{F}$-профраттиниева подалгебра* мультикольца A, если для всякого главного ряда A найдутся такие максимальные подалгебры $M_1, \ldots, M_t$, изолирующие различные A-абелевы нефраттиниевы $\mathfrak{F}$-эксцентральные факторы этого ряда, что $H=M_1\cap\ldots\cap M_t$. Если же A не имеет A-абелевых нефраттиниевых $\mathfrak{F}$-эксцентральных главных факторов, то $\mathfrak{F}$-профраттиниевой подалгеброй A назовем само мультикольцо A.

Пусть H/K — некоторый нормальный фактор мультикольца A. Будем говорить, что подалгебра B *дополняет* H/K в A, если $K\subseteq B$ и B/K — дополнение к H/K в A/K.

13.3. Лемма. *Пусть C/R — некоторая корона мультикольца A. Тогда подалгебра B дополняет C/R в A в том и только в том случае, когда для каждого участка*

$$R=A_0\subset A_1\subset\ldots\subset A_t=C$$

главного ряда A между R и C найдутся такие максимальные в A подалгебры $M_1, \ldots, M_t$, что $B = M_1 \cap \ldots \cap M_t$ и M_i изолирует фактор A_i/A_{i-1}, $i = 1, \ldots, t$.

Доказательство. Достаточность. Заметим, что

$$C + (M_1 \cap \ldots \cap M_t) = C + A_1 + (M_1 \cap \ldots \cap M_t) = \\ = C + ((A_1 + M_1) \cap M_2 \cap \ldots \cap M_t) = C + (A \cap M_2 \cap \ldots \cap M_t) = \\ = C + (M_2 \cap \ldots \cap M_t) = \ldots = C + M_t = A.$$

С другой стороны,

$$C \cap (M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_t) = ((C \cap M_t) \cap (M_1 \cap \ldots \cap M_{t-1})) = \\ = A_{t-1} \cap (M_1 \cap \ldots \cap M_{t-1}) = \ldots = A_1 \cap M_1 = R.$$

Таким образом, $M_1 \cap \ldots \cap M_t$—дополнение к C/R в A.

Необходимость. Пусть B является дополнением к C/R в A, $i \in \{1, \ldots, t\}$ и H_i—некоторая максимальная подалгебра A, изолирующая фактор A_i/A_{i-1}. Тогда $(H_i)_A + A_i = C$ и $C/(H_i)_A$—минимальный идеал в $A/(H_i)_A$. Фактор $C/(H_i)_A$ нефраттиниев и проективен фактору A_i/A_{i-1}. Значит, $R \subseteq (H_i)_A$. Следовательно, $C \cap ((H_i)_A + B) = (H_i)_A + (C \cap B) \subseteq (H_i)_A + R = (H_i)_A$. Таким образом, $B + (H_i)_A/(H_i)_A$—дополнение к $C/(H_i)_A$ в $A/(H_i)_A$. Значит, $B + (H_i)_A$—максимальная подалгебра A. Пусть $M_i = B + (H_i)_A$. Ясно, что M_i изолирует фактор A_i/A_{i-1}. Следовательно, $M_1 \cap \ldots \cap M_t$—дополнение к C/R в A. Но $B \subseteq M_1 \cap \ldots \cap M_t$. Значит, $B = M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_t$. Лемма доказана.

13.4. Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$—произвольный класс мультиколец, A—некоторое мультикольцо. Справедливы следующие утверждения:*

1) *если в некотором главном ряде A имеется точно t A-абелевых нефраттиниевых $\mathfrak{F}$-эксцентральных факторов и $M_1, M_2, \ldots, M_t$—максимальные подалгебры A, изолирующие различные A-абелевы нефраттиниевы $\mathfrak{F}$-эксцентральные факторы этого же ряда A, то $M_1 \cap \ldots \cap M_t$—$\mathfrak{F}$-профраттиниева подалгебра A;*

2) *если B—произвольная $\mathfrak{F}$-профраттиниева подалгебра A, то B изолирует все A-абелевы нефраттиниевы $\mathfrak{F}$-эксцентральные главные факторы и покрывает остальные главные факторы A;*

3) *тогда и только тогда T/N—$\mathfrak{F}$-профраттиниева подалгебра в A/N, когда $T = N + B$, где B—некоторая $\mathfrak{F}$-профраттиниева подалгебра A.*

Доказательство. Пусть

$$\{0\} = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n = A \tag{1}$$

и

$$\{0\}=H_0\subset H_1\subset\ldots\subset H_n=A \qquad (2)$$

— два произвольных главных ряда мультикольца A. Множество всех A-абелевых нефраттиниевых $\mathfrak{F}$-эксцентральных главных факторов A является объединением непересекающихся классов проективных между собой факторов. Пусть $\{A_{i_1}/A_{i_1-1}, \ldots, A_{i_a}/A_{i_a-1}\}$ и $\{H_{j_1}/H_{j_1-1}, \ldots$ $\ldots, H_{j_b}/H_{j_b-1}\}$ — пересечения одного из таких классов с множествами факторов рядов (1) и (2). Пусть C/R — корона, соответствующая фактору A_{i_1}/A_{i_1-1}. Тогда ввиду лемм 2.5, 3.33 и 13.1 $a=b$ и

$$R=R+A_{i_1-1}\subset R+A_{i_1}=R+A_{i_2-1}\subset R+A_{i_2}=\ldots$$
$$\ldots=R+A_{i_a-1}\subset R+A_{i_a}=C,$$
$$R=R+H_{j_1-1}\subset R+H_{j_1}=R+H_{j_2-1}\subset R+A_{j_2}=\ldots$$
$$\ldots=R+H_{j_a-1}\subset R+H_{j_a}=C$$

— участки главных рядов A между R и C. Пусть M_{i_r} — максимальная подалгебра A, изолирующая фактор A_{i_r}/A_{i_r-1}, $r=1, \ldots, a$. Так как факторы A_{i_r}/A_{i_r-1} и $R+A_{i_r}/R+A_{i_r-1}$ перспективны, то $C=(M_{i_r})_A+A_{i_r}$, и поэтому $R\subseteq M_{i_r}$. Значит, M_{i_r} изолирует фактор $R+A_{i_r}/R+A_{i_r-1}$. Следовательно, ввиду леммы 13.3 $M_{i_1}\cap\ldots\cap M_{i_a}$ — дополнение к C/R в A. Ввиду обратного утверждения леммы 13.3 в A найдутся такие максимальные подалгебры $T_{j_1}, \ldots$ $\ldots, T_{j_a}$, что $M_{i_1}\cap\ldots\cap M_{i_a}=T_{j_1}\cap\ldots\cap T_{j_a}$ и T_{jr} изолирует фактор $R+H_{j_r}/R+H_{j_r-1}$, а значит, и фактор H_{j_r}/H_{j_r-1}, $r=1, \ldots, a$. Из этого вытекает первое утверждение теоремы.

Пусть $\{A_{i_1}/A_{i_1-1}, \ldots, A_{i_t}/A_{i_t-1}\}$ — множество всех A-абелевых нефраттиниевых $\mathfrak{F}$-эксцентральных факторов ряда (1), записанных в порядке расположения их в ряду (1). По определению подалгебры B в A найдутся такие максимальные подалгебры $M_{i_1}, \ldots, M_{i_t}$, что $B=M_{i_1}\cap\ldots\cap M_{i_t}$ и M_{i_r} изолирует фактор A_{i_r}/A_{i_r-1}, $r=1, \ldots, t$. Но тогда тем более B изолирует фактор A_{i_r}/A_{i_r-1}. Пусть H/K — произвольный фактор ряда (1), не принадлежащий множеству $\{A_{i_1}/A_{i_1-1}, \ldots, A_{i_t}/A_{i_t-1}\}$. Пусть a — такое, что

$A_{i_a} \subseteq K$, $H \subseteq A_{i_{a+1}}$. Тогда

$$K + B = K + (M_{i_1} \cap \ldots \cap M_{i_a} \cap M_{i_{a+1}} \cap \ldots \cap M_{i_t}) = \\ = (K + (M_{i_1} \cap \ldots \cap M_{i_a})) \cap (M_{i_{a+1}} \cap \ldots \cap M_{i_t}).$$

Следовательно, поскольку

$$K + (M_{i_1} \cap \ldots \cap M_{i_a}) = K + A_{i_1} + (M_{i_1} \cap \ldots \cap M_{i_a}) = \\ = K + ((A_{i_1} + M_{i_1}) \cap M_{i_2} \cap \ldots \cap M_{i_a}) = \\ = K + (A \cap M_{i_2} \cap \ldots \cap M_{i_a}) = \\ = K + (M_{i_2} \cap \ldots \cap M_{i_a}) = \ldots = K + M_{i_a} = A,$$

то $K + B = M_{i_{a+1}} \cap \ldots \cap M_{i_t}$. Но $H \subseteq M_{i_{a+1}} \cap \ldots \cap M_{i_t}$. Значит, B покрывает фактор H/K. Тем самым доказано утверждение 2).

Докажем теперь утверждение 3). Не ограничивая общности, можно считать, что N является членом ряда (1), т. е. $N = A_m$ для некоторого $m \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Пусть a — такое наибольшее число, что $A_{i_a} \subseteq N$ и B — произвольная $\mathfrak{F}$-профраттиниева подалгебра мультикольца A. В A найдутся такие максимальные подалгебры $M_1, \ldots, M_t$, что $B = M_1 \cap \ldots \cap M_t$ и M_r изолирует фактор A_{i_r}/A_{i_r-1}, $r = 1, \ldots, t$. Значит,

$$B + N/N = (M_1 \cap \ldots \cap M_a \cap M_{a+1} \cap \ldots \cap M_t) + N/N = \\ = ((M_1 \cap \ldots \cap M_a) + N) \cap (M_{a+1} \cap \ldots \cap M_t)/N = \\ = (A \cap M_{a+1} \cap \ldots \cap M_t)/N = M_{a+1}/N \cap \ldots \cap M_t/N.$$

Понятно, что

$$\{(A_{i_{a+1}}/N)/(A_{i_{a+1}-1}/N), \ \ldots, \ (A_{i_t}/N)/(A_{i_t-1}/N)\}$$

— множество всех A/N-абелевых нефраттиниевых $\mathfrak{F}$-эксцентральных факторов главного ряда

$$\{N\} = A_m/N \subset A_{m+1}/N \subset \ldots \subset A_n/N = A/N$$

мультикольца A/N и M_p/N изолирует фактор $(A_{i_p}/N)/(A_{i_p-1}/N)$, $p = a+1, \ldots, t$. Значит, ввиду 1) $B + N/N = M_{a+1}/N \cap \ldots \cap M_t/N$ — $\mathfrak{F}$-профраттиниева подалгебра в A/N.

Пусть T/N — произвольная $\mathfrak{F}$-профраттиниева подалгебра в A/N. Тогда в A/N найдутся такие максимальные подалгебры $L_{a+1}/N, \ldots, L_t/N$, что $T/N = L_{a+1}/N \cap \ldots \cap L_t/N = (L_{a+1} \cap \ldots \cap L_t)/N$ и L_d/N изолирует фактор $(A_{i_d}/N)/(A_{i_d-1}/N)$. Понятно, что L_d — максимальная подалгебра A, изолирующая фактор A_{i_d}/A_{i_d-1}, $d=a+1$, $a+2$, ..., t. Пусть L_1, ..., L_a—такие максимальные в A подалгебры, что L_m изолирует фактор A_{i_m}/A_{i_m-1}, $m=1, \ldots, a$. Тогда ввиду 1) $B=L_1 \cap \ldots \cap L_t$—$\mathfrak{F}$-профраттиниева подалгебра в A. При этом

$$N+B=N+((L_1 \cap \ldots \cap L_a) \cap (L_{a+1} \cap \ldots \cap L_t))=$$
$$=A \cap L_{a+1} \cap \ldots \cap L_t = L_{a+1} \cap \ldots \cap L_t = T.$$

Теорема доказана.

13.5. Следствие. *Пусть $\mathfrak{F}$—произвольный класс мультиколец, A и B—$\mathfrak{F}$-профраттиниевы подалгебры мультикольца G. Тогда если*

$$\{0\}=A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_t = A \tag{1}$$

—некоторый композиционный ряд A,

$$\{0\}=B_0 \subset B_1 \subset \ldots \subset B_l = B \tag{2}$$

—некоторый композиционный ряд B, то $t=l$, и между факторами рядов (1) *и* (2) *можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором соответствующие факторы изоморфны.*

Пусть $\mathfrak{F}$—произвольный класс мультиколец. Корону C/R мультикольца A назовем *$\mathfrak{F}$-центральной*, если она соответствует $\mathfrak{F}$-центральному главному фактору A и *$\mathfrak{F}$-эксцентральной*—в противном случае (напомним, что корона соответствует, по определению, A-абелевым нефраттиниевым главным факторам A).

13.6. Следствие. *Пусть $\mathfrak{F}$—произвольный класс мультиколец, C_1/R_1, ..., C_t/R_t—множество $\mathfrak{F}$-эксцентральных корон мультикольца A. Тогда подалгебра H является $\mathfrak{F}$-профраттиниевой подалгеброй A в том и только в том случае, когда H представима в виде $H=H_1 \cap \ldots \cap H_t$, где H_i—дополнение к C_i/R_i в A, $i=1, \ldots, t$.*

13.7. Лемма. *Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$—некоторая наследственная полуформация мультиколец, $\mathfrak{F}$—непустая формация, насыщенная в $\mathfrak{X}$. Тогда если H—некоторый $\mathfrak{F}$-нормализатор мультикольца $A \in \mathfrak{X}$, R—абелев $\mathfrak{F}$-предельный идеал A, то A имеет такую максимальную подалгебру M, что $H \subseteq M$ и $R+M=A$.*

Доказательство. Предположим, что лемма не верна. Пусть A—мультикольцо с наименьшей длиной главного ряда среди мультиколец, относительно которых утверждение леммы не выполняется.

Предположим вначале, что $\varphi(A) \neq \{0\}$. Пусть $P \subseteq \varphi(A)$, где P — минимальный идеал A. Легко проверить, что $P+R/P$ — $\mathfrak{F}$-предельный идеал в A/P. Кроме того, по теореме 12.5 $H+P/P$ — $\mathfrak{F}$-нормализатор в A/P. Следовательно, в A/P найдется такая максимальная подалгебра M/P, что $H+P/P \subseteq M/P$ и $R+P/P \not\subseteq M/P$. Но тогда $H \subseteq M$, $R \not\subseteq M$. Это противоречит выбору мультикольца A. Значит, $\varphi(A)=\{0\}$. Таким образом, R — минимальный идеал A. Аналогично можно показать, что для любого нетривиального идеала L из A $L+R/L \subseteq \varphi(A/L)$.

Пусть M — такая максимальная $\mathfrak{F}$-критическая подалгебра A, что $H \subseteq M$ и P — $\mathfrak{F}$-предельный идеал A с условием $P+M=A$. Тогда $P \neq R$. Пусть D — максимальная подалгебра A, не содержащая идеал R. Тогда $P \not\subseteq D$, ибо в противном случае D не покрывает фактор $P+R/R$, что невозможно. Следовательно, ввиду леммы 11.19 $P \simeq R$, и поэтому ввиду условия $L=(P+R) \cap D$ — нетривиальный идеал A. Значит, $L+R/L \subseteq \varphi(A/L)$. Но, очевидно, D не покрывает фактор $L+R/L$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

13.8. Теорема. *Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — некоторая наследственная полуформация мультиколец, $\mathfrak{F}$ — непустая формация, насыщенная в $\mathfrak{X}$. Тогда для любого мультикольца $A \in \mathfrak{X}$ справедливы следующие утверждения:*

1) *всякая $\mathfrak{F}$-профраттиниева подалгебра A содержит хотя бы один $\mathfrak{F}$-нормализатор A;*

2) *всякий $\mathfrak{F}$-нормализатор A входит в некоторую $\mathfrak{F}$-профраттиниеву подалгебру A.*

Доказательство. Предположим, что теорема не верна. Пусть A — мультикольцо с наименьшей длиной главного ряда среди мультиколец, для которых утверждение теоремы не выполняется.

Пусть T — произвольная $\mathfrak{F}$-профраттиниева подалгебра A, R — некоторый минимальный идеал A. По теореме 13.4 $T+R/R$ — $\mathfrak{F}$-профраттиниева подалгебра в A/R. Следовательно, в A/R найдется такой $\mathfrak{F}$-нормализатор H/R, что $H/R \subseteq T+R/R$. По теореме 12.18 $H=E+R$, где E — некоторый $\mathfrak{F}$-нормализатор мультикольца A. Значит, $E \subseteq T+R$. Если R не является нефраттиниевым A-абелевым $\mathfrak{F}$-эксцентральным, то по теореме 13.4 T покрывает R, т. е. $T+R=T$, и поэтому в этом случае $E \subseteq T$, что невозможно. Таким образом, идеал R нефраттиниев, A-абелев и $\mathfrak{F}$-эксцентрален в A. По определению подалгебры T, в A найдется такая максимальная подалгебра M, что $T \subseteq M$ и $R+M=A$. При этом, поскольку $T+R/R$ — $\mathfrak{F}$-профраттиниева подалгебра в $A/R = M+R/R$, то T — $\mathfrak{F}$-профраттиниева подалгебра в M. Значит, M имеет такой $\mathfrak{F}$-нормализатор H, что $H \subseteq T$. Заметим, что идеал R $\mathfrak{F}$-пределен и поэтому M $\mathfrak{F}$-критична в A. Следовательно, H — $\mathfrak{F}$-нормализатор A. Полученное противоречие доказывает утверждение 1).

Пусть теперь H — произвольный $\mathfrak{F}$-нормализатор A, R — минимальный идеал A. По теореме 12.5 $H+R/R$ — $\mathfrak{F}$-нормализатор A/R. Значит, $H+R/R \subseteq T/R$, где T/R — некоторая $\mathfrak{F}$-профраттиниева подалгебра A. По теореме 13.4 $T=B+R$, где B — некоторая $\mathfrak{F}$-профраттиниева подалгебра A. Следовательно, если идеал R не является нефраттиниевым A-абелевым $\mathfrak{F}$-эксцентральным, то $H \subseteq T = B$, что невозможно ввиду выбора A. Таким образом, R — A-абелев нефраттиниев $\mathfrak{F}$-эксцентральный идеал A. Следовательно, идеал R $\mathfrak{F}$-пределен в A. По лемме 13.7 A имеет такую максимальную подалгебру M, что $H \subseteq M$ и $R+M=A$. Используя теорему 13.4, легко показать, что $T \cap M$ — $\mathfrak{F}$-профраттиниева подалгебра A. Но $H \subseteq T \cap M$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

§ 14. Пересечение $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных подалгебр

$\mathfrak{F}$-гиперцентр. Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольный класс мультиколец, H — некоторый идеал мультикольца A. Будем говорить, что H *$\mathfrak{F}$-гиперцентрален* в A, если каждый A-главный фактор идеала H $\mathfrak{F}$-централен в A. Нулевой идеал $\{0\}$ также будем считать $\mathfrak{F}$-гиперцентральным. Назовем *$\mathfrak{F}$-гиперцентром* A и обозначим через $Z_\infty^{\mathfrak{F}}(A)$ сумму всех $\mathfrak{F}$-гиперцентральных идеалов A.

14.1. Лемма. *Если $\mathfrak{F}$ — формация, то $Z_\infty^{\mathfrak{F}}(A)$ — $\mathfrak{F}$-гиперцентральный идеал A.*

Доказательство. Пусть A_1 и A_2 — $\mathfrak{F}$-гиперцентральные идеалы A. Ввиду леммы 2.7 всякий A-главный фактор, лежащий между A_1 и A_1+A_2, $\mathfrak{F}$-централен. Теперь достаточно воспользоваться леммой 2.5.

14.2. Лемма. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, M — максимальная подалгебра мультикольца A. Если M $\mathfrak{F}$-абнормальна, то $Z_\infty^{\mathfrak{F}}(A) \subseteq M$.*

Доказательство. Предположим, что в A имеются $\mathfrak{F}$-гиперцентральные идеалы, не входящие в M. Выберем среди них идеал H с наименьшей длиной A-главного ряда.

Пусть H/K — главный фактор мультикольца A. Тогда $K \subseteq M$, $H+M=A$, т. е. M не покрывает H/K. Так как $H \subseteq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(A)$, то фактор H/K $\mathfrak{F}$-централен. Значит, ввиду леммы 12.8 M $\mathfrak{F}$-нормальна в A. Это противоречит условию. Следовательно, $Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(A) \subseteq M$. Лемма доказана.

14.3. Лемма. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, K — некоторый идеал мультикольца A. Пусть каждая максимальная подалгебра A, не содержащая K, является $\mathfrak{F}$-нормальной. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $K \cap A^{\mathfrak{F}} \subseteq \varphi(A)$;

2) $K/K \cap \varphi(A) \subseteq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(A/K \cap \varphi(A))$.

Доказательство. Утверждение 1) очевидно. Пусть R/S — главный фактор мультикольца A, причем $R \subseteq K$, $K \cap \varphi(A) \subseteq S$. Тогда поскольку $R \cap A^{\mathfrak{F}} \subseteq K \cap A^{\mathfrak{F}} \subseteq S$, то факторы $R+A^{\mathfrak{F}}/S+A^{\mathfrak{F}}$ и R/S перспективны. Но $A/S+ + A^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, и поэтому ввиду леммы 3.32 фактор $R+A^{\mathfrak{F}}/S+A^{\mathfrak{F}}$ $\mathfrak{F}$-централен в $A/S+A^{\mathfrak{F}}$, а значит, и в A. Применяя теперь лемму 3.28, заключаем, что R/S — $\mathfrak{F}$-центральный главный фактор A. Лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольный класс мультиколец. Обозначим через $\Delta^{\mathfrak{F}}(A)$ идеал D_A, где D — пересечение всех $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных подалгебр мультикольца A. Если в A все максимальные подалгебры $\mathfrak{F}$-нормальны, то положим $\Delta^{\mathfrak{F}}(A)=A$.

14.4. Теорема. *Для любого мультикольца A и любой формации $\mathfrak{F} \neq \varnothing$ имеет место равенство*

$$\Delta^{\mathfrak{F}}(A)/\varphi(A) = Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(A/\varphi(A)).$$

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что $\varphi(A)=\{0\}$. По лемме 14.3, $\Delta^{\mathfrak{F}}(A) \subseteq \subseteq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(A)$. Обратное включение выполняется ввиду леммы 14.2. Теорема доказана.

Будем говорить, что класс мультиколец $\mathfrak{F}$ *сильно насыщен* в классе $\mathfrak{X}$, если всегда из $N/N \cap \varphi(A) \in \mathfrak{F}$, где N — идеал мультикольца $A \in \mathfrak{X}$, следует, что $N \in \mathfrak{F}$.

14.5. Теорема. *Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — полуформация, а $\mathfrak{F}$ — непустая нормально наследственная формация, сильно насыщенная в $\mathfrak{X}$. Тогда $\Delta^{\mathfrak{F}}(A) \in \mathfrak{F}$ для любого мультикольца A из $\mathfrak{X}$.*

Доказательство. Предположим, что теорема не верна и A — мультикольцо с наименьшей длиной главного ряда среди тех мультиколец из $\mathfrak{X}$, относительно которых заключение теоремы не выполняется.

Предположим прежде, что $\varphi(A)=\{0\}$. Тогда ввиду теоремы 14.4 $\Delta^{\mathfrak{F}}(A)=Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(A)$. Пусть L — минимальный идеал A, входящий в $\Delta^{\mathfrak{F}}(A)$. Понятно, что $\Delta^{\mathfrak{F}}(A)/L = \Delta^{\mathfrak{F}}(A/L)$, и поэтому $\Delta^{\mathfrak{F}}(A)/L \in \mathfrak{F}$. Ясно, что L — единственный минимальный идеал A, входящий в $\Delta^{\mathfrak{F}}(A)$. Пусть $C=C_A(L)$. Так как в рассматриваемом случае идеал $N = \Delta^{\mathfrak{F}}(A)$ $\mathfrak{F}$-гиперцентрален, то $L \rtimes (A/C) \in \mathfrak{F}$. Поскольку при этом по условию формация $\mathfrak{F}$ нормально наследственна, то $L \rtimes (C+N/C) \in \mathfrak{F}$. Как показывает проверка, пары $(L,\ C+N/C)$ и $(L,\ N/C\cap N)$ эквивалентны. Значит, по лемме 3.28, $L \rtimes (N/C\cap N) \in \mathfrak{F}$. Так как $C \cap N$ — идеал A, и L — единственный минимальный идеал A, входящий в N, то либо $N \cap C=\{0\}$, либо $L \subseteq N \cap C$. Если имеет место первое, то $L \rtimes N \in \mathfrak{F}$, и поэтому $N=\Delta^{\mathfrak{F}}(A) \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Следовательно, $L \subseteq N \cap C$. Обозначим через M максимальную подалгебру A, не покрывающую L. Тогда $N=(N\cap M)+L$, $C \cap M = M_A$. Значит,

$$C \cap N = L + (C \cap (N \cap M)) = L + (N \cap M_A).$$

Отсюда вытекает, что $C \cap N = L$. Следовательно, $L \rtimes N/L \in \mathfrak{F}$. Легко установить эквивалентность пар $(L,\ N/L)$ и $(L,\ M\cap N)$. Значит, по лемме 3.28 $L+(M\cap N)=N \in \mathfrak{F}$. Снова приходим к противоречию. Таким образом, остается заключить, что $\varphi(A) \neq \{0\}$. Но для $A/\varphi(A)$ теорема верна, и поэтому

$$\Delta^{\mathfrak{F}}(A)/\varphi(A)=\Delta^{\mathfrak{F}}(A/\varphi(A)) \in \mathfrak{F}.$$

Это влечет $\Delta^{\mathfrak{F}}(A) \in \mathfrak{F}$. Этим самым теорема доказана.

14.6. Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация и $\mathfrak{F}$-корадикал $A^{\mathfrak{F}}$ мультикольца A не входит в $\varphi(A)$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

1) *всякая $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подалгебра мультикольца A принадлежит $\mathfrak{F}$ и $A^{\mathfrak{F}}/A^{\mathfrak{F}} \cap \varphi(A)$ — $\mathfrak{F}$-эксцентральный главный фактор A;*

2) *A обладает $\mathfrak{F}$-абнормальными максимальными подалгебрами,* не прин F *причем если D — пересечение всех таких подалгебр, то $D_A=\Delta^{\mathfrak{F}}(A)$.*

Доказательство. Пусть всякая $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подалгебра мультикольца A принадлежит $\mathfrak{F}$. Так как $A^{\mathfrak{F}}$ не входит в $\varphi(A)$, то $A^{\mathfrak{F}} \neq \{0\}$. Пусть $A^{\mathfrak{F}}/H$ — главный фактор мультикольца A. Предположим, что H не содержится в $\varphi(A)$. Тогда $H+M=A$, где M — некоторая максимальная подалгебра мультикольца A. Подалгебра M $\mathfrak{F}$-абнормальна и поэтому принадлежит $\mathfrak{F}$. Значит, $A/H \simeq M/M\cap H \in \mathfrak{F}$, откуда следует $A^{\mathfrak{F}} \subseteq H$. Это невозможно. Следовательно, $H \subseteq \varphi(A)$. Так как при этом

$A^{\varphi} \not\subseteq \varphi(A)$, то $H=\varphi(A) \cap A^{\mathfrak{F}}$. Таким образом, $A^{\mathfrak{F}}/A^{\mathfrak{F}} \cap \varphi(A)$ — нефраттиниев главный фактор мультикольца A. Ясно, что некоторая максимальная подалгебра R из A не покрывает фактор $A^{\mathfrak{F}}/A^{\mathfrak{F}} \cap \varphi(A)$. Так как подалгебра R $\mathfrak{F}$-абнормальна, то по лемме 12.8 главный фактор $A^{\mathfrak{F}}/A^{\mathfrak{F}} \cap \varphi(A)$ $\mathfrak{F}$-эксцентрален, и первое утверждение теоремы доказано.

Пусть A обладает $\mathfrak{F}$-абнормальными максимальными подалгебрами, не принадлежащими $\mathfrak{F}$, и пусть D — пересечение всех таких подалгебр. Очевидно, $\varphi(A) \subseteq \Delta^{\mathfrak{F}}(A) \subseteq$ $\subseteq D_A$. Если $D_A \subseteq \varphi(A)$, то утверждение 2) верно. Пусть D_A не входит в $\varphi(A)$. Тогда $A=M+D_A$, где M — некоторая максимальная подалгебра A. Если $M \in \mathfrak{F}$, то $A/D_A \in \mathfrak{F}$, откуда следует, что D_A содержится только в $\mathfrak{F}$-нормальных максимальных подалгебрах, что невозможно. Поэтому M не входит в $\mathfrak{F}$ и является $\mathfrak{F}$-нормальной. Итак, всякая максимальная подалгебра, не содержащая D_A, является $\mathfrak{F}$-нормальной, откуда следует, что $D_A \subseteq$ $\subseteq \Delta^{\mathfrak{F}}(A)$. Следовательно, $D_A=\Delta^{\mathfrak{F}}(A)$, и теорема доказана.

Пересечение $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных подгрупп конечных групп. Изучение пересечений максимальных подгрупп конечных групп основывается на следующей лемме и ее модификациях.

14.7. Лемма Фраттини. *Пусть K — нормальная подгруппа конечной группы G, $p \in \pi(K)$ и P — некоторая силовская p-подгруппа из K. Тогда $A=KN_G(P)$.*

Пусть p — некоторое простое число, G — конечная группа. Обозначим через $\Phi_p(G)$ пересечение всех тех максимальных подгрупп из G, индексы которых не делятся на p. Если в группе G такие максимальные подгруппы отсутствуют, то полагаем $\Phi_p(G)=G$.

14.8. Лемма. *Для любой конечной группы G имеет место $\Phi_p(G)/O_p(G)=\Phi(G/O_p(G))$.*

Доказательство. Нетрудно заметить, что $O_p(G) \subseteq$ $\subseteq \Phi_p(G)$. Обозначим через P некоторую p-силовскую подгруппу из $\Phi_p(G)$. Тогда по лемме 14.7 $G=\Phi_p(G)N_G(P)$. Предположим, что $N_G(P)$ собственная подгруппа группы G. Тогда в G найдется максимальная подгруппа M такая, что $\Phi_p(G) \not\subseteq M$ и $N_G(P) \subseteq M$. Ясно, что индекс $N_G(P)$ в G не делится на p. Следовательно, $\Phi_p(G) \subseteq M$. Получили противоречие. Итак, P — нормальная подгруппа группы G. Отсюда следует, что число $|\Phi_p(G)/O_p(G)|$ не делится на p. Очевидно, $\Phi(G/O_p(G)) \subseteq \Phi_p(G)/O_p(G)$. Если $\Phi(G/O_p(G)) \subset$ $\subset \Phi_p(G)/O_p(G)$, то в G найдется максимальная подгруппа H такая, что $O_p(G) \subseteq H$ и $H\Phi_p(G)=G$. Следовательно, $|G:H|=|\Phi_p(G):\Phi_p(G) \cap H|$ не делится на p. Отсюда получаем, что $\Phi_p(G) \subseteq H$, что противоречит определению подгруппы H. Значит, $\Phi(G/O_p(G)) = \Phi_p(G)/O_p(G)$. Лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольный класс групп. Тогда через $\Delta_p^{\mathfrak{F}}(G)$ обозначим пересечение всех тех $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных подгрупп конечной группы G, индексы которых не делятся на данное простое число p. Если же каждая максимальная подгруппа из G либо $\mathfrak{F}$-нормальна, либо имеет индекс в G, делящийся на p, то положим $\Delta_p^{\mathfrak{F}}(G) = G$.

14.9. Теорема. *Для любой формации $\mathfrak{F}$ и всякой конечной группы G имеет место $\Delta_p^{\mathfrak{F}}(G/O_p(G)) = \Delta^{\mathfrak{F}}(G/O_p(G))$.*

Доказательство. Предположим, что теорема не верна и G — группа наименьшего порядка среди групп, относительно которых утверждение теоремы не выполняется. Предположим, что $P = O_p(G) \neq \{1\}$. Тогда для G/P утверждение теоремы верно. Следовательно,

$$\Delta_p^{\mathfrak{F}}(G/P)/O_p(G/P) = \Delta^{\mathfrak{F}}((G/P)/O_p(G/P)).$$

Но $O_p(G/P) = \{1\}$ и, кроме того, $\Delta_p^{\mathfrak{F}}(G/P) = \Delta_p^{\mathfrak{F}}(G)/P$. Значит, $\Delta_p^{\mathfrak{F}}(G/P) = \Delta^{\mathfrak{F}}(G/P)$.

Пусть $O_p(G) = \{1\}$. Тогда ввиду леммы 14.8 $\Phi_p(G) = \Phi(G)$. Значит, $\Delta_p^{\mathfrak{F}}(G) \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi(G)$. Пусть K/N — главный фактор группы G, причем $K \subseteq \Delta_p^{\mathfrak{F}}(G)$, $\Phi(G) \subseteq N$. Тогда $K \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi(G) \subseteq N$. Следовательно, $N(K \cap G^{\mathfrak{F}}) = K \cap NG^{\mathfrak{F}}$. Значит, факторы $KG^{\mathfrak{F}}/NG^{\mathfrak{F}}$ и K/N перспективны. Но $G/NG^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, и поэтому ввиду леммы 3.32 фактор $KG^{\mathfrak{F}}/NG^{\mathfrak{F}}$ $\mathfrak{F}$-централен. Следовательно, ввиду лемм 3.27 и 3.28 $\mathfrak{F}$-централен и фактор K/N. Таким образом, $\Delta_p^{\mathfrak{F}}(G)/\Phi(G)$ — $\mathfrak{F}$-гиперцентральная нормальная подгруппа группы $G/\Phi(G)$. Поэтому $\Delta_p^{\mathfrak{F}}(G)/\Phi(G) \subseteq Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G/\Phi(G))$. С другой стороны, ввиду леммы 14.2

$$Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G/\Phi(G)) \subseteq \Delta_p^{\mathfrak{F}}(G)/\Phi(G).$$

Значит,

$$\Delta_p^{\mathfrak{F}}(G)/\Phi(G) = Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G/\Phi(G)).$$

По теореме 14.4

$$Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G/\Phi(G)) = \Delta^{\mathfrak{F}}(G)/\Phi(G).$$

Следовательно,

$$\Delta_p^{\mathfrak{F}}(G)/\Phi(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}(G)/\Phi(G),$$

т. е. $\Delta_p^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}(G)$. Теорема доказана.

Sн-замкнутая

14.10. Следствие. *Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторая локальная формация конечных групп, содержащая все конечные нильпотентные группы. Тогда для любой конечной группы G имеет место $\Delta_p^{\mathfrak{F}}(G)/O_p(G) \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Ввиду теоремы 4.2 книги [107] формация $\mathfrak{F}$ сильно насыщена в классе конечных групп. Значит,

$$\Delta_p^{\mathfrak{F}}(G/O_p(G)) = \Delta^{\mathfrak{F}}(G/O_p(G)) \in \mathfrak{F}.$$

14.11. Теорема. *Пусть p и q — различные простые числа. Тогда для любой формации $\mathfrak{F}$ и всякой конечной группы G имеет место*

$$\Delta_p^{\mathfrak{F}}(G) \cap \Delta_q^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}(G).$$

Доказательство. Очевидно,

$$\Delta^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq \Delta_p^{\mathfrak{F}}(G) \cap \Delta_q^{\mathfrak{F}}(G).$$

Пусть

$$\Delta^{\mathfrak{F}}(G) \subset K = \Delta_p^{\mathfrak{F}}(G) \cap \Delta_q^{\mathfrak{F}}(G).$$

Тогда в G найдется $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа M такая, что $G = MK$. Если $|G:M|$ не делится на $t \in \{p, q\}$, то $\Delta_t^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq M$. Следовательно, $KM = M$, что невозможно. Значит, индекс M в G делится одновременно на p и на q.

Если $O_p(G) = \{1\}$, то по теореме 14.9 $\Delta_p^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}(G)$, и поэтому $K \subseteq M$, что противоречит определению подгруппы K. Значит, $O_p(G) \subseteq M$. Так как q делит $|G:M|$, то $O_p(G) \subseteq M$. По теореме 14.9

$$\Delta_p^{\mathfrak{F}}(G)/O_p(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}(G/O_p(G)) \subseteq M/O_p(G).$$

Отсюда следует, что $\Delta_p^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq M$. Снова пришли к противоречию. Таким образом, остается заключить, что

$$\Delta^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta_p^{\mathfrak{F}}(G) \cap \Delta_q^{\mathfrak{F}}(G).$$

Теорема доказана.

как этот § связан с F-абнормальными группами авт-о

§ 15. $\mathfrak{F}$-радикал конечной группы

Все рассматриваемые в данном параграфе классы предполагаются состоящими лишь из конечных групп.

15.1. Формацию $\mathfrak{F}$ называют *радикальной*, если $\mathfrak{F}$ является радикальным классом, т. е. удовлетворяет следующим двум условиям: 1) $\mathfrak{F}$ нормально наследственна; 2) из

$G = AB$, $A \lhd G$, $B \lhd G$, $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$ всегда следует $G \in \mathfrak{F}$. Пустое множество по определению является радикальной формацией. Если $\mathfrak{F} \neq \varnothing$, то через $G_{\mathfrak{F}}$ обозначают $\mathfrak{F}$-радикал группы G, т. е. произведение всех тех нормальных подгрупп из G, которые принадлежат $\mathfrak{F}$. Экран называют *радикальным*, если все его значения являются радикальными формациями.

15.2. Пусть f — экран, H/K — некоторый нормальный фактор группы G. Если $f(H/K) \neq \varnothing$, то H/K будем называть *f^+-фактором*. Будем говорить, что подгруппа A из G действует *f-тождественно* на H/K (или A f-централизует фактор H/K), если $A/C_A(H/K) \in f(H/K)$, где $C_A(H/K) = C_G(H/K) \cap A$. Нормальная подгруппа K группы G называется *f-гиперцентральной* в G, если G действует f-тождественно на каждом G-главном факторе подгруппы K.

15.3. Напомним, что композиционный экран может быть построен следующим образом. Каждой простой (абелевой или неабелевой) группе H сопоставляем некоторую (возможно, пустую) формацию $f(H)$. Затем для любой группы $G \neq \{1\}$ полагаем $f(G) = \cap f(H/K)$, где H/K пробегает все композиционные факторы G. Пусть еще $f(\{1\}) = \mathfrak{G}$ — класс всех групп. Построенная функция f и есть композиционный экран, причем композиционная формация $\langle f \rangle$ непуста, поскольку содержит единичную группу. Через $f(p)$ обозначается значение f на неединичных p-группах (p — простое число).

15.4. Лемма. *Пусть f — композиционный экран, $L \neq \{1\}$ — характеристически простая f-гиперцентральная нормальная подгруппа группы G. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:* 1) *L — p-группа*, $G/C_G(L) \in \mathfrak{N}_p f(p)$; 2) *$G$ действует f-тождественно на L.*

Доказательство. Ввиду условия G индуцирует в каждом G-главном факторе L_{i-1}/L_i группы L группу автоморфизмов, принадлежащую $f(L)$. Поэтому $G/D \in f(L)$, где $D = \bigcap_i C_G(L_{i-1}/L_i)$. Пусть $C = C_G(L)$. Группу D/C можно рассматривать как стабильную группу автоморфизмов группы L, причем, как известно (см. лемму 9.3 из [107]), $\pi(D/C) \subseteq \pi(F(L))$. Если L — p-группа, то D/C входит в формацию p-групп $\mathfrak{N}_p$, а если L неабелева, то $F(L) = 1$ и $D = C$. Лемма доказана.

Следствием леммы 15.4 и леммы 8.5 является тот факт, что если $M \lhd G$ и $M \in \langle f \rangle$, где f — композиционный экран, то M действует f-тождественно на каждом своем G-главном факторе.

Нам понадобится следующий результат, вытекающий из лемм 3.11 и 3.12 книги [107].

15.5. Лемма. *Пусть* f_1 *и* f_2 — *композиционные экраны формации* $\mathfrak{F}$ *и для некоторого простого числа* p *имеет место* $f_1(p) \cup f_2(p) \subseteq \mathfrak{F}$. *Тогда* $\mathfrak{N}_p f_1(p) = \mathfrak{N}_p f_2(p) \subseteq \mathfrak{F}$.

Экран f формации $\mathfrak{F}$ назовем *полувнутренним*, если из $f(H) \neq \mathfrak{G}$ всегда следует $f(H) \subseteq \mathfrak{F}$. Композиционный полувнутренний экран f формации $\mathfrak{F}$ будем называть ее *максимальным полувнутренним композиционным экраном*, если $h \leqslant f$ для любого полувнутреннего композиционного экрана h формации $\mathfrak{F}$.

15.6. Лемма. *Пусть* $\mathfrak{F}$ — *композиционная формация. Тогда* $\mathfrak{F}$ *имеет максимальный полувнутренний композиционный экран* f, *причем для любой простой группы* H *справедливо одно из следующих трех утверждений*: 1) $|H| = p$ — *простое число и* $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$; 2) $f(H) = \mathfrak{F}$; 3) $f(H) = \mathfrak{G}$.

Доказательство. Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — совокупность всех полувнутренних композиционных экранов формации $\mathfrak{F}$. Пусть Σ — множество простых групп, составленное по следующему правилу: простая группа H содержится в Σ, если $f_i(H) = \mathfrak{G}$ для некоторого $i \in I$. Тогда по лемме 15.5 для любых i, j из I и любой не входящей в Σ простой абелевой группы порядка p имеет место $\mathfrak{N}_p f_i(p) = \mathfrak{N}_p f_j(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть теперь f — такой композиционный экран, что для любой простой группы H выполняется одно из условий: 1) если $H \in \Sigma$, то $f(H) = \mathfrak{G}$; 2) если H неабелева и $H \notin \Sigma$, то $f(H) = \mathfrak{F}$; 3) если H не содержится в Σ и имеет простой порядок p, то $f(H) = \mathfrak{N}_p f_i(p)$, $i \in I$. Ясно, что $f_i \leqslant f$ для любого $i \in I$. Для завершения доказательства достаточно установить, что $\langle f \rangle = \mathfrak{F}$.

Предположим, что $\mathfrak{F} \subset \langle f \rangle$, и пусть G — группа наименьшего порядка из $\langle f \rangle \setminus \mathfrak{F}$. Тогда $G^{\mathfrak{F}} = L$ — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. Пусть H — композиционный фактор L. Если $H \in \Sigma$, то $f(H) = f(L) = f_i(H) = \mathfrak{G}$ для некоторого $i \in I$, т. е. L f_i-центральна в G, что невозможно. Если H неабелева и $H \notin \Sigma$, то $C_G(L) = \{1\}$, $f(L) = \mathfrak{F}$, а потому из $G \in \langle f \rangle$ следует $G \in \mathfrak{F}$. Если $H \notin \Sigma$, $|H| = p$, то $f(L) = \mathfrak{N}_p f_i(p)$, $i \in I$, а это ввиду леммы 8.5 означает, что L f_i-центральна в G. Лемма доказана.

15.7. Лемма. *Пусть* h — *полувнутренний композиционный экран формации* $\mathfrak{F}$. *Справедливы следующие утверждения*:

1) *если* h *радикален, то формация* $\mathfrak{F}$ *радикальна*;

2) *если* $\mathfrak{F}$ *радикальна, то ее максимальный полувнутренний композиционный экран* f *радикален, причем для*

любого простого p формация $\mathfrak{N}_p h(p)$ радикальна и либо $f(p)=\mathfrak{G}$, либо $f(p)=\mathfrak{N}_p h(p)$.

Доказательство. Пусть экран h радикален. По лемме 2.17 формация $\mathfrak{F}$ нормально наследственна. Если $G=AB$, где A и B нормальны в G и принадлежат $\mathfrak{F}$, то $G/A\cap B\in\mathfrak{F}$. Пусть $A\cap B\neq\{1\}$, L — содержащаяся в $A\cap B$ минимальная нормальная подгруппа группы G. Согласно 15.4,

$$AC/C\in h(L),\qquad BC/C\in h(L),$$

где $C=C_G(L)$. Из радикальности $h(L)$ теперь получаем $ABC/C\in h(L)$. А так как по индукции $G/L\in\mathfrak{F}$, то и $G\in\mathfrak{F}$. Утверждение 1) доказано.

Докажем 2). Пусть $\mathfrak{F}$ радикальна и p — такое простое число, что $h(p)\subseteq\mathfrak{F}$. Тогда ввиду 15.5 $\mathfrak{N}_p h(p)\subseteq\mathfrak{F}$. Нам необходимо установить, что $\mathfrak{N}_p h(p)$ радикальна. Пусть $M=A_1A_2$, $A_i\lhd G$, $A_i\in\mathfrak{N}_p h(p)$, $i=1, 2$. Пусть H — группа порядка p. Рассмотрим регулярное сплетение $\Gamma=H\wr M=K\times M$. Тогда $KA_i\subseteq\mathfrak{N}_p h(p)\subseteq\mathfrak{F}$, $i=1, 2$. Ввиду радикальности $\mathfrak{F}$ получаем $\Gamma=(KA_1)(KA_2)\in\mathfrak{F}$. Значит, K h-гиперцентральна в Γ, и по лемме 15.4 $\Gamma/C_\Gamma(K)\in\mathfrak{N}_p h(p)$. Отсюда и из $\Gamma/C_\Gamma(K)\simeq M$ получаем $M\in\mathfrak{N}_p h(p)$.

Пусть теперь $N\lhd G\in\mathfrak{N}_p h(p)$, $|H|=p$. Рассмотрим сплетение $H\wr G=K\times G$. Так как $KG\in\mathfrak{N}_p h(p)\in\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ нормально наследственна, то $KN\in\mathfrak{F}$. Ввиду леммы 15.4 $KN/C_{KN}(K)\in\mathfrak{N}_p h(p)$. Так как $K=C_{KN}(K)$, то $KN/K\simeq\simeq N\in\mathfrak{N}_p h(p)$. Лемма доказана.

15.8. Лемма. *Пусть f_1 и f_2 — полувнутренние композиционные экраны формации $\mathfrak{F}$, H/K — некоторый главный f_2^+-фактор группы G и $f_1(H/K)\subseteq\mathfrak{F}$. Если нормальная подгруппа A группы G действует f_1-тождественно на H/K, то A действует и f_2-тождественно на H/K.*

Доказательство. Пусть $C=C_G(H/K)$. Если H/K — p-группа, то результат следует из леммы 8.5 и равенства $\mathfrak{N}_p f_1(p)=\mathfrak{N}_p f_2(p)$, которое выполняется при $f_2(p)\neq\mathfrak{G}$. Пусть H/K — неабелева группа. Тогда H/K и HC/C перспективны. Поэтому из справедливости леммы для G/C вытекает ее справедливость и для G. Не ограничивая общности, положим $C=K=\{1\}$. По условию $A\in f_1(H)\subseteq\mathfrak{F}$. Если $A\cap H=1$, то $A\subseteq C=\{1\}$, и доказывать нечего. Пусть $A\supseteq H$. Тогда по 15.4 H f_2-центральна в A. Лемма доказана.

15.9. Лемма. *Пусть h — полувнутренний композиционный экран радикальной формации $\mathfrak{F}$, H/K — некоторый главный h^+-фактор группы G. Пусть A_1 и A_2 — некоторые* *нормальные подгруппы группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если A_1 и A_2 действуют h-тождественно на H/K, то и A_1A_2 действует h-тождественно на H/K;*

2) *если A_1 действует h-тождественно на H/K и $A_1 \supseteq A_2$, то A_2 действует h-тождественно на H/K.*

Доказательство. Пусть $C = C_G(H/K)$. Если $h(H/K) = \mathfrak{G}$, то лемма верна. Пусть $h(H/K) \subseteq \mathfrak{F}$.

Пусть $A_1C/C \in h(H/K)$. Если H/K — p-группа, то по лемме 15.7 формация $\mathfrak{N}_p h(p)$ радикальна. Поэтому при $A_2C/C \in h(p)$ выполняется $A_1A_2C/C \in \mathfrak{N}_p h(p)$, а при $A_1 \supseteq A_2$ имеет место $A_2C/C \in \mathfrak{N}_p h(p)$. Применяя лемму 8.5, получаем, что в этом случае лемма верна. Пусть теперь H/K неабелев. Поскольку H/K и HC/C перспективны, то, не ограничивая общности, положим $C = \{1\}$. Если $A_i \cap H = \{1\}$, то $A_i \subseteq C = \{1\}$, и лемма очевидна. Пусть $A_i \supseteq H$, $i = 1, 2$. Если $A_2 \in h(H/K)$ или $A_2 \subseteq A_1$, то из радикальности $\mathfrak{F}$ следует соответственно $A_1A_2 \in \mathfrak{F}$ или $A_2 \in \mathfrak{F}$. Теперь, ввиду $H \subseteq A_2$, остается применить 15.4. Лемма доказана.

Пусть f — полувнутренний композиционный экран радикальной формации $\mathfrak{F}$, H/K — некоторый главный f^+-фактор группы G. Обозначим через $C^f_G(H/K)$ произведение всех тех нормальных подгрупп группы G, которые действуют f-тождественно на H/K. Подгруппу $C^f_G(H/K)$ назовем f-централизатором фактора H/K в группе G.

15.10. Лемма. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *$C^f_G(H/K)$ действует f-тождественно на H/K;*

2) *если $N \triangleleft G$ и $N \subseteq C^f_G(H/K)$, то N f-централизует H/K;*

3) *если H/K неабелев, $f(H/K) \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ разрешима, то $C^f_G(H/K) = C_G(H/K)$.*

Доказательство. Утверждения 1) и 2) вытекают из леммы 15.9. Докажем 3). Пусть H/K неабелев, $f(H/K) \subseteq \mathfrak{F}$ и все группы из $\mathfrak{F}$ разрешимы. Не ограничивая общности, будем считать, что $C_G(H/K) = \{1\}$. Пусть $A = C^f_G(H) \neq \{1\}$. Тогда $H \subseteq A \subseteq f(H) \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$. А это противоречит неабелевости H. Лемма доказана.

15.11. Теорема. *Пусть f — полувнутренний композиционный экран радикальной формации $\mathfrak{F}$, $\{H_i/K_i \mid i \in I\}$ — совокупность всех главных f^+-факторов группы G. Тогда*

$$G_{\mathfrak{F}} \subseteq D = \bigcap_{i \in I} C^f_G(H_i/K_i),$$

причем в группе D все ее главные f^+-факторы f-центральны.

Замечание: в случае $I = \varnothing$ полагаем $D = G$.

Доказательство. По лемме 15.10, D f-централизует H_i/K_i для любого $i\in I$. Таким образом, в группе D все ее G-главные f^+-факторы f-центральны. Поскольку один из главных рядов группы D мы можем получить уплотнением ее G-главного ряда, то мы и получаем, что в D все ее главные f^+-факторы f-центральны.

Покажем теперь, что $G_{\mathfrak{F}}$ f-централизует H_i/K_i для любого $i\in I$. Очевидно, $G_{\mathfrak{F}}K_i\cap H_i$ совпадает либо с H_i, либо с K_i. Если $G_{\mathfrak{F}}K_i\cap H_i=K_i$, то $G_{\mathfrak{F}}\subseteq C_G(H_i/K_i)$. Если же $G_{\mathfrak{F}}K_i\supseteq H_i$, то, применяя 15.4 к цепи

$$G/K_i\supseteq G_{\mathfrak{F}}K_i/K_i\supseteq H_i/K_i,$$

видим, что H_i/K_i f-центральна в $G_{\mathfrak{F}}K_i/K_i$, а значит, $G_{\mathfrak{F}}$ f-централизует H_i/K_i. Теорема доказана.

15.12. Следствие. *Пусть f — полувнутренний композиционный экран радикальной формации $\mathfrak{F}$. Пусть значение f непусто на каждом главном факторе группы G. Тогда $G_{\mathfrak{F}}=\bigcap C_G^f(H/K)$, где H/K пробегает все главные факторы группы G.*

15.13. Для фиксированного простого числа p формации всех p-нильпотентных групп является радикальной локальной формацией и имеет такой локальный экран f, что $f(H)=\{1\}$, если p делит $|H|$, а если p не делит $|H|$, то $f(H)=\mathfrak{G}$. Ясно, что из следствия 15.12 вытекает такой хорошо известный факт: для любой группы G ее p-нильпотентный радикал $\mathrm{F}_p(G)$ совпадает с пересечением централизаторов в G всех тех главных факторов G, порядки которых делятся на p.

Пусть f — максимальный полувнутренний композиционный экран формации $\mathfrak{F}$. И пусть f_1 — такой экран, что $f_1(H)=f(H)\cap\mathfrak{F}$ для любой группы H. Тогда f_1 — максимальный внутренний композиционный экран формации $\mathfrak{F}$.

15.14. Теорема. *Пусть f — максимальный внутренний композиционный экран радикальной формации $\mathfrak{F}$, и пусть $D=\bigcap C_G^f(H/K)$, где H/K пробегает все главные f^+-факторы группы G. Тогда $G_{\mathfrak{F}}\subseteq D$, причем $D^{\mathfrak{F}}$ является разрешимой $\pi'(\mathfrak{F}_0)$-группой, где $\mathfrak{F}_0=\mathfrak{F}\cap\mathfrak{N}$.*

Доказательство. По теореме 15.11 $G_{\mathfrak{F}}\subseteq D$. По лемме 15.6 каждый главный фактор, не являющийся f^+-фактором, является абелевой $\pi'(\mathfrak{F}_0)$-группой. Применяя теорему 15.11 и тот факт, что f-центральные главные факторы централизуются $\mathfrak{F}$-корадикалом, получаем, что каждый D-главный фактор группы $D^{\mathfrak{F}}$ либо является абелевой $\pi'(\mathfrak{F}_0)$-группой, либо f-централен в D и централизуется группой $D^{\mathfrak{F}}$. Допустим, что существует D-главный ряд

$$D^{\mathfrak{F}} \supset \ldots \supset H \supset K \supset L \supset \ldots \supset \{1\},$$

в котором H/K — абелева $\pi'(\mathfrak{F}_0)$-группа, а K/L — f-централен в D. Тогда K/L — абелева $\pi(\mathfrak{F}_0)$-группа и $K/L \subseteq Z(D^{\mathfrak{F}}/L)$. Поэтому

$$H/L = A/L \times K/L,$$

где $A \lhd D$, причем $A/L \simeq H/K$. Таким образом, мы можем перейти к D-главному ряду

$$D^{\mathfrak{F}} \supset \ldots \supset H \supset A \supset L \supset \ldots \supset \{1\},$$

в котором H/A является f-центральным главным фактором группы D, а A/L — абелева $\pi'(\mathfrak{F}_0)$-группа. Такой процесс замены через определенное число шагов приведет к появлению f-центрального в D главного фактора вида $D^{\mathfrak{F}}/R$, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что каждый D-главный фактор группы $D^{\mathfrak{F}}$ должен быть абелевой $\pi'(\mathfrak{F}_0)$-группой.

Теорема доказана.

15.15. Следствие. *Пусть f — максимальный внутренний композиционный экран радикальной формации $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ — формация всех разрешимых $\pi'(\mathfrak{F}_0)$-групп, где $\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$. Если $G_{\mathfrak{H}} = \{1\}$, то $G_{\mathfrak{F}} = \bigcap C_G^f(H/K)$, где H/K пробегает все главные f^+-факторы группы G.*

15.16. Следствие. *Пусть f — максимальный внутренний композиционный экран радикальной формации $\mathfrak{F}$, причем $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{N}$. Тогда для любой группы G имеет место равенство $G_{\mathfrak{F}} = \bigcap C_G^f(H/K)$, где H/K пробегает все главные факторы группы G.*

15.17. Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — радикальная композиционная формация. Тогда $\mathfrak{F}$-радикал группы $C_G(G_{\mathfrak{F}})G_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{F}}$ является единичной группой.*

Доказательство. Пусть $C = C_G(G_{\mathfrak{F}})$. Нам необходимо доказать, что группа $CG_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{F}}$ имеет единичный $\mathfrak{F}$-радикал. Предположим, что это не так. Пусть $T/G_{\mathfrak{F}}$ — неединичный $\mathfrak{F}$-радикал группы $CG_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{F}}$. Очевидно, $T = (C \cap T)G_{\mathfrak{F}}$.

Пусть f — максимальный внутренний композиционный экран формации $\mathfrak{F}$. Рассмотрим главный ряд группы T:

$$T \supset \ldots \supset G_{\mathfrak{F}} \supset \ldots \supset \{1\}. \qquad (*)$$

Очевидно, $T_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}$. Согласно следствию 15.12, имеет место равенство

$$T_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}} = \bigcap C_T^f(H/K), \qquad (**)$$

где H/K пробегает все главные факторы ряда (*). Заметим теперь, что ввиду $T/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ при $K \supseteq G_{\mathfrak{F}}$ имеет место $C_T^f(H/K) = T$. Если же $H \subseteq G_{\mathfrak{F}}$, то $(C \cap T) \subseteq C_T^f(H/K)$, а поскольку из (**) вытекает $G_{\mathfrak{F}} \subseteq C_T^f(H/K)$, то мы получаем следующее:

$$(C \cap T)\, G_{\mathfrak{F}} = T \subseteq C_T^f(H/K).$$

Следовательно, $C_T^f(H/K) = T$ для любого главного фактора H/K группы T. Отсюда и из (**) получаем $T = T_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}$. Теорема доказана.

Пусть π — некоторое (возможно, пустое) множество простых чисел. Максимальный внутренний композиционный экран f формации $\mathfrak{N}_\pi$ всех нильпотентных π-групп имеет следующие значения: 1) если $p \in \pi$, то $f(p) = \mathfrak{N}_p$; 2) если $p \notin \pi$, то $f(p) = \varnothing$; 3) если H — простая неабелева группа, то $f(H) = \mathfrak{N}_\pi$. Поэтому из теоремы 15.14, учитывая лемму 15.10, получаем следующий результат.

15.18. Теорема. *Пусть D — пересечение централизаторов всех главных π-факторов и неабелевых главных факторов группы G. Тогда D совпадает с $\mathfrak{H}$-радикалом группы G, где $\mathfrak{H}$ — формация всех разрешимых π-нильпотентных групп.*

Напомним, что группа называется *π-нильпотентной*, если она является расширением π'-группы при помощи нильпотентной π-группы.

15.19. Следствие. *Пусть $\pi = \pi(\mathrm{F}(G)) \neq \varnothing$. Тогда $\mathrm{F}(G)$ совпадает с пересечением централизаторов всех главных π-факторов и неабелевых главных факторов группы G.*

Еще одно следствие теоремы 15.18 получается при $\pi = \varnothing$.

15.20. Следствие. *Разрешимый радикал неразрешимой группы G совпадает с пересечением централизаторов всех неабелевых главных факторов группы G.*

Группа G называется *p-разложимой*, если $G = A \times B$, где A — p-группа, B — p'-группа. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация всех p-разложимых групп. Известно, что $\mathfrak{F}$ — радикальная локальная формация. Поэтому из теоремы 15.17 получается в качестве следствия такой результат.

15.21. Теорема. *Пусть R — произведение всех p-разложимых нормальных подгрупп p-разрешимой группы G. Тогда $C_G(R) \subseteq R$.*

Рассмотрим формацию $\mathfrak{N}^*$ всех квазинильпотентных групп. Группа M называется *квазинильпотентной*, если $C_M(H/K)H=M$ для любого главного фактора H/K группы M. Через $F^*(G)$ обозначают $\mathfrak{N}^*$-радикал группы G.

Нетрудно заметить, что если S — неабелева простая группа, то формация $\operatorname{form} S$ радикальна и состоит из прямых произведений групп, изоморфных S. Можно показать, что $\mathfrak{N}^*$ имеет радикальный композиционный экран f такой, что $f(p)=\mathfrak{G}$ для любого простого p, $f(S)=\operatorname{form} S$ для любой неабелевой простой группы S.

Так как $\mathfrak{N}^*$ — радикальная композиционная формация, то из теоремы 15.17 в качестве следствия вытекает следующий известный результат.

15.22. Теорема. *Для любой группы G имеет место $C_G(F^*(G))\subseteq F(G)$.*

Пусть $R=F^*(G)$. Хорошо известно, что $R=F(G)D$, где $D=R^{\mathfrak{N}}=D'$, $F(G)\cap D=Z(D)$, $[F(G),\ D]=\{1\}$ и $D/Z(D)$ — прямое произведение неабелевых простых групп. Кроме того, $Z(D)\subseteq Z(R)\cap R'\subseteq \Phi(R)\subseteq\Phi(G)$. В частности, если $\Phi(G)=\{1\}$, то $F^*(G)$ совпадает с цоколем группы G. Мы используем этот факт для вывода следующего результата из теоремы 15.22.

15.23. Теорема. *Пусть $\tilde{F}(G)/\Phi(G)$ — цоколь группы $G/\Phi(G)$. Тогда $C_G(\tilde{F}(G))\subseteq F(G)$.*

Доказательство. Пусть $\tilde{F}(G)=R$, $C=C_G(R)$. Так как $G/\Phi(G)$ и $R/\Phi(G)$ имеют единичную подгруппу Фраттини, то $F^*(G/\Phi(G))=R/\Phi(G)$. Ввиду теоремы 15.22 $C\Phi(G)/\Phi(G)\subseteq F(G/\Phi(G))=F(G)/\Phi(G)$. Но тогда $C\subseteq F(G)$ ввиду теоремы 4.2 из [107]. Теорема доказана.

§ 16. Два приложения $\mathfrak{F}$-нормализаторов

Все рассматриваемые в данном параграфе классы групп предполагаются входящими в класс конечных групп $\mathfrak{G}$.

Применение $\mathfrak{F}$-нормализаторов для нахождения $\mathfrak{F}$-проекторов.

16.1. Лемма. *Пусть f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$, и пусть $G=HP$, где $H\in\mathfrak{F}$, а P — некоторая нормальная p-подгруппа G. Тогда подгруппа $HC_P(H^{f(p)})$ является $\mathfrak{F}$-проектором группы G.*

Доказательство. Пусть $C=C_P(H^{f(p)})$. Покажем, что $HC\in\mathfrak{F}$. Заметим прежде, что поскольку для любого $h\in H$ имеет место $C^h=C_{P^h}((H^{f(p)})^h)$ и P нормальна в G, то C — нормальная подгруппа в CH. Понятно также, что нормальна в HC и подгруппа $H^{f(p)}$. Факторгруппа $HC/H^{f(p)}$ содержит нормальную p-подгруппу $CH^{f(p)}/H^{f(p)}$, причем

$$(HC/H^{f(p)})/(CH^{f(p)}/H^{f(p)}) \simeq HC/H^{f(p)}C \simeq \\ \simeq H/(H \cap C)\, H^{f(p)} \in f(p).$$

Значит, $HC/H^{f(p)} \in \mathfrak{N}_p f(p)$. По следствию 8.6 $\mathfrak{N}_p f(p) = f(p)$, и поэтому $HC/H^{f(p)} \in f(p)$. Легко видеть, что $H^{f(p)} \subseteq \mathrm{F}_p(HC)$. Следовательно, $HC/\mathrm{F}_p(HC) \in f(p)$.

Пусть q — произвольное число из $\pi(HC) \setminus \{p\}$. Так как C — p-группа, то $\mathrm{F}_q(HC) = \mathrm{F}_q(H)\,C$. Следовательно,

$$HC/\mathrm{F}_q(HC) = HC/\mathrm{F}_q(H)\,C \simeq H/(H \cap C)\,\mathrm{F}_q(H).$$

Так как $H \in \mathfrak{F}$, то $H/\mathrm{F}_q(H) \in f(p)$. Значит, $HC/\mathrm{F}_q(HC) \in f(p)$. Итак, $HC/F_t(HC) \in f(t)$ при любом $t \in \pi(HC)$ и поэтому $HC \in \mathfrak{F}$.

Пусть теперь $HC \subseteq F \in \mathfrak{F}$. Так как $G = PH$, то $F = H(F \cap P)$. С другой стороны, поскольку $F \in \mathfrak{F}$, то $F/\mathrm{O}_{p'}(F) \in f(p)$. Следовательно,

$$F/\mathrm{O}_{p'}(F)(F \cap P) = H(F \cap P)/\mathrm{O}_{p'}(F)(F \cap P) \simeq \\ \simeq H/(H \cap F \cap P)\,\mathrm{O}_{p'}(F) = H/(F \cap P)\,\mathrm{O}_{p'}(F) \in f(p),$$

и поэтому $H^{f(p)} \subseteq (F \cap P)\,\mathrm{O}_{p'}(F)$. Но $H^{f(p)}$ — p'-группа. Значит, $H^{f(p)} \subseteq \mathrm{O}_{p'}(F)$. Таким образом, $F \cap P \subseteq C$. Следовательно, $HC = F$. Последнее в силу теоремы 11.22 означает, что HC — $\mathfrak{F}$-проектор G. Лемма доказана.

16.2. Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, H — $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G. Тогда если $\mathfrak{F}$-корадикал группы G p-разрешим для всякого простого числа $p \in \pi(\mathfrak{F}) \cap \pi(|G:H|)$, то в группе G существует $\mathfrak{F}$-проектор, содержащий H.*

Доказательство. Пусть $\omega = \pi(\mathfrak{F}) \cap \pi(|G:H|)$ и

$$G = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_t = H, \quad t \geqslant 0,$$

где M_i — максимальная $\mathfrak{F}$-критическая подгруппа группы M_{i-1}, $i = 1, \ldots, t$. Ввиду леммы 4.4 книги [107] в M_{i-1} найдется такая $\mathfrak{F}$-предельная нормальная подгруппа R_i, что $M_{i-1} = M_i R_i$ и $\pi(R_i) = \pi(R_i/R_i \cap \Phi(H_{i-1}))$. По условию группа $G^{\mathfrak{F}}$ ω-разрешима. Значит, каждый G-главный фактор из $G^{\mathfrak{F}}$ является либо p-группой для некоторого $p \in \omega$, либо ω'-группой. Так как порядок каждого главного фактора группы R_i делит порядок некоторого G-главного фактора из $G^{\mathfrak{F}}$, то R_i является либо p-группой для некоторого $p \in \omega$, либо ω'-группой.

Пусть f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Положим $F_1=H$. При $i\in\{1, \ldots, t+1\}$ положим

$$F_i=\begin{cases} F_i C_{R_{t-i+2}}(F_{i-1}^{f(p)}), & \text{если } R_{t-i+2} \text{ — } \omega\text{-группа} \\ F_{i-1}, & \text{если } R_{t-i+2} \text{ — } \omega'\text{-группа.}\end{cases}$$

Покажем индукцией по i $(1\leqslant i\leqslant t+1)$, что F_i — $\mathfrak{F}$-проектор в $HR_t\ldots R_{t-i+2}$. Основание индукции тривиально.

Допустим, что F_k — проектор в $HR_t\ldots R_{t-k+2}$ и $k\in \in\{2, \ldots, t\}$. Покажем, что подгруппа F_{k+1} является $\mathfrak{F}$-проектором группы F_kR_{t-k+1}. Если R_{t-k+1} — ω-группа, то R_{t-k+1} является примарной группой, и поэтому $F_{k+1}= =F_kC_{R_{t-k+1}}(F_k^{f(p)})$ является $\mathfrak{F}$-проектором в F_kR_{t-k+1} по лемме 16.1. Пусть R_{t-k+1} — ω'-группа. Предположим, что $R_{t-k+1}\subseteq U\subseteq F_kR_{t-k+1}$ и $U/U_0\in\mathfrak{F}$. Так как $H\subseteq F_k$, то каждый простой делитель числа $|F_kR_{t-k+1}:F_k|$ не входит в $\pi(\mathfrak{F})$. Но $F_k\in\mathfrak{F}$ и поэтому F_k — $\pi(\mathfrak{F})$-холловская подгруппа в группах F_kR_{t-k+1} и U. Значит, F_kU_0/U_0 — $\pi(\mathfrak{F})$-холловская подгруппа в U/U_0. Так как $U/U_0\in\mathfrak{F}$, то последнее означает, что $F_kU_0/U_0=U/U_0$. Следовательно, $F_kU_0=U$. Таким образом, $F_{k+1}=F_k$ — $\mathfrak{F}$-проектор в F_kR_{t-k+1}.

Покажем теперь, что F_{k+1} — $\mathfrak{F}$-проектор в $HR_t\ldots R_{t-k+1}$. Поскольку F_k является $\mathfrak{F}$-проектором в $HR_t\ldots R_{t-k+2}$, то по лемме 11.11 F_kR_{t-k+1}/R_{t-k+1} — $\mathfrak{F}$-проектор группы $HR_t\ldots R_{t-k+1}/R_{t-k+1}$. Но $F_kR_{t-k+1}=F_{k+1}R_{t-k+1}$. Поэтому $F_{k+1}R_{t-k+1}/R_{t-k+1}$ является $\mathfrak{F}$-проектором группы $HR_t\ldots \ldots R_{t-k+1}/R_{t-k+1}$. При этом F_{k+1} — $\mathfrak{F}$-проектор в F_kR_{t-k+1}. Значит, по теореме 11.12 F_{k+1} — $\mathfrak{F}$-проектор группы $HR_t\ldots R_{t-k+1}$. К этому остается лишь добавить, что $HR_t\ldots R_1=G$. Теорема доказана.

Дополнения к нормальным подгруппам. 16.3. В данном разделе мы покажем, как свойства $\mathfrak{F}$-нормализаторов могут быть использованы при отыскании дополнений к нормальным подгруппам конечных групп. Напомним, что подгруппа H группы G называется π-дополнением к подгруппе K, если $HK=G$ и $|H\cap K|$ не делится на числа из π. Если $\pi\supseteq\pi(G)$, то π-дополнение к K в G является дополнением.

Пусть $\mathfrak{H}$ — формация всех π-разложимых конечных групп. Она имеет локальный экран f такой, что $f(p)=\{1\}$, если $p\in\pi$, а при $q\in\pi'$ формация $f(q)$ совпадает с формацией всех конечных π'-групп. Нетрудно показать (см. теорему 21.1 из [107]), что $\mathfrak{H}$-нормализатор конечной

π-разрешимой группы G нормализует такую $\check{C}$-систему Σ группы G, что каждый элемент из Σ является либо примарной π-группой, либо π'-группой. Используя этот факт, стандартными методами (см. доказательство теоремы 21.1 из [107]) доказывается, что $N_G(\Sigma)$ покрывает каждый $\mathfrak{H}$-центральный главный фактор группы G, не покрывает ни один $\mathfrak{H}$-эксцентральный главный фактор G и изолирует все $\mathfrak{H}$-эксцентральные главные π-факторы группы G.

16.4. Лемма. *Пусть K — нормальная подгруппа конечной группы G, Σ — некоторая система подгрупп из K, $L = O_{p'}(K)$, и пусть $N_{G/L}(\Sigma L/L) = N_G(\Sigma) L/L$. Тогда если силовская p-подгруппа из $N_{K/L}(\Sigma L/L)$ дополняема в некоторой силовской p-подгруппе из $N_{G/L}(\Sigma L/L)$, то силовская p-подгруппа из $N_K(\Sigma)$ дополняема в некоторой силовской p-подгруппе из $N_G(\Sigma)$.*

Доказательство. Рассмотрим гомоморфизм

$$\varphi\colon x \mapsto xL, \quad x \in N_G(\Sigma),$$

подгруппы $N_G(\Sigma)$ на $N_G(\Sigma) L/L$. Очевидно,

$$\varphi\colon N_K(\Sigma) \to N_K(\Sigma) L/L = N_{K/L}(\Sigma L/L).$$

Пусть P — силовская p-подгруппа из $N_G(\Sigma)$. Тогда PL/L — силовская p-подгруппа в $N_{G/L}(\Sigma L/L)$. Предположим, что

$$PL/L = (A/L)(B/L), \quad A \cap B = L,$$

где B/L — силовская p-подгруппа из $N_{K/L}(\Sigma L/L)$. Тогда

$$PL = AB, \quad P = A_p B_p, \quad A_p L = A, \quad B_p L = B,$$

причем $B_p \subseteq N_K(\Sigma) L \subseteq K$. Из $B_p \subseteq P \subseteq N_G(\Sigma)$ вытекает $B_p \subseteq N_K(\Sigma)$. Отсюда и из того, что $B_p L/L$ — силовская p-подгруппа в $N_K(\Sigma) L/L$, вытекает, что B_p — силовская подгруппа в $N_K(\Sigma)$. Из $A \cap B = L$ следует $A_p \cap B_p = \{1\}$. Лемма доказана.

16.5. Лемма. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, K — нормальная подгруппа конечной группы G. Пусть $K^{\mathfrak{F}}$ p-разрешима и Σ — некоторая минимальная $\check{C}$-система из $K^{\mathfrak{F}}$. Если подгруппа $G_p \cap K$ абелева и дополняема в G_p, то силовская p-подгруппа из $N_K(\Sigma)$ абелева и дополняема в некоторой силовской p-подгруппе из $N_G(\Sigma)$.*

Доказательство. Пусть $L = O_{p'}(K)$. Тогда $\Sigma L/L$ — минимальная $\check{C}$-система $(K/L)^{\mathfrak{F}} = K^{\mathfrak{F}} L/L$, причем $N_{G/L}(\Sigma L/L) = N_G(\Sigma) L/L$. Нетрудно показать, что из дополняемости $G_p \cap K$ в G_p следует дополняемость $(G_p \cap K) L/L$ в $G_p L/L$. Если $L \neq \{1\}$, то лемма для G/L

верна по индукции. Но тогда по лемме 16.4 она верна и для G.

Пусть теперь $O_{p'}(K)=\{1\}$. По условию $G_p = (G_p \cap K) \leftthreetimes C$. Зафиксируем некоторую силовскую p-подгруппу N_p из $N=N_G(\Sigma)$. Не ограничивая общности, будем считать, что $N_p \subseteq G_p$. Тогда N_p является силовской p-подгруппой в $N_{G_pK}(\Sigma)$. Значит, из справедливости леммы для G_pK вытекает ее справедливость и для G. Поэтому считаем, что $G=G_pK=CK$. Так как $O_{p'}(K)=\{1\}$ и $K^{\mathfrak{F}}$ согласно следствию 5.11.1 из [107] имеет p-длину $\leqslant 1$, то $G_p \cap K^{\mathfrak{F}}$ нормально в G. Пусть π — множество всех тех $p \in \pi(K^{\mathfrak{F}})$, для которых $K^{\mathfrak{F}}$ p-разрешима. И пусть $\mathfrak{H}$ — формация всех π-разложимых групп. Если $K^{\mathfrak{F}} \subseteq \mathfrak{H}$, то тогда $N_G(\Sigma)=G$, и лемма верна. Пусть $K^{\mathfrak{F}} \not\subseteq \mathfrak{H}$, тогда $(K^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{H}} \neq \{1\}$. Так как $O_{p'}(K)=\{1\}$, то отсюда следует, что p делит $|(K^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{H}}|$, а значит, существует минимальная нормальная p-подгруппа L из G, содержащаяся в $(K^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{H}}$. По теореме 11.6 из [107] L не может быть $\mathfrak{H}$-гиперцентральной в $K^{\mathfrak{F}}$. Значит, $K^{\mathfrak{F}}$-главные факторы L являются $\mathfrak{H}$-эксцентральными в $K^{\mathfrak{F}}$. Но тогда согласно сделанному ранее замечанию $N_{K^{\mathfrak{F}}}(\Sigma)$ изолирует L, т. е.

$$N_G(\Sigma) \cap L = N_{K^{\mathfrak{F}}}(\Sigma) \cap L = \{1\}.$$

Рассмотрим факторгруппу G/L. Покажем, что условие леммы для G/L выполняется:

$$G_p/L = ((G_p \cap K)/L)(CL/L),$$
$$(G_p \cap K) \cap CL = ((G_p \cap K) \cap C)L = L.$$

Значит, для G/L лемма верна по индукции. Таким образом, силовская p-подгруппа из $N_K(\Sigma)L/L$ дополняема в некоторой силовской p-подгруппе из $N_G(\Sigma)L/L$. Рассмотрим отображение φ: $x \mapsto xL$, $x \in N_G(\Sigma)$. Так как $N_G(\Sigma) \cap L = \{1\}$, то φ — изоморфизм $N_G(\Sigma)$ на $N_G(\Sigma)L/L$, при котором $N_K(\Sigma)$ переходит в $N_K(\Sigma)L/L$. Значит, из справедливости леммы для G/L вытекает ее справедливость и для G. Лемма доказана.

16.6. Лемма. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, K — нормальная подгруппа конечной группы G, $K^{\mathfrak{F}}$ $\pi(\mathfrak{F})$-разрешима и для некоторого простого p, делящего порядок $\mathfrak{F}$-проектора T из K, выполняются следующие условия:*

1) *$K^{\mathfrak{F}}$ p-нильпотентна;*

2) *$G_p \cap K$ абелева и дополняема в G_p.*

Тогда силовская p-подгруппа T_p из T дополняема в некоторой силовской p-подгруппе N_p из $N_G(T)$.

Доказательство. Пусть $N = N_G(T)$. Предположим, что $L = O_{p'}(K) \neq \{1\}$. Если P — дополнение к $G_p \cap K$ в G_p, то ясно, что PL/L — дополнение к $(G_p \cap K) L/L$ в G_pL/L. Так как для G/L лемма верна по индукции, то T_pL/L имеет дополнение C/L в силовской p-подгруппе R/L из $N_{G/L}(TL/L)$. Так как по теореме 15.7 из [107] $\mathfrak{F}$-проекторы в K сопряжены, то T пронормальна в G, а значит, по лемме 17.5 из [107] имеет место равенство

$$N_{G/L}(TL/L) = NL/L.$$

Значит, R/L можно представить в виде $R/L = N_pL/L$, где N_p — некоторая силовская p-подгруппа из N. Из $L \subseteq C \subseteq N_pL$ следует, что $C = C_pL$, где $C_p = C \cap N_p$. Итак, T_pL/L имеет дополнение C_pL/L в N_pL/L, причем $|N_p| = |C_p| \cdot |T_p|$. Подгруппа T_p содержится в пересечении $N_pL \cap N = N_p(L \cap N)$. Значит, для некоторого $x \in L \cap N$ имеет место $T_p \subseteq N_p^x \subseteq N$, т. е. N_p^x — силовская подгруппа из N, причем $N_p^xL = N_pL$. Поэтому, не ограничивая общности, будем считать, что T_p содержится в N_p.

По лемме 15.3 из [107] T является $\pi(\mathfrak{F})$-холловской подгруппой в $N \cap K$, а значит, T_p является силовской подгруппой в $N \cap K$. Отсюда заключаем, что $T_p = N_p \cap (N \cap K)$ нормальна в N_p. Значит, T_pC_p — подгруппа из N_p, а вспоминая равенство $T_pC_pL = N_pL$ и $|N_p| = |C_p| \cdot |T_p|$, получаем, что $N_p = T_pC_p$, $C_p \cap T_p = \{1\}$.

Пусть теперь $O_{p'}(K) = \{1\}$, т. е. $K^{\mathfrak{F}}$ является абелевой p-группой. Будем считать, что $K^{\mathfrak{F}} \neq \{1\}$, так как при $K^{\mathfrak{F}} = \{1\}$ лемма верна. По теореме 21.10 из [107] T является дополнением к $K^{\mathfrak{F}}$ в K, причем T — $\mathfrak{F}$-нормализатор K. В рассматриваемом случае K является $\pi(\mathfrak{F})$-группой, а потому $N_K(T) = T$. Но тогда

$$G = NK^{\mathfrak{F}}, \quad N \cap K^{\mathfrak{F}} \subseteq N \cap K \cap K^{\mathfrak{F}} = T \cap K^{\mathfrak{F}} = \{1\},$$

т. е. N — дополнение к $K^{\mathfrak{F}}$ в G. Отображение φ: $x \mapsto xK^{\mathfrak{F}}$, где $x \in N$, является изоморфным отображением N на $G/K^{\mathfrak{F}}$, переводящим T в $TK^{\mathfrak{F}}/K^{\mathfrak{F}} = K/K^{\mathfrak{F}}$. Поскольку силовская p-подгруппа из $K/K^{\mathfrak{F}}$ дополняема в силовской p-подгруппе из $G/K^{\mathfrak{F}}$, то из указанного изоморфизма вытекает дополняемость T_p в силовской подгруппе из N. Лемма доказана.

16.7. Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, K — нормальная подгруппа конечной группы G, T — $\mathfrak{F}$-нормализатор из K, причем подгруппа $K^{\mathfrak{F}}$ является $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимой. Пусть, далее, для любого $p \in \pi(T) \cap \pi(G/K)$ подгруппа $G_p \cap K$ абелева и дополняема в G_p. Тогда K обладает $\pi(\mathfrak{F})$-дополнением в G.*

Доказательство. Ввиду следствия 21.5.1 из [107] найдется такая минимальная $\check{C}$-система Σ группы $K^{\mathfrak{F}}$, что T является $\mathfrak{F}$-проектором в $N_K(\Sigma)$. Пусть $N = N_G(\Sigma)$. Поскольку любые две минимальные $\check{C}$-системы в $K^{\mathfrak{F}}$ сопряжены, то $G = NK^{\mathfrak{F}}$, а значит, $K = (N \cap K) K^{\mathfrak{F}}$. Поэтому

$$K/K^{\mathfrak{F}} \simeq N \cap K/N \cap K^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F},$$

откуда следует справедливость включения $(N \cap K)^{\mathfrak{F}} \subseteq$ $\subseteq N \cap K^{\mathfrak{F}}$. По лемме 20.4 из [107] подгруппа $N \cap K^{\mathfrak{F}}$ является $\pi(\mathfrak{F})$-разложимой. Таким образом, $N \cap K$ имеет $\pi(\mathfrak{F})$-разложимый $\mathfrak{F}$-корадикал. Но тогда ввиду теоремы 21.5 из [107] $\mathfrak{F}$-нормализаторы группы $N \cap K$ совпадают с ее $\mathfrak{F}$-проекторами. Следовательно, T является одновременно и $\mathfrak{F}$-проектором и $\mathfrak{F}$-нормализатором в $N \cap K$. Из $G = NK$ вытекает совпадение индексов $|G:K|$ и $|N:N \cap K|$. Отсюда и из леммы 16.5 вытекает, что условие теоремы выполняется для группы N, ее нормальной подгруппы $N \cap K$ и подгруппы T, являющейся $\mathfrak{F}$-нормализатором в $N \cap K$. Если $N \neq G$, то по индукции теорема верна для N, а значит, ввиду $G = NK$ и для G.

Пусть $N = G$. Тогда $K^{\mathfrak{F}}$ $\pi(\mathfrak{F})$-разложима, а T является одновременно и $\mathfrak{F}$-нормализатором и $\mathfrak{F}$-проектором в K. По лемме 16.6 для любого $p \in \pi = \pi(T) \cap \pi(G/K)$ силовская p-подгруппа из T абелева и дополняема в силовской p-подгруппе из $N_G(T)$. По лемме 15.3 из [107] T является $\pi(\mathfrak{F})$-холловской подгруппой в $N_K(T)$. Таким образом, мы получаем, что для любого $p \in \pi$ силовская p-подгруппа из $N_K(T)$ абелева и дополняема в силовской p-подгруппе из $N_G(T)$. Но тогда по теореме 11.3 из [107] $N_K(T)$ обладает π-дополнением S в $N_G(T)$. Значит, $N_G(T) = SN_K(T)$, причем $S \cap N_K(T)$ является π'-группой. Пусть D — наименьшая по вложению подгруппа, содержащаяся в S и удовлетворяющая равенству $N_G(T) = DN_K(T)$. Лемма 11.2 из [107] и тот факт, что ввиду сопряженности $\mathfrak{F}$-проекторов имеет место $G = N_G(T) K$, приводят к следующему:

$$\pi(D) = \pi(N_G(T)/N_K(T)) = \pi(G/K).$$

Кроме того, $G = DK$, причем $D \cap K$ является π'-группой. Пусть простое число $p \in \pi(\mathfrak{F})$ делит $|D \cap K|$. Тогда $p \in$ $\in \pi(G/K)$, а так как $D \cap K \subseteq N_K(T)$ и T является $\pi(\mathfrak{F})$-холловской подгруппой в $N_K(T)$, то $p \in \pi(T)$. Значит, $p \in \pi$. Но это противоречит тому, что $D \cap K$ — π'-группа. Следовательно, D — $\pi(\mathfrak{F})$-дополнение к K в G. Теорема доказана.

Заметим, что если $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{N}$, то в условиях теоремы 16.7 подгруппа K дополняема в G.

16.8. Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, содержащая все конечные нильпотентные группы, K — нормальная подгруппа конечной группы G. Пусть $K^{\mathfrak{F}}$ разрешима и T — ее системный нормализатор, и пусть для любого $p \in \pi(T)$ силовская p-подгруппа из $K^{\mathfrak{F}}$ абелева. Тогда $K^{\mathfrak{F}}$ обладает дополнением в G.*

Доказательство. Пусть D — $\mathfrak{F}$-нормализатор группы K. По теореме 21.5 из [107] существует такая силовская система Σ группы $K^{\mathfrak{F}}$, что D является $\mathfrak{F}$-проектором в $N_K(\Sigma)$, причем T совпадает с нормализатором системы Σ в $K^{\mathfrak{F}}$. Значит,

$$D \cap K^{\mathfrak{F}} \subseteq N_K(\Sigma) \cap K^{\mathfrak{F}} = T.$$

Так как для любого $p \in \pi(T)$ силовская p-подгруппа из $K^{\mathfrak{F}}$ абелева, то согласно теоремам 11.6 и 21.1 из [107] $D \cap K^{\mathfrak{F}}$ есть $\pi'(T)$-группа. Таким образом, $D \cap K^{\mathfrak{F}} = \{1\}$. Учитывая теперь равенство $K = N_K(\Sigma) K^{\mathfrak{F}}$, имеем:

$$K/K^{\mathfrak{F}} \simeq N_K(\Sigma)/N_K(\Sigma) \cap K^{\mathfrak{F}} = N_K(\Sigma)/T \in \mathfrak{F}.$$

Отсюда следует, что $\mathfrak{F}$-корадикал группы $N_K(\Sigma)$ содержится в T. Ввиду условия T абелева. Значит, по теореме 21.10 из [107] D является дополнением к $(N_K(\Sigma))^{\mathfrak{F}}$ в $N_K(\Sigma)$. А так как $D \cap T \subseteq D \cap K^{\mathfrak{F}} = \{1\}$, то $D \cap T = \{1\}$, и поэтому $\mathfrak{F}$-корадикал группы $N_K(\Sigma)$ совпадает с T.

Так как $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{N}$ и D — $\mathfrak{F}$-проектор в $N_K(\Sigma)$, то по лемме 15.3 из [107] $N_G(D) \cap N_K(\Sigma) = D$. Ввиду сопряженности $\mathfrak{F}$-проекторов в $N_K(\Sigma)$ имеем:

$$N_G(\Sigma) = (N_G(D) \cap N_G(\Sigma)) N_K(\Sigma).$$

Кроме того, $G = N_G(\Sigma) K^{\mathfrak{F}}$, $N_K(\Sigma) = T \times D$. Таким образом:

$$G = (N_G(D) \cap N_G(\Sigma)) K^{\mathfrak{F}},$$

$$K^{\mathfrak{F}} \cap (N_G(D) \cap N_G(\Sigma)) = K^{\mathfrak{F}} \cap (N_G(D) \cap N_K(\Sigma)) = K^{\mathfrak{F}} \cap D = \{1\}.$$

Теорема доказана.

16.9. Теорема. *Пусть K — разрешимая нормальная подгруппа конечной группы G, и пусть T — системный нормализатор группы $K^{\mathfrak{N}}$. Если для любого $p \in \pi(T)$ силовская p-подгруппа из $K^{\mathfrak{N}}$ абелева, то нормализатор в G силовской системы подгруппы K является дополнением к $K^{\mathfrak{N}}$ в G.*

Доказательство. Пусть Σ — силовская система группы K. Известно (см. лемму 20.5 из [107]), что Σ является расширением некоторой силовской системы Σ_1 подгруппы $K^{\mathfrak{N}}$. Не ограничивая общности, будем считать, что T есть нормализатор Σ_1 в $K^{\mathfrak{N}}$. Пусть $D = N_K(\Sigma)$. Ясно, что D содержится в $N_K(\Sigma_1)$ и

$$D \cap K^{\mathfrak{N}} \subseteq N_K(\Sigma_1) \cap K^{\mathfrak{N}} = T.$$

Применяя теоремы 11.6, 21.1 и 21.12 из [107], видим, что $|D \cap K^{\mathfrak{N}}|$ не делится на числа из $\pi(T)$. Таким образом, $D \cap K^{\mathfrak{N}} = \{1\}$, т. е. D является дополнением к $K^{\mathfrak{N}}$ в K. Отсюда, используя равенство $G = N_G(\Sigma) K$, получаем

$$G = N_G(\Sigma) DK^{\mathfrak{N}} = N_G(\Sigma) K^{\mathfrak{N}}.$$

Кроме того, $N_G(\Sigma) \cap K^{\mathfrak{N}} = N_K(\Sigma) \cap K^{\mathfrak{N}} = D \cap K^{\mathfrak{N}} = \{1\}$. Теорема доказана.

§ 17. Комментарии

17.1. $\mathfrak{F}$-проекторы конечных групп иногда называют $\mathfrak{F}$-покрывающими подгруппами (см. [140]), сохраняя при этом термин «$\mathfrak{F}$-проектор» для подгрупп, названных нами $\mathfrak{F}$-полупроекторами.

17.2. Пример 11.3 рассмотрен впервые в [118].

17.3. Теорема 11.20, лемма 11.21 и теорема 11.23 доказаны Эриксоном [140] для класса конечных групп.

17.4. Лемма 11.26 принадлежит Хупперту [163].

17.5. Следующая теорема приведена в монографии [107].

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация конечных групп, G — конечная группа с $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом. Тогда любые два $\mathfrak{F}$-проектора группы G сопряжены.*

17.6. Следующий пример показывает, что находясь в условиях теоремы 16.2, доказать сопряженность $\mathfrak{F}$-проекторов нельзя.

Пример. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi$ — формация всех π-групп, где $\pi = \{2, 3\}$. Пусть $G \simeq \mathrm{PSL}(2, 7)$. Тогда в G существуют два класса сопряженных подгрупп, изоморфных симметрической группе 4-й степени и являющихся одновременно $\mathfrak{F}$-проекторами и $\mathfrak{F}$-нормализаторами G.

17.7. Подалгебры A и B алгебры G назовем *автоморфно сопряженными* в G, если для некоторого автоморфизма α алгебры G имеет место $A^\alpha = B$.

Проблема. Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — некоторая наследственная полуформация разрешимых мультиколец, $\mathfrak{F}$ — непустая насыщенная в $\mathfrak{X}$ формация. И пусть A и B — $\mathfrak{F}$-проекторы мультикольца $H \in \mathfrak{X}$. Верно ли, что A и B автоморфно сопряжены в H?

17.8. Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольный класс алгебр. Подалгебру H алгебры A назовем *$\mathfrak{F}$-инъектором*, если $H \cap T$ — $\mathfrak{F}$-максимальна в A для любой нормальной подалгебры T из A.

Подалгебру H алгебры A назовем *$\mathfrak{F}$-биектором*, если H одновременно является $\mathfrak{F}$-проектором и $\mathfrak{F}$-инъектором в A.

Пример. Пусть $\mathfrak{N}_p$ — класс конечных p-групп, A — произвольная конечная группа. Тогда всякая силовская p-подгруппа A является ее $\mathfrak{N}_p$-биектором.

17.9. Подалгебры A и B алгебры H назовем изоордными, если $|A| = |B|$.

В. С. Монахов [51] доказал следующую теорему.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{X}$ — наследственный класс конечных групп, обладающий следующими свойствами:* 1) $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{X}$ *для всех таких $p \in \pi(\mathfrak{X})$, для которых некоторая группа порядка p принадлежит $\mathfrak{X}$;* 2) *$\mathfrak{X}$-биекторы изоордны в тех конечных группах, где они существуют. Тогда $\mathfrak{X}$ — класс всех групп, либо класс единичных групп, либо $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}_p$ для некоторого простого p.*

17.10. Напомним, что $\mathfrak{F}$-нормализаторы конечных разрешимых групп в случае, когда $\mathfrak{F}$ — класс нильпотентных групп, совпадают с системными нормализаторами Ф. Холла (см. гл. 4 книги [107]).

17.11. Понятие $\mathfrak{F}$-нормализатора было введено в работах [130, 181] для класса конечных разрешимых групп и для одного класса локально разрешимых групп. Понятие $\mathfrak{F}$-нормализатора разрешимой конечномерной алгебры Ли, а также свойства таких подалгебр изучены в работе [180].

17.12. В работе [109] Л. А. Шеметков вводит понятие $\mathfrak{F}$-нормализатора произвольной конечной группы и показывает, что и в произвольных конечных группах $\mathfrak{F}$-нормализаторы обладают рядом важных свойств. Там же доказана следующая теорема (см. теорему 21.4 книги [107]).

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация конечных групп, G — конечная группа с $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом. Тогда любые два $\mathfrak{F}$-нормализатора группы G сопряжены.*

17.13. Определение 12.7 $\mathfrak{F}$-центрального и $\mathfrak{F}$-эксцентрального нормального фактора восходит к работе [117].

17.14. Теорема. *Пусть f — внутренний $\mathfrak{X}$-экран формации мультиколец $\mathfrak{F}$, H/K — главный фактор φ-разрешимого мультикольца $A \in \mathfrak{X}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *фактор H/K $\mathfrak{F}$-централен в A;*
2) *фактор H/K f-централен в A.*

Доказательство. Пусть $C=C_A(H/K)$ и $D=H/K \rightthreetimes A/C$. Допустим, что $D\in\mathfrak{F}$. Если фактор H/K фраттиниев, то по условию $H\subseteq C$. Значит, $C_D(H/K)=H/K$, и поэтому $A/C\in f(H/K)$. Пусть фактор H/K нефраттиниев и M—такая максимальная в A подалгебра, что $K\subseteq M$, но $H\not\subseteq M$. Тогда по лемме 12.8 $A/M_A\in\mathfrak{F}$. Так как при этом фактор $H+M_A/M_A$ перспективен фактору H/K, то ввиду леммы 2.8

$$C=C_A(H+M_A/M_A),$$
$$(A/M_A)/C_{A/M_A}(H+M_A/M_A)=(A/M_A)/(C/M_A)\simeq$$
$$\simeq A/C\in f(H+M_A/M_A)=f(H/K),$$

т. е. фактор H/K f-централен в A.

Предположим теперь, что имеет место 2). Если фактор H/K A-абелев, то идеал H/K f-централен в D. Но $D/(H/K)\simeq A/C\in f(H/K)\subseteq\mathfrak{F}$. Значит, $D\in\mathfrak{F}$. Пусть фактор H/K не является A-абелевым. Тогда ввиду условия этот фактор нефраттиниев. Пусть M—максимальная в A подалгебра, не покрывающая фактор H/K. Ясно, что $M_A\subseteq C$. Если $C=M_A$, то поскольку $A/C\in f(H/K)\subseteq\mathfrak{F}$, то подалгебра M $\mathfrak{F}$-нормальна в A. Следовательно, ввиду леммы 12.8 фактор H/K $\mathfrak{F}$-централен в A. Пусть $M_A\subset C$. Легко видеть, что C/M_A—минимальный идеал в A/M_A, отличный от $H+M_A/M_A$. Значит, по лемме 11.19 подалгебра M/M_A дополняет в A/M_A оба идеала M_A+H/M_A и C/M_A. Из этого следует, что $M/M_A\in f(p)\subseteq\mathfrak{F}$ и A/M_A—поддекартово произведение мультиколец $(A/M_A)/(H+M_A/M_A)$ и $(A/M_A)/(C/M_A)$, принадлежащих $\mathfrak{F}$. Значит, $A/M_A\in\mathfrak{F}$, и поэтому фактор H/K $\mathfrak{F}$-централен в A. Теорема доказана.

17.15. Понятие $\mathfrak{F}$-профраттиниевой подалгебры является развитием понятия профраттиниевой подгруппы конечной разрешимой группы, введенного Гашюцом в работе [147].

17.16. В классе конечных разрешимых групп известны и другие подходы в определении $\mathfrak{F}$-профраттиниевых подгрупп, эквивалентные в соответствующих случаях определению 13.2 (см., например, [144, 158]).

17.17. $\mathfrak{F}$-профраттиниевы подалгебры конечномерных алгебр Ли изучались в работе [24].

17.18. Отметим, что в отличие от $\mathfrak{F}$-проекторов, $\mathfrak{F}$-полупроекторов и $\mathfrak{F}$-нормализаторов $\mathfrak{F}$-профраттиниева подалгебра не обязательно принадлежит классу $\mathfrak{F}$. Это приводит к следующей задаче.

Проблема. Описать условия, при которых $\mathfrak{F}$-профраттиниевы подалгебры мультикольца A принадлежат классу $\mathfrak{F}$.

В частном случае, когда $\mathfrak{F}$ — локальная формация конечных групп, а G — конечная группа с разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом, эта задача решена В. И. Гойко [23].

17.19. В работе [20] доказана следующая

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация конечных групп, G — конечная группа с разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом. Тогда любые две $\mathfrak{F}$-профраттиниевы подгруппы группы G сопряжены.*

17.20. Лемма 14.8 принадлежит Дескинсу [137]. Теоремы 14.9 и 14.11 доказаны М. В. Селькиным и В. Н. Семенчуком в работе [60] для случая, когда $\mathfrak{F}$ — локальная формация.

17.21. § 15 посвящен изложению результатов работы Л. А. Шеметкова [111].

17.22. Теорема 16.2 доказана С. Ф. Каморниковым [33].

17.23. Теоремы 16.7—16.9 доказаны А. П. Кармазиным и Л. А. Шеметковым в работах [37—39]. В указанных работах можно найти исторические справки, а также другие признаки дополняемости и π-дополняемости нормальных подгрупп конечных групп. В этих результатах наравне с условием абелевости примарных подгрупп используется условие прямой дополняемости (подгруппа A группы B называется прямо дополняемой в B, если $B = A \times C$ для некоторой подгруппы C). В качестве иллюстрации сформулируем следующий результат работы [37].

Теорема. *Пусть K — разрешимая нормальная подгруппа конечной группы G, T — системный нормализатор из K, $\pi(T) \cap \pi(G/K) = \sigma \cup \tau$. Подгруппа K дополняема в G, если выполняются следующие условия:*

1) *для любого $p \in \sigma$ подгруппа $G_p \cap K$ абелева и дополняема в G_p;*

2) *для любого $q \in \tau$ подгруппа $G_q \cap K$ прямо дополняема в G_q.*

17.24. Объекты главы 3 в классе групп изучаются уже длительное время, и здесь накоплен большой материал. Желательно углубить изучение этих объектов для других типов алгебр. В частности, неразработанной остается пока тематика, связанная с отысканием дополнений к $\mathfrak{F}$-корадикалам алгебр Ли.

ГЛАВА 4

ФОРМАЦИИ С ЗАДАННОЙ СИСТЕМОЙ ПОДФОРМАЦИЙ

Все рассматриваемые в данной главе группы предполагаются конечными. Для формаций мы сохраняем ту же терминологию, которая используется для групп, составляющих эти формации. Таким образом, разрешимой мы будем называть всякую формацию, состоящую из разрешимых групп, нильпотентной — из нильпотентных групп и т. д.

§ 18. Минимальные локальные не $\mathfrak{H}$-формации

18.1. Пусть Θ и Ω — два произвольных класса формаций. Формацию $\mathfrak{F}$ назовем *Ω_Θ-критической*, если $\mathfrak{F} \in \Theta \setminus \Omega$ и всякая собственная Θ-подформация из $\mathfrak{F}$ принадлежит Ω.

В случае, когда Ω — совокупность всех подклассов класса алгебраических систем $\mathfrak{H}$, Ω_Θ-критические формации мы будем называть также *$\mathfrak{H}_\Theta$-критическими*.

Пусть Θ — совокупность всех локальных формаций групп, $\mathfrak{H}$ — произвольный класс групп. Тогда $\mathfrak{H}_\Theta$-критические формации — это в точности *минимальные локальные не $\mathfrak{H}$-формации*, т. е. локальные формации, не входящие в $\mathfrak{H}$, но все собственные локальные подформации которых входят в класс $\mathfrak{H}$. Если же Θ — совокупность всех формаций групп, то $\mathfrak{H}_\Theta$-критические формации — это *минимальные не $\mathfrak{H}$-формации*, т. е. формации, сами не входящие в $\mathfrak{H}$, но у которых все собственные подформации в классе $\mathfrak{H}$ содержатся.

18.2. Лемма. *Пусть A — монолитическая группа с монолитом P. Тогда если $P \not\subseteq \Phi(A)$, то* $\mathrm{form}\,(A/P)$ *— единственная максимальная подформация формации* $\mathrm{form}\,A$.

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{F}$ формацию $\mathrm{form}\,(A/P)$, а через $\mathfrak{H}$ — формацию $\mathrm{form}\,A$. Ввиду следствия 3.23, $A \notin \mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{H}$. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная собственная подформация формации $\mathfrak{H}$. Предположим, что $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{F}$ и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{F}$. Применяя теорему 3.37, видим, что G — гомоморфный образ A. Но $A/P \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $G \simeq A$, т. е. $A \in \mathfrak{M}$. Поэтому $\mathfrak{H} = \mathrm{form}\, A \subseteq \mathfrak{M}$. Это противоречит определению формации $\mathfrak{M}$. Таким образом, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

18.3. Лемма. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — формации, причем $\mathfrak{H}$ локальна и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда G монолитична, ее монолит совпадает с $G^{\mathfrak{H}}$ и если $G^{\mathfrak{H}}$ — p-группа, то $G^{\mathfrak{H}} = C_G(G^{\mathfrak{H}}) = \mathrm{F}_p(G)$.*

Доказательство. Так как $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ — формации, то G — монолитическая группа с монолитом $G^{\mathfrak{H}}$. Поскольку формация $\mathfrak{H}$ локальна, то ввиду леммы 3.40 она насыщена. Значит, $\Phi(G) = \{1\}$. Таким образом, в G найдется такая максимальная подгруппа M, что $G^{\mathfrak{H}} \not\subseteq M$. Пусть $C = C_G(G^{\mathfrak{H}})$. Тогда $C = C \cap G^{\mathfrak{H}} M = G^{\mathfrak{H}}(M \cap C)$. Понятно, что $C \cap M$ — нормальная подгруппа группы G. Следовательно, ввиду монолитичности последней, $C \cap M = \{1\}$. Таким образом, $C = G^{\mathfrak{H}}$. Последнее означает, что $\mathrm{F}_p(G) = G^{\mathfrak{H}}$. Лемма доказана.

Напомним, что для каждого множества формаций Θ через Θ^l мы обозначаем совокупность формаций, обладающих локальным Θ-значным экраном (т. е. локальным экраном, все непустые значения которого принадлежат Θ).

18.4. Теорема. *Пусть Θ — такая полурешетка формаций групп, что $\Theta^l \subseteq \Theta$. Пусть h — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{H}$, а f — минимальный локальный Θ-значный экран формации $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\Theta^l}$-критической формацией в том и только в том случае, когда $\mathfrak{F} = \Theta^l\mathrm{form}\, G$, где G — такая монолитическая группа с монолитом $G^{\mathfrak{H}}$, что для всех $p \in \pi(G^{\mathfrak{H}})$ формация $f(p)$ $(h(p))_\Theta$-критична.*

Доказательство. Необходимость. Пусть G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда G — монолитическая группа, монолит которой совпадает с $G^{\mathfrak{H}}$. Кроме того, очевидно, $\mathfrak{F} = \Theta^l\mathrm{form}\, G$. Пусть $p \in \pi(G^{\mathfrak{H}})$. Предположим $f(p) = \mathfrak{E}$. Тогда поскольку ввиду теоремы 8.3 имеет место $f(p) = \Theta\mathrm{form}(G/F_p(G))$, то $G = \mathrm{F}_p(G)$ — группа порядка p. Но G не принадлежит $\mathfrak{H}$. Значит, $\mathfrak{N}_p \not\subseteq \mathfrak{H}$, и поэтому $h(p) = \varnothing$. Таким образом, $f(p)$ — $(h(p))_\Theta$-критическая формация.

Пусть $f(p) \neq \mathfrak{E}$ и $\mathfrak{M}$ — произвольная собственная Θ-подформация формации $f(p)$. Предположим, что $\mathfrak{M}$ не входит в $h(p)$ и A — группа минимального порядка из $\mathfrak{M}\setminus h(p)$. Тогда поскольку в силу следствия 8.6 имеет место равенство $h(p)=\mathfrak{N}_p h(p)$, то $O_p(A)=\{1\}$. Пусть $H=P\wr A$ — регулярное сплетение, где P — группа порядка p. Ввиду теоремы 8.3 и включения $\Theta^l\subseteq\Theta$ экран f внутренний. Следовательно, по лемме 8.2, $H\in\mathfrak{F}$. Значит, $\Theta^l\mathrm{form}\,H\subseteq\mathfrak{F}$. Если $\Theta^l\mathrm{form}\,H=\mathfrak{F}$, то

$$f(p)=\Theta\mathrm{form}\,(H/\mathrm{F}_p(H))=\Theta\,\mathrm{form}\,A\subseteq\mathfrak{M}\subset f(p).$$

Полученное противоречие показывает, что $\Theta^l\mathrm{form}\,H\subset\mathfrak{F}$. Но всякая собственная Θ^l-подформация формации $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{H}$. Следовательно, $\Theta^l\mathrm{form}\,H\subseteq\mathfrak{H}$. Последнее означает, что $H/\mathrm{F}_p(H)\simeq A\in h(p)$, что невозможно. Это показывает, что $\mathfrak{M}\subseteq h(p)$. Итак, всякая собственная Θ-подформация формации $f(p)$ входит в $h(p)$. Предположим, что $f(p)\subseteq\subseteq h(p)$. Если $G^{\mathfrak{H}}$ — неабелева группа, то $\mathrm{F}_p(G)=\{1\}$. Следовательно, $G\in f(p)\subseteq h(p)\subseteq\mathfrak{H}$, что невозможно. Значит, $G^{\mathfrak{H}}$ — p-группа, и поэтому по лемме 18.3 $G^{\mathfrak{H}}=\mathrm{F}_p(G)$. Но $G/\mathrm{F}_p(G)\in f(p)\subseteq h(p)$. Следовательно, ввиду леммы 8.2, $G\in\mathfrak{H}$. Снова пришли к противоречию. Значит, $f(p)\not\subseteq h(p)$. Таким образом, $f(p)$ — $(h(p))_\Theta$-критическая формация.

Достаточность. Ясно, что $\mathfrak{F}$ не входит в $\mathfrak{H}$. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная собственная Θ^l-подформация из $\mathfrak{F}$, m — ее минимальный локальный Θ-значный экран. Пусть $p\in\in\pi(G)\setminus\pi(G^{\mathfrak{H}})$. Поскольку

$$G/\mathrm{F}_p(G)\simeq(G/G^{\mathfrak{H}})/(\mathrm{F}_p(G)/G^{\mathfrak{H}})=(G/G^{\mathfrak{H}})/\mathrm{F}_p(G/G^{\mathfrak{H}})\in h(p)$$

и экран f внутренний, то ввиду следствия 8.4 справедливо $f(p)\subseteq h(p)$. С другой стороны, по следствию 8.4 $m(p)\subseteq\subseteq f(p)$. Значит, $m(p)\subseteq h(p)$. Пусть $p\in\pi(G^{\mathfrak{H}})$. Предположим, что $m(p)=f(p)$. Если $G^{\mathfrak{H}}$ — неабелева группа, то $\mathrm{F}_p(G)=\{1\}$. Поэтому $G\simeq G/\mathrm{F}_p(G)\in f(p)=m(p)$. Так как m — внутренний экран формации $\mathfrak{M}$, то последнее влечет $G\in\mathfrak{M}$. Тогда $\mathfrak{F}=\Theta^l\mathrm{form}\,G\subseteq\mathfrak{M}$. Противоречие. Значит, $G^{\mathfrak{H}}$ — абелева группа. В этом случае $\mathrm{F}_p(G)=G^{\mathfrak{H}}$ — p-группа. Так как $G/\mathrm{F}_p(G)\in f(p)=m(p)$, то по лемме 8.2 имеем $G\in\mathfrak{M}$. Полученное противоречие показывает, что $m(p)\subset\subset f(p)$. Следовательно, по условию $m(p)\subseteq h(p)$. Итак, для всех простых p справедливо включение $m(p)\subseteq h(p)$. Значит, $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{H}$. Таким образом, $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{H}_{\Theta^l}$-критическая формация. Теорема доказана.

В дальнейшем нам потребуются следующие два частных случая теоремы 18.4.

18.5. Следствие. *Пусть h — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{H}$, f — минимальный локаль-*

ный экран формации $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной локальной не $\mathfrak{H}$-формацией в том и только в том случае, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{l}\,\mathrm{form}\,G$, где G — такая монолитическая группа с монолитом $G^{\mathfrak{H}}$, что $f(p)$ — минимальная не $h(p)$-формация для всякого $p \in \pi(G^{\mathfrak{H}})$.

18.6. Следствие. *Пусть h — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{H}$, f — минимальный $(n-1)$-кратно локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной n-кратно локальной не $\mathfrak{H}$-формацией в том и только в том случае, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{l}_n\mathrm{form}\,G$, где G — такая монолитическая группа с монолитом $G^{\mathfrak{H}}$, что $f(p)$ — минимальная $(n-1)$-кратно локальная не $h(p)$-формация для всякого $p \in \pi(G^{\mathfrak{H}})$.*

18.7. Лемма. *Пусть G — монолитическая группа с монолитом P, $G/\mathrm{F}_p(G)$ — монолитическая группа с монолитом $Q/\mathrm{F}_p(G)$, где $p \in \pi(P)$. Пусть $Q/\mathrm{F}_p(G)$ — p'-группа, если P — p-группа. Тогда если*

$$|\Phi(G)| = 1 = |\Phi(G/\mathrm{F}_p(G))|,$$

то формация $\mathfrak{F} = \mathfrak{l}\,\mathrm{form}\,G$ имеет единственную максимальную локальную подформацию $\mathfrak{H}$, у которой есть такой внутренний локальный экран h, что $h(p) = \mathrm{form}(G/Q)$ при всех $p \in \pi(P)$ и $h(p) = \mathrm{form}(G/\mathrm{F}_p(G))$ при всяком $p \in \pi(G) \setminus \pi(P)$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{H} = \langle h \rangle$, где h — экран из условия леммы. Покажем, что экран h внутренний. Для этого достаточно установить, что $G/P \in \mathfrak{H}$. Пусть $p \in \pi(G) \setminus \pi(P)$. Тогда $\mathrm{F}_p(G/P) = \mathrm{F}_p(G)/P$. Значит,

$$G/\mathrm{F}_p(G) \simeq (G/P)/\mathrm{F}_p(G/P).$$

Следовательно, $(G/P)/\mathrm{F}_p(G/P) \in h(p)$. Пусть $p \in \pi(P)$. Тогда $h(p) = \mathrm{form}(G/Q)$. Если P — неабелева группа, то $\mathrm{F}_p(G) = \{1\}$. Значит, $Q = P$, и поэтому

$$(G/P)/\mathrm{F}_p(G/P) \in h(p).$$

Пусть P — p-группа. Поскольку $\Phi(G) = \{1\}$, то из последнего вытекает, что $P = \mathrm{F}_p(G)$. По условию Q/P — p'-группа. Следовательно, $Q/P \subseteq \mathrm{F}_p(G/P)$. Но $G/Q \simeq (G/P)/(Q/P)$. Значит,

$$(G/P)/\mathrm{F}_p(G/P) \in h(p).$$

Итак, при всяком $p \in \pi(G/P)$ имеет место

$$(G/P)/\mathrm{F}_p(G/P) \in h(p).$$

Таким образом, $G/P \in \mathfrak{H}$. Следовательно, h — внутренний экран формации $\mathfrak{H}$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная собственная локальная подформация формации $\mathfrak{F}$, m — ее минимальный локальный экран. Покажем, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$. Ввиду следствия 8.4 имеем $m \leqslant f$, где f — минимальный локальный экран формации $\mathfrak{F}$. По теореме 8.3 $f(p) = \operatorname{form}(G/\mathrm{F}_p(G))$ при всяком $p \in \pi(G)$. Значит, если $p \in \pi(G) \setminus \pi(P)$, то $m(p) \subseteq h(p)$. Пусть $p \in \pi(P)$. Предположим, что $m(p) = f(p)$. Тогда $G \in \mathfrak{M}$. Действительно, если P — неабелева группа, то $\mathrm{F}_p(G) = \{1\}$. Значит, $G \simeq G/\mathrm{F}_p(G) \in f(p) = m(p) \subseteq \mathfrak{M}$. Если же P — p-группа, то $P = \mathrm{F}_p(G)$, и поэтому $G/P \in m(p)$. Применяя теперь лемму 8.2, снова заключаем, что $G \in \mathfrak{M}$. Итак, $G \in \mathfrak{M}$. Значит, $\mathfrak{F} = \mathfrak{l}\operatorname{form} G \subseteq \mathfrak{M}$. Последнее противоречит определению формации $\mathfrak{M}$. Таким образом, $m(p) \subset f(p)$. По лемме 18.2

$$\operatorname{form}((G/\mathrm{F}_p(G))/(Q/\mathrm{F}_p(G))) = \operatorname{form}(G/Q)$$

— единственная максимальная подформация формации $\operatorname{form}(G/\mathrm{F}_p(G))$. Следовательно,

$$m(p) \subseteq \operatorname{form}(G/Q) = h(p).$$

Итак, $m(p) \subseteq h(p)$ при всех простых p. Значит, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$.

К сказанному остается добавить, что $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$, так как $h \leqslant f$ и по лемме 18.2 $h(p) \subset f(p)$, где $p \in \pi(P)$. Лемма доказана.

18.8. Лемма. *Если в группе G имеется лишь одна минимальная нормальная подгруппа и $\mathrm{O}_p(G) = \{1\}$ (p — некоторое простое число), то существует точный неприводимый $F_p[G]$-модуль, где F_p — поле из p элементов.*

Доказательство. Пусть $A = P \wr G$ — регулярное сплетение, где P — группа порядка p. Пусть

$$\{1\} = B_0 \subset B_1 \subset \ldots \subset B_t = B, \tag{1}$$

где B — база сплетения и B_i/B_{i-1} — A-главный фактор, $i = 1, \ldots, t$. Пусть $C_i = C_A(B_i/B_{i-1})$. Тогда поскольку $A = BG$, то $C_i = C_i \cap BG = B(C_i \cap G)$. Пусть $D = C_1 \cap \ldots \cap C_t \cap G$, R — монолит группы G. Если при всяком $i \in \{1, \ldots, t\}$ имеет место $C_i \cap G \neq \{1\}$, то $R \subseteq D$, т. е. R стабилизирует цепь (1). Значит, R — p-группа (см. лемму 3.9 книги [107]). Но по условию $\mathrm{O}_p(G) = \{1\}$. Полученное противоречие показывает, что для некоторого $i \in \{1, \ldots, t\}$ пересечение $C_i \cap G$ тривиально. Таким образом, B_i/B_{i-1} — точный неприводимый $F_p[G]$-модуль. Лемма доказана.

18.9. Теорема. *Пусть $\mathfrak{H}$ — 2-кратно локальная формация, h — ее максимальный внутренний локальный экран.*

Тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной локальной не $\mathfrak{H}$-формацией в том и только в том случае, когда $\mathfrak{F} = l\,\mathrm{form}\, G$, где G — такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что выполняется одно из следующих утверждений: 0) $|G|$ - прост.

1) *P — неабелева группа и $P = G^{h(p)}$ для любого $p \in \pi(P)$;*

2) *$G = P \rtimes H$, где $P = C_G(P)$ — p-группа, а H — такая монолитическая группа с монолитом Q, что $Q \not\subseteq \Phi(H)$, $(|P|, |Q|) = 1$, $Q = H^{h(p)}$ и $H/Q \in h(q)$ при любом $q \in \pi(Q)$.*

Доказательство. Необходимость. Предположим прежде, что имеется такая монолитическая группа G с неабелевым монолитом P, что $G \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда поскольку всякая собственная локальная подформация формации $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F} = l\,\mathrm{form}\, G$. Понятно, что для всякого $p \in \pi(P)$ имеет место $\mathrm{F}_p(G) = \{1\}$. Следовательно, ввиду леммы 18.7 формация $\mathfrak{F}$ имеет единственную максимальную локальную подформацию $\mathfrak{M}$, причем $\mathfrak{M}$ обладает таким внутренним локальным экраном m, что $m(p) = \mathrm{form}(G/P)$ при любом $p \in \pi(P)$. По условию $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$. Значит, ввиду следствия 8.4 $m \leqslant h$. Поэтому для любого $p \in \pi(P)$ справедливо, что $G/P \in h(p)$. При этом поскольку $h(p) \subseteq \mathfrak{H}$ и $G \notin \mathfrak{H}$, то тем более $G \notin h(p)$. Следовательно, $P = G^{h(p)}$ при всяком $p \in \pi(P)$. Таким образом, если G — монолитическая группа с неабелевым монолитом P и $G \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F} = l\,\mathrm{form}\, G$, $P = G^{\mathfrak{H}}$ и G удовлетворяет условию 1). Учитывая это, в дальнейшем мы будем считать, что если A — монолитическая группа и $A \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$, то монолит A абелев.

Обозначим через f минимальный локальный экран формации $\mathfrak{F}$. По теореме 18.4, $\mathfrak{F} = l\,\mathrm{form}\, G$, где G — такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что $f(p)$ — минимальная не $h(p)$-формация при всяком $p \in \pi(P)$. Ввиду вышесказанного мы можем считать, что P — p-группа. Пусть H — группа минимального порядка из $f(p) \setminus h(p)$. Тогда $f(p) = \mathrm{form}\, H$, H — монолитическая группа и монолит Q группы H совпадает с $H^{h(p)}$. Пусть t — минимальный 1-кратно локальный экран формации $\mathfrak{H}$. Ввиду теоремы 8.3 экран t внутренний. Значит, $t(p) \subseteq h(p)$. Применяя еще раз теорему 8.3 и следствие 8.6, видим, что $h(p) = \mathfrak{N}_p t(p)$. Значит, по следствию 7.14 $h(p)$ — локальная формация. Но $H/Q \in h(p)$. Таким образом, $Q \not\subseteq \Phi(H)$. Покажем, что $(|P|, |Q|) = 1$. Действительно, поскольку $\mathfrak{N}_p h(p) = h(p)$, то Q не является p-группой. Предположим, что Q — неабелева группа порядка, делящегося на p. Тогда если $H \in \mathfrak{H}$, то

$$H/\mathrm{F}_p(H) = H/\{1\} \simeq H \in h(p),$$

что противоречит определению группы H. Значит, $H \notin \mathfrak{H}$. При этом $H \in f(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Таким образом, H — монолитическая группа с неабелевым монолитом и $H \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Мы пришли к ситуации, которая нами уже исключена. Следовательно, остается заключить, что $(|P|, |Q|) = 1$.

Покажем, что $H/Q \in h(q)$ при всяком $q \in \pi(Q)$. Предположим прежде, что $H \notin \mathfrak{H}$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{l}\mathrm{form}\, H$. Следовательно, ввиду теоремы 8.3

$$f(p) = \mathrm{form}\, H = \mathrm{form}\, (H/\mathrm{F}_p(H)).$$

Так как Q — p'-группа, то $Q \subseteq \mathrm{F}_p(H)$. Поэтому

$$\mathrm{form}\, H = \mathrm{form}\, (H/Q).$$

Но по лемме 18.2

$$\mathrm{form}\, (H/Q) \subset \mathrm{form}\, H.$$

Противоречие. Следовательно, $H \in \mathfrak{H}$. Пусть Q — неабелева группа, $q \in \pi(Q)$. Тогда $\mathrm{F}_q(H) = \{1\}$. Значит,

$$H/\mathrm{F}_q(H) = H/\{1\} \simeq H \in h(q).$$

Пусть Q — q-группа. Тогда ввиду леммы 18.3 имеем $Q = \mathrm{F}_q(H)$. Значит, $H/Q \in h(q)$.

По лемме 18.8 существует точный неприводимый $F_p[H]$-модуль L. Пусть $F = L \rtimes H$. Понятно, что $L = \mathrm{F}_p(F)$. Следовательно, поскольку $H \in h(p)$, то $F \notin \mathfrak{H}$. С другой стороны, поскольку $H \in f(p)$, то $F \in \mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{F} = \mathfrak{l}\mathrm{form}\, F$, $L = F^{\mathfrak{H}}$ и группа F удовлетворяет условию 2).

Достаточность. Ввиду теоремы 18.4 достаточно лишь показать, что если $p \in \pi(P)$, то $f(p)$ — минимальная не $h(p)$-формация. Пусть P — неабелева группа. Тогда

$$f(p) = \mathrm{form}\, (G/\mathrm{F}_p(G)) = \mathrm{form}\, (G/\{1\}) = \mathrm{form}\, G.$$

По лемме 18.2, $\mathrm{form}\,(G/P)$ — единственная максимальная подформация формации $\mathrm{form}\, G$. Но по условию $P = G^{h(p)}$ и поэтому $\mathrm{form}\,(G/P) \subseteq h(p)$. Таким образом, $f(p)$ — минимальная не $h(p)$-формация.

Пусть P — p-группа. Тогда ввиду условия $P = \mathrm{F}_p(G)$. Значит, $f(p) = \mathrm{form}\, H$. Так как по условию $Q = H^{h(p)}$, то $f(p) \not\subseteq h(p)$. С другой стороны ввиду леммы 18.2 всякая собственная подформация формации $f(p)$ входит в формацию

$$\mathrm{form}\, (H/Q) = \mathrm{form}\, (H/H^{h(p)}) \subseteq h(p).$$

Следовательно, в рассматриваемом случае $f(p)$ также является минимальной не $h(p)$-формацией. Теорема доказана.

Отметим, что лемма 18.7 дает описание единственно максимальной локальной подформации формации $\mathfrak{F}$ из теоремы 18.9.

В дальнейшем π — некоторое множество простых чисел. Напомним, что для всякого множества простых чисел φ через φ' мы обозначаем дополнение ко множеству φ во множестве простых чисел.

Выведем несколько полезных следствий теоремы 18.9.

18.10. Следствие. *Пусть $\mathfrak{M}$ — локальная формация, $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_{\pi'}\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{M}$. Тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной локальной не $\mathfrak{H}$-формацией в том и только в том случае, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{l}\mathrm{form}\, G$, где G — такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что $\pi(P) \cap \pi \neq \varnothing$ и выполняется одно из следующих условий:*

1) *P — неабелева группа и $P = G^{\mathfrak{N}_t\mathfrak{M}}$ при любом $t \in \pi \cap \pi(P)$;*

2) *$G = P \leftthreetimes H$, где $P = C_G(P)$ — p-группа, а H — такая монолитическая группа с монолитом Q, что $Q \not\subseteq \Phi(H)$, $Q = H^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{M}}$, $(|P|, |H|) = 1$ и либо $\pi \cap \pi(Q) = \varnothing$, либо $Q = H^{\mathfrak{M}}$ — t-группа, где $t \in \pi$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть h — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{H}$. Ввиду пунктов 2.30, 2.31, теоремы 7.12 и следствия 8.6 имеет место $h(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{M}$, если $p \in \pi$ и $h(p) = \mathfrak{H}$ при всяком $p \in \pi'$. Значит, ввиду следствия 7.13 экран h 1-кратно локален, т. е. $\mathfrak{H}$ — 2-кратно локальная формация. Следовательно, по теореме 18.9 $\mathfrak{F} = \mathfrak{l}\mathrm{form}\, G$, где G — такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что выполняется одно из следующих условий:

а) P — неабелева группа, и $P = G^{\mathfrak{N}_t\mathfrak{M}}$ при всяком $t \in \pi \cap \pi(P)$;

б) $G = P \leftthreetimes H$, где $P = C_G(P)$ — p-группа, а H — такая монолитическая группа с монолитом Q, что $Q \not\subseteq \Phi(H)$, $Q = H^{h(p)}$, $(|P|, |Q|) = 1$ и $Q \subseteq H^{h(q)}$ при любом $q \in \pi(Q)$. Так как $\mathfrak{S}_{\pi'}\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$, то, очевидно, $\pi(P) \cap \pi \neq \varnothing$. Пусть G удовлетворяет условию б). Тогда $p \in \pi$ и поэтому $Q = H^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{M}}$. Предположим, что $t \in \pi \cap \pi(Q)$. В этом случае $h(t) = \mathfrak{N}_t\mathfrak{M}$. Следовательно,

$$H/Q \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_q\mathfrak{M} = (\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{N}_q)\,\mathfrak{M} = \mathfrak{M}.$$

Значит, $Q = H^{\mathfrak{M}}$. Допустим, что Q — неабелева группа. Тогда, очевидно, $H \notin \mathfrak{H}$. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{l}\mathrm{form}\, H$. Понятно, что $P = \mathrm{F}_p(G)$. Таким образом,

$$f(p) = \mathrm{form}\,(G/\mathrm{F}_p(G)) = \mathrm{form}\, H = \mathrm{form}\,(H/\mathrm{F}_p(H)),$$

где f — минимальный локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Но поскольку Q — p'-группа, то $Q \subseteq F_p(H)$. Значит,

$$\operatorname{form} H = \operatorname{form}(H/Q).$$

Это противоречит лемме 18.2. Следовательно, остается заключить, что Q — t-группа. Таким образом, G удовлетворяет условию 2).

Достаточность вытекает из приведенного выше описания экрана h и теоремы 18.9. Следствие доказано.

Аналогичным образом можно убедиться в справедливости следующих утверждений.

18.11. Следствие. *Пусть* $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_{\pi'}\mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{M}$, *где* $\mathfrak{M}$ — *некоторая локальная формация. Тогда* $\mathfrak{F}$ *является минимальной локальной не* $\mathfrak{H}$-*формацией в том и только в том случае, когда* $\mathfrak{F} = \operatorname{lform} G$, *где* G — *такая монолитическая группа с монолитом* $P = G^{\mathfrak{H}}$, *что* $\pi(P) \cap \pi \neq \varnothing$ *и выполняется одно из следующих условий:*

1) $P = G^{\mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{M}}$ — *неабелева группа;*

2) $G = P \leftthreetimes H$, *где* $P = C_G(P)$ — p-*группа, а* H — *такая монолитическая группа с монолитом* $Q = H^{\mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{M}}$, *что* $Q \nsubseteq \Phi(H)$ *и* $(|P|, |Q|) = 1$.

18.12. Следствие. *Пусть* $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{S}_{\pi'}\mathfrak{M}$, *где* $\mathfrak{M}$ — *некоторая локальная формация. Тогда* $\mathfrak{F}$ *является минимальной локальной не* $\mathfrak{H}$-*формацией в том и только в том случае, когда* $\mathfrak{F} = \operatorname{lform} G$, *где* G — *такая монолитическая группа с монолитом* $P = G^{\mathfrak{H}}$, *что выполняется одно из следующих условий:*

1) $P = G^{\mathfrak{S}_{\pi'}\mathfrak{M}}$ — *неабелева группа;*

2) $G = P \leftthreetimes H$, *где* $P = C_G(P)$ — p-*группа, а* H — *такая монолитическая группа с абелевым монолитом* Q, *что* $(|P|, |Q|) = 1$ *и* $Q = H^{\mathfrak{S}_{\pi'}\mathfrak{M}}$.

18.13. Лемма. *Тогда и только тогда* $\mathfrak{F}$ — *минимальная неабелева формация, когда* $\mathfrak{F} = \operatorname{form} G$, *где* G — *одна из следующих групп*:

1) *ненильпотентная монолитическая группа с таким монолитом* P, *что* $P \nsubseteq \Phi(G)$ *и факторгруппа* G/P *абелева*;

2) *группа кватернионов порядка* 8;

3) *неабелева группа порядка* p^3 *простой нечетной экспоненты* p.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что $\mathfrak{F} \nsubseteq \mathfrak{N}$, и пусть G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{N}$. Тогда G — монолитическая группа с таким монолитом $P = G^{\mathfrak{N}}$, что $P \nsubseteq \Phi(G)$. Понятно также, что $\mathfrak{F} = \operatorname{form} G$. Ввиду леммы 18.2, $\operatorname{form}(G/P) \subset \operatorname{form} G$. Следовательно, ввиду условия $\mathrm{form}(G/P)$ — абелева формация. Поэтому G/P — абелева группа, т. е. G удовлетворяет условию 1).

Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$, A — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{A}$. Тогда все собственные факторы группы A абелевы и A — p-группа для некоторого простого p. Опираясь на хорошо известное описание групп, у которых все собственные факторы абелевы (см., например, [162]), нетрудно показать, что при $p > 2$ в $\mathrm{form}\, A$ содержится группа G порядка p^3 экспоненты p, а при $p = 2$ в $\mathrm{form}\, A$ входит группа G кватернионов порядка 8. При этом ясно, что $\mathfrak{F} = \mathrm{form}\, G$.

Достаточность. Если G удовлетворяет условию 1), то $\mathfrak{F}$ — минимальная не $\mathfrak{A}$-группа в силу леммы 18.2. Пусть G удовлетворяет условию 2), $\mathfrak{M} = \mathrm{var}\, G$ — многообразие, порожденное группой G. Хорошо известно, что в многообразии $\mathfrak{M}$ все собственные подмногообразия абелевы (см. § 4 главы 5 книги [52]). Так как при этом многообразие $\mathfrak{M}$ локально конечно, то по теореме 9.4 решетка $L(\mathfrak{M})$ его подмногообразий изоморфна решетке наследственных подформаций из $\mathrm{sform}\, G$. Но ввиду леммы 8.10 всякая нильпотентная формация наследственна. Значит, $\mathrm{sform}\, G = \mathrm{form}\, G$ и $\mathrm{form}\, G$ — минимальная неабелева формация. Аналогично разбирается случай, когда G удовлетворяет условию 3). Лемма доказана.

18.14. Теорема. *Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторая абелева формация, $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_{\pi'}\mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{M}$. Тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной локальной не $\mathfrak{H}$-формацией в том и только в том случае, когда $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}\, G$, где G — такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что $\pi \cap \pi(P) \neq \varnothing$ и либо P — неабелева группа, совпадающая с $(\mathfrak{N}_t\mathfrak{M})$-корадикалом G для всех $t \in \pi \cap \pi(P)$, либо $G = P \rtimes H$, где $P = C_G(P)$ — p-группа, а H — такая монолитическая группа с монолитом $Q = H^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{M}} \in \mathfrak{S}_{p'}$, что выполняется одно из следующих условий:*

1) *$\Phi(H) = \{1\}$ и либо Q — π'-группа, либо $Q = H^{\mathfrak{M}}$ — t-группа, где $t \in \pi$;*

2) *H — минимальная не $\mathfrak{M}$-группа и H — либо группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q, либо группа кватернионов порядка 8, либо циклическая примарная группа.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{S}_{\pi'}\mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{N}$. Тогда $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная не $(\mathfrak{S}_{\pi'}\mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{N})$-формация. По следствию 18.10 $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}\, G$, где G — такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{S}_{\pi'}\mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{N}}$, что $\pi \cap \pi(P) \neq \varnothing$ и либо P — неабелева группа, либо $G = P \rtimes H$, где $P = C_G(P)$ — p-группа, а H — такая **монолитическая** группа с монолитом Q, что $Q \not\subseteq \Phi(H)$; Q — p'-группа **и либо** Q — π'-группа, либо $Q = H^{\mathfrak{N}}$ — l-группа, где $l \in \pi$. **По лемме** 18.7 максимальная локальная подформация $\mathfrak{M}$ **формации** $\mathfrak{F}$ имеет такой внутренний локальный экран m, что $m(p) = \mathrm{form}(G/R)$, где $R/\mathrm{F}_p(G)$ — монолит группы $G/\mathrm{F}_p(G)$, $p \in \pi(P)$ и $m(p) = \mathrm{form}(G/\mathrm{F}_p(G))$ при всех $q \in \pi(G) \setminus \pi(P)$. По условию $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$. Значит, по следствию 8.4 $m \leqslant h$, где h — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{H}$. Ввиду теоремы 7.12 $h(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{M}$, если $p \in \pi$ и $h(p) = \mathfrak{H}$ при всяком $p \in \pi'$. Если P — неабелева группа, то $\mathrm{F}_p(G) = \{1\}$ при любом $p \in \pi(P)$. Следовательно, в этом случае P совпадает с $(\mathfrak{N}_t\mathfrak{M})$-корадикалом G при всех $t \in \pi \cap \cap \pi(P)$.

Пусть P — p-группа. Тогда $P = \mathrm{F}_p(G)$. Значит, имеем $\mathrm{form}(H/Q) = m(p) \subseteq \mathfrak{N}_p\mathfrak{M}$. Так как $G \notin \mathfrak{S}_{\pi'}\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{N}$, то $G \notin \mathfrak{H}$. Следовательно, $H \notin \mathfrak{N}_p\mathfrak{M}$. Значит, $Q = H^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{M}}$. Пусть $Q = H^{\mathfrak{N}}$ — l-группа, где $l \in \pi$. Тогда $H \in \mathfrak{H}$. Действительно, если $H \notin \mathfrak{H}$, то $\mathrm{lform}\, H = \mathfrak{F}$. Но Q — p'-группа. Следовательно,

$$f(p) = \mathrm{form}\, H = \mathrm{form}(H/\mathrm{F}_p(H)) = \mathrm{form}((H/Q)/\mathrm{F}_p(H/Q)).$$

Поэтому $\mathrm{form}\, H = \mathrm{form}(H/Q)$. Это противоречит лемме 18.2. Значит, $H \in \mathfrak{H}$. Следовательно,

$$H/\mathrm{F}_l(H) = H/Q \in h(l) = \mathfrak{N}_l\mathfrak{M}.$$

Поэтому $H/Q \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_l\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$. Значит, $Q = H^{\mathfrak{M}}$. Итак, в рассматриваемом случае $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}\, G$, где G — группа, удовлетворяющая условию.

Предположим теперь, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_{\pi'}\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{N}$. Пусть f — минимальный локальный экран формации $\mathfrak{F}$; h_1 — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{S}_{\pi'}\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{N}$. Тогда ввиду следствия 8.4 $f \leqslant h_1$. Так как $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная не $\mathfrak{H}$-формация, то по теореме 18.4 $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}\, G$, где G — такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что $f(p)$ — минимальная не $h(p)$-формация при всех $p \in \pi(P)$. Легко видеть, что $\pi \cap \pi(P) \neq \varnothing$. Пусть $p \in \pi \cap \pi(P)$. Тогда $h_1(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}$. Поэтому $f(p) \subseteq \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}$. Применяя теперь теорему 8.3, заключаем, что $f(p) \subseteq \mathfrak{N}_{p'}$. Отсюда и из того, что всякая собственная подформация формации $f(p)$ входит в $h(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{M}$, следует, что всякая собственная подформация формации $f(p)$ входит в $\mathfrak{M}$. Ясно, что $f(p) \not\subseteq \mathfrak{M}$. Значит, $f(p)$ — минимальная не $\mathfrak{M}$-формация.

Пусть формация $f(p)$ неабелева. Тогда $f(p)$ — нильпотентная минимальная неабелева формация. Значит, по лемме 18.13 $f(p)=\operatorname{form} H$, где H — либо неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q, либо группа кватернионов порядка 8. Заметим попутно, что H — минимальная не $\mathfrak{M}$-группа. Если же $f(p)$ — абелева формация, то, взяв в качестве H группу минимального порядка из $f(p)\setminus h(p)$, снова имеем $f(p)=\operatorname{form} H$. В любом из этих случаев группа H монолитична и $O_p(H)=\{1\}$. Следовательно, по лемме 18.8 существует точный неприводимый $F_p[H]$-модуль L. Пусть $F=L\leftthreetimes H$. По лемме 8.2 $F\in\mathfrak{F}$. Если $F\in\mathfrak{H}$, то $F/\mathrm{F}_p(F)=F/L\simeq H\in h(p)$. Это противоречит тому, что $f(p)=\operatorname{form} H\not\subseteq h(p)$. Значит, $F\notin\mathfrak{H}$. Поэтому $\mathfrak{F}=\operatorname{lform} F$, и группа F удовлетворяет условию теоремы. Этим завершено доказательство необходимости.

Достаточность. Пусть монолит P группы G абелев, а H удовлетворяет условию 2). Тогда $\mathrm{F}_p(G)=P$. Следовательно, $f(p)=\operatorname{form} H$. Используя лемму 18.13, легко показать, что $f(p)$ — минимальная не $\mathfrak{M}$-формация. Значит, поскольку $h(p)=\mathfrak{N}_p\mathfrak{M}$ и $f(p)\subseteq\mathfrak{N}_{p'}$, то $f(p)$ — минимальная не $h(p)$-формация. Привлекая следствие 18.5, заключаем, что в рассматриваемом случае $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная не $\mathfrak{H}$-формация. В остальных случаях $\mathfrak{F}$ является минимальной локальной не $\mathfrak{H}$-формацией ввиду леммы 18.7. Теорема доказана.

Применим теперь установленные нами общие свойства минимальных локальных не $\mathfrak{H}$-формаций к изучению конкретных формаций.

Минимальные локальные не π-разрешимые формации. 18.15. Пусть $\mathfrak{M}$ — формация π-разрешимых групп. Ввиду п. 3.26, $\mathfrak{M}$ локальна. Понятно также, что $\mathfrak{S}_{\pi'}\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{M}=\mathfrak{M}$. Следовательно, ввиду следствия 18.10 имеем: *тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная не π-разрешимая формация, когда $\mathfrak{F}=\operatorname{lform} G$, где G — монолитическая группа с таким неабелевым монолитом P, что $\pi\cap\pi(P)\neq\varnothing$ и группа G/P π-разрешима.*

Минимальные локальные не π-нильпотентные формации. 18.16. Легко видеть, что класс всех π-нильпотентных групп совпадает с классом $\mathfrak{S}_{\pi'}\mathfrak{N}_\pi$. Таким образом, ввиду следствия 18.10 имеем: *тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная не π-нильпотентная формация, когда $\mathfrak{F}=\operatorname{lform} G$, где G — такая монолитическая группа с монолитом P, что $\pi\cap\pi(P)\neq\varnothing$ и выполняется одно из следующих условий:* а) *группа P неабелева, G/P — p-группа, где $p\in\pi\cap\pi(P)$, причем если $|\pi\cap\pi(P)|>1$, то $G=P$ — простая неабелева группа;* б) *$G=P\leftthreetimes H$, где $P=C_G(P)$ — p-группа, а H — такая монолитическая группа с моноли-*

том Q, что $Q \not\subseteq \Phi(H)$, $(|P|, |Q|)=1$, H/Q — p-группа и либо $\pi(Q) \cap \pi = \varnothing$, либо $Q=H$ — группа порядка t, где $t \in \pi$.

Минимальные локальные не π-сверхразрешимые формации. Для каждого натурального числа n символом $\mathfrak{A}(n)$ будем обозначать класс всех тех абелевых групп, экспоненты которых делят n.

18.17. Теорема. *Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная не π-сверхразрешимая формация, когда $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}\, G$, где G — такая монолитическая группа с монолитом P, что $\pi \cap \pi(P) \neq \varnothing$ и либо P — неабелева группа, совпадающая с $(\mathfrak{N}_t\mathfrak{A}(t))$-корадикалом группы G при любом $t \in \pi \cap \pi(P)$, либо $G = P \rtimes H$, где $P = C_G(P)$ — p-группа, а H — такая монолитическая группа с монолитом*

$$Q = H^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)} \in \mathfrak{G}_{p'},$$

что выполняется одно из следующих условий:

1) *$\Phi(H)=\{1\}$ и либо Q — π'-группа, либо $|Q|=q$, где $q \in \pi$;*

2) *H — неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q, делящей $p-1$;*

3) *H — группа кватернионов порядка 8; 4 делит $p-1$;*

4) *H — такая циклическая примарная группа порядка q^n $(n \geqslant 1)$, что $(q^n, p-1)=q^{n-1}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{H}$ — формация всех π-сверхразрешимых групп. Как известно (см., например, [107]), $\mathfrak{H}$ имеет такой локальный экран h, что $h(p)=\mathfrak{A}(p-1)$ для любого простого числа $p \in \pi$ и $h(p)=\mathfrak{G}$, если $p \in \pi'$. Значит,

$$\mathfrak{H} = \bigcap_{p \in \pi} (\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)).$$

Поскольку по условию формация $\mathfrak{F}$ не π-сверхразрешима, то найдется такое простое число p, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}_1 = \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)$. Всякая собственная локальная подформация формации $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{H}$, а значит, и в $\mathfrak{H}_1$. Таким образом, $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная не $\mathfrak{H}_1$-формация. Следовательно, ввиду теоремы 18.14 $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}\, G$, где G — такая монолитическая группа с монолитом P, что $p \in \pi(P)$ и либо $P = G^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)}$, либо $G = P \rtimes H$, где $P = C_G(P)$ — p-группа, а H — такая монолитическая группа с монолитом $Q = H^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)} \in \mathfrak{G}_{p'}$, что выполняется одно из следующих условий: а) $\Phi(H)=\{1\}$; б) H — минимальная не $(\mathfrak{A}(p-1))$-группа и H — либо неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q, либо группа кватернионов порядка 8, либо примарная циклическая группа.

Пусть P — неабелева группа. Тогда по лемме 18.7 максимальная локальная подформация $\mathfrak{M}$ формации $\mathfrak{F}$ имеет такой локальный экран m, что $m(t) = \mathrm{form}(G/P)$ при всех $t \in \pi \cap \pi(P)$. По условию $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{S}_{t'}\mathfrak{N}_t\mathfrak{A}(t-1)$. Значит, $m \leqslant r$, где r — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{S}_{t'}\mathfrak{N}_t\mathfrak{A}(t-1)$. Ввиду пункта 2.31 и теоремы 7.12 $r(t) = \mathfrak{N}_t\mathfrak{A}(t-1)$. Следовательно, $G/P \in \mathfrak{N}_t\mathfrak{A}(t-1)$. При этом ясно, что $G \notin \mathfrak{N}_t\mathfrak{A}(t-1)$. Значит, P совпадает с $(\mathfrak{N}_t\mathfrak{A}(t-1))$-корадикалом группы G.

Пусть P — p-группа. Рассмотрим случай, когда H удовлетворяет условию а). Предположим, что Q не является π'-группой, и пусть $q \in \pi \cap \pi(Q)$. Допустим, что $\mathfrak{l}\mathrm{form}\, H = \mathfrak{F}$. Тогда поскольку Q — p'-группа, то

$$f(p) = \mathrm{form}(G/\mathrm{F}_p(G)) = \mathrm{form}(G/P) =$$
$$= \mathrm{form}\, H = \mathrm{form}(H/\mathrm{F}_p(H)) = \mathrm{form}(H/Q),$$

где f — минимальный локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Это противоречит лемме 18.2. Следовательно, $\mathfrak{l}\mathrm{form}\, H \subset \mathfrak{F}$, т. е. $H \in \mathfrak{H}$. Таким образом, группа H q-сверхразрешима. Значит, Q — циклическая группа, и поэтому $|Q| = q$.

И наконец, если H удовлетворяет условию б), то каждая максимальная подгруппа из H имеет экспоненту, делящую $p-1$. Следовательно, если H — группа кватернионов порядка 8, то 4 делит $p-1$. Если же H — примарная циклическая группа порядка q^n $(n \geqslant 1)$, то q^{n-1} делит $p-1$, но q^n не делит $p-1$, так как H не принадлежит формации $\mathfrak{A}(p-1)$. Значит, в этом случае $(q^n, p-1) = p^{n-1}$.

Достаточность. Покажем прежде, что $P = G^{\mathfrak{H}}$. Если P — неабелева группа, или если H удовлетворяет одному из условий 2)—4), то это очевидно. Пусть P — p-группа и H удовлетворяет условию 1). По условию

$$H/Q \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1) \subseteq \mathfrak{H}.$$

Следовательно, если Q — π'-группа, то H — π-сверхразрешимая группа, т. е. $G/P \in \mathfrak{H}$. Если же $|Q| = q$, то H — расширение циклической группы при помощи π-сверхразрешимой, т. е. в этом случае также $H \in \mathfrak{H}$. Заметим, что поскольку по условию

$$G/C_G(P) = G/P \notin \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1),$$

то $G \notin \mathfrak{H}$. Значит, P — $\mathfrak{H}$-корадикал группы G. Следовательно, ввиду следствия 18.5 для доказательства достаточности необходимо лишь установить, что $f(t)$ — минимальная не $(\mathfrak{N}_t\mathfrak{A}(t-1))$-формация при любом $t \in \pi(P)$. Если P — неабелева группа, или же если H удовлетворяет условию 1), то это вытекает из леммы 18.2 и того, что $G/P \in \mathfrak{N}_t\mathfrak{A}(t-1)$ (соответственно $H/Q \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)$).

Пусть P — p-группа и H удовлетворяет одному из условий 3)—4). Тогда

$$f(p) = \mathrm{form}\, H \subseteq \mathfrak{S}_{p'} \setminus \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1).$$

Пусть H удовлетворяет одному из пунктов 2)—3). Тогда по лемме 18.13 $f(p)$ — минимальная неабелева формация. При этом поскольку по условию экспонента группы H делит $p-1$, то всякаа собственная подформация формации $f(p)$ входит в $\mathfrak{A}(p-1)$. Таким образом, $f(p)$ — минимальная не $(\mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1))$-формация.

Пусть H удовлетворяет условию 4). Легко проверить, что $\mathfrak{A}(q^{n-1})$ — единственная максимальная подформация формации $\mathfrak{A}(q^n)$. Понятно также, что $\mathfrak{A}(q^n) = \mathrm{form}\, H$ и $\mathfrak{A}(q^{n-1}) = \mathrm{form}\, M$, где M — максимальная подгруппа группы H. Следовательно, поскольку $q^{n-1} = (p-1, q^n)$, то $\mathfrak{A}(q^{n-1}) \subseteq \mathfrak{A}(p-1)$, но

$$f(p) = \mathrm{form}\, H \not\subseteq \mathfrak{A}(p-1).$$

Таким образом, и в этом случае $f(p)$ является минимальной не $(\mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1))$-формацией. Теорема доказана.

Следствие. *Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная несверхразрешимая формация, когда $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}\, G$, где G — такая монолитическая группа с монолитом P, что либо P — неабелева группа, совпадающая с $(\mathfrak{N}_t\mathfrak{A}(t-1))$-корадикалом группы G при всяком $t \in \pi(P)$, либо $G = P \rtimes H$, где $P = C_G(P)$ — p-группа, а H — такая монолитическая группа с монолитом $Q = H^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)} \in \mathfrak{S}_{p'}$, что выполняется одно из следующих условий:*

1) *$\Phi(H) = \{1\}$; $|Q| = q$ — простое число;*

2) *H — неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q, делящей $p-1$;*

3) *H — группа кватернионов порядка 8; 4 делит $p-1$;*

4) *H — примарная циклическая группа порядка q^n; $(q^n, p-1) = q^{n-1}$.*

Минимальные локальные не π-замкнутые формации. 18.18. Группа называется *π-замкнутой*, если она имеет нормальную π-холловскую подгруппу. Класс всех π-замкнутых групп, очевидно, совпадает с $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}$. Таким образом, ввиду следствия 18.11 имеем: *тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная не π-замкнутая формация, когда $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}\, G$, где G — такая монолитическая группа с монолитом P, что $\pi' \cap \pi(P) \neq \varnothing$, факторгруппа G/P π-замкнута и выполняется одно из следующих условий:*

а) $P=G^{\mathfrak{S}_{\pi'}}$ — *неабелева группа*; б) $G=P\rtimes H$, *где* $P=C_G(P)$ — *p-группа, а H — такая монолитическая группа с монолитом* $Q=G^{\mathfrak{S}_{\pi'}}$, *что* $\Phi(H)=\{1\}$, $(|P|, |Q|)=1$.

Минимальные локальные не π-специальные формации. 18.19. Группа называется *π-специальной*, если она обладает нильпотентной нормальной π-холловской подгруппой. Класс всех π-специальных групп совпадает с классом $\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}$. Значит, ввиду следствия 18.12 имеем: *тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная не π-специальная формация, когда $\mathfrak{F}=\mathrm{lform}\, G$, где G — такая не π-специальная монолитическая группа с монолитом P, что факторгруппа G/P π-специальна и выполняется одно из следующих условий*: а) $P=G^{\mathfrak{S}_{\pi'}}$ — *неабелева группа*; б) $G=P\rtimes H$, *где* $P=C_G(P)$ — *p-группа, а H — такая монолитическая группа с абелевым монолитом Q, что* $(|P|, |Q|)=1$, $Q=H^{\mathfrak{S}_{\pi'}}$.

Минимальные локальные не π-разложимые формации. 18.20. Группа называется *π-разложимой*, если она одновременно π-специальна и π'-замкнута. Понятно, что класс всех π-разложимых групп совпадает с $\mathfrak{S}_{\pi'}\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}$. Ввиду пункта 2.31 и теоремы 7.12 формация $\mathfrak{S}_{\pi'}\mathfrak{S}_\pi$ имеет такой локальный экран h, что $h(p)=\mathfrak{S}_{\pi'}\mathfrak{S}_\pi$, если $p\in\pi'$ и $h(p)=\mathfrak{S}_\pi$, если $p\in\pi$. В свою очередь формация $\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}$ обладает локальным экраном t, все значения которого совпадают с $\mathfrak{S}_{\pi'}$. Значит, по следствию 8.6 формация всех π-разложимых групп имеет такой максимальный внутренний локальный экран f, что $f(p)=\mathfrak{N}_p$, если $p\in\pi$, и $f(p)=\mathfrak{S}_{\pi'}$, если $p\in\pi'$. Это в частности означает, что формация π-разложимых групп 2-кратно локальна. Используя это обстоятельство, теорему 18.9 и описание экрана f, легко убеждаемся, что справедливо следующее утверждение: *тогда и только тогда $\mathfrak{F}$-минимальная локальная не π-разложимая формация, когда $\mathfrak{F}=\mathrm{lform}\, G$, где G — такая монолитическая группа, что $\pi(G)\cap\pi\neq\varnothing$ и выполняется одно из следующих утверждений*: 1) G — *простая неабелева группа*; 2) G — *группа Шмидта*; 3) $G=P\rtimes H$, *где $P=C_G(P)$ — минимальная нормальная подгруппа группы G, H — простая неабелева группа, причем* $\pi\cap\pi(H)=\varnothing$.

Минимальные локальные не φ-дисперсивные формации. 18.21. Пусть φ — произвольное линейное упорядочение множества всех простых чисел. Группа G называется *φ-дисперсивной*, если она обладает таким рядом нормальных подгрупп

$$\{1\}=G_0\subset G_1\subset\ldots\subset G_t=G, \qquad t\geqslant 0,$$

что G_i/G_{i-1} — силовская p_i-подгруппа в G/G_{i-1} и $p_1\varphi p_2\varphi \ldots$ $\ldots \varphi p_t$. Опишем максимальный внутренний локальный экран формации всех φ-дисперсивных групп $\mathfrak{H}$. Для каждого простого числа p символом $\varphi(p)$ обозначим множество всех таких простых чисел q, что $p\varphi q$. Пусть h — такой локальный экран, что $h(p) = \mathfrak{S}_{\varphi(p)} \cap \mathfrak{H}$ для любого простого p. Покажем, что $\mathfrak{H} = \langle h \rangle$. Предположим, что $\mathfrak{H} \not\subseteq \langle h \rangle$ и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{H} \setminus \langle h \rangle$. Пусть монолит P группы G является p-группой. Тогда, очевидно, $G \in \mathfrak{S}_{\varphi(p)} \cap$ $\cap \mathfrak{H} = h(p)$. Значит, тем более $G/C_G(P) \in h(p)$. Заметим, что $G/P \in \langle h \rangle$. Таким образом, $G \in \langle h \rangle$. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{H} \subseteq \langle h \rangle$. Предположим, что обратное включение неверно, и пусть G — группа минимального порядка из $\langle h \rangle \setminus \mathfrak{H}$. Обозначим через P монолит группы G. Понятно, что P — абелева p-группа для некоторого простого p. Ввиду леммы 18.3 $P = C_G(P)$. Значит,

$$G/P \in h(p) = \mathfrak{S}_{\varphi(p)} \cap \mathfrak{H}.$$

Но тогда $G \in h(p) \subseteq \mathfrak{H}$. Полученное противоречие показывает, что $\langle h \rangle \subseteq \mathfrak{H}$. Таким образом, $\mathfrak{H} = \langle h \rangle$, при этом, очевидно, h — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{H}$. Из описания экрана h следует, что формация всех φ-дисперсивных групп 2-кратно локальна. Воспользовавшись теперь теоремой 18.9, можно легко установить, что справедливо следующее утверждение: *тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная не φ-дисперсивная формация, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{l}\mathrm{form}\, G$, где G — такая монолитическая группа с монолитом P, что выполняется одно из следующих условий:* 1) *P — неабелева группа, фактор-группа G/P φ-дисперсивна и G/P — π-группа, где π — множество всех таких простых чисел q, что $p\varphi q$ для любого $p \in \pi(P)$;* 2) *$G = P \leftthreetimes (Q \leftthreetimes N)$, где $P = C_G(P)$ — p-группа; $Q = C_{Q \leftthreetimes N}(Q)$ — q-группа, являющаяся минимальной нормальной подгруппой в $Q \leftthreetimes N$; группа $Q \leftthreetimes N$ φ-дисперсивна; кроме того, $q\varphi p$ и $p\varphi t$ для любого $t \in \pi(N)$.*

Минимальные локальные не $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-формации. 18.22. Класс $\mathfrak{H}$ всех групп с нильпотентным коммутантом совпадает, очевидно, с произведением $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ — класс всех абелевых групп. Таким образом, ввиду теоремы 18.14 имеем: *тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная не $\mathfrak{H}$-формация, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{l}\mathrm{form}\, G$, где G — такая монолитическая группа с монолитом P, что либо P — неабелева группа, совпадающая с коммутантом G, либо $G = P \leftthreetimes H$, где $P = C_G(P)$, а H — одна из следующих групп:* а) $Q \leftthreetimes N$, *где* $Q = C_H(Q) = H' \neq \{1\}$; б) *неабелева группа порядка* q^3 *простой нечетной экспоненты* q; в) *группа кватернионов порядка* 8.

§ 19. Минимальные n-кратно локальные не $\mathfrak{N}^m$-формации

При всяком натуральном m формация $\mathfrak{N}^m$ совпадает, очевидно, с классом всех тех разрешимых групп, нильпотентная длина которых не превосходит $\mathfrak{N}^m$. В данном параграфе мы дадим классификацию минимальных n-кратно локальных не $\mathfrak{N}^m$-формаций, т. е. n-кратно локальных формаций, не входящих в $\mathfrak{N}^m$, но у которых все собственные n-кратно локальные подформации в классе $\mathfrak{N}^m$ содержатся. Этот результат используется для характеризации разрешимых групп с заданной нильпотентной длиной.

В дальнейшем при $n > 0$ $\mathfrak{F}_n$ обозначает минимальный $(n-1)$-кратно локальный экран n-кратно локальной формации $\mathfrak{F}$. Нам потребуются следующие частные случаи соответственно теоремы 8.3 и следствия 8.4.

19.1. Лемма. *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathfrak{l}_n\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$, $n \geqslant 1$. *Тогда* $\mathfrak{F}_n(p) = \varnothing$, *если* $p \notin \pi(\mathfrak{X})$, *и* $\mathfrak{F}_n(p) = \mathfrak{l}_{n-1}\mathrm{form}\,(A/\mathrm{F}_p(A) \mid A \in \in \mathfrak{X}) = \mathfrak{l}_{n-1}\mathrm{form}\,(A \mid A \in \mathfrak{F} \cap h(p),\ \ \mathrm{O}_p(A) = \{1\})$, *где* h — *произвольный* $(n-1)$-*кратно локальный экран формации* $\mathfrak{F}$.

19.2. Лемма. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ — n-*кратно локальные формации*, $n \geqslant 1$. *Тогда* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ *в том и только в том случае, когда* $\mathfrak{F}_n \leqslant \mathfrak{H}_n$.

Для произвольной последовательности простых чисел $p_1, \ldots, p_n$ и всякой совокупности групп $\mathfrak{X}$ рекурсивно определим $\mathfrak{X}^{p_1 \ldots p_n}$ следующим образом: 1) $\mathfrak{X}^{p_1} = (A/\mathrm{F}_{p_1}(A) \mid A \in \mathfrak{X})$; 2) $\mathfrak{X}^{p_1 \ldots p_n} = (A/\mathrm{F}_{p_n}(A) \mid A \in \mathfrak{X}^{p_1 \ldots p_{n-1}})$. Последовательность $p_1, \ldots, p_n$ назовем *подходящей для* $\mathfrak{X}$, если $p_1 \in \pi(\mathfrak{X})$ и для любого $i \in \{2, \ldots, n\}$ число p_i принадлежит $\pi\left(\mathfrak{X}^{p_1 \ldots p_{i-1}}\right)$. Множество всех подходящих для $\mathfrak{X}$ последовательностей обозначим через $\mathrm{P}(\mathfrak{X})$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — n-кратно локальная формация $(n \geqslant 1)$, $p_1, \ldots, p_t$ — некоторая подходящая для $\mathfrak{F}$ последовательность $(t > n)$. Определим рекурсивно $(n-t-1)$-кратно локальный экран $\mathfrak{F}_n\ p_1 \ldots p_t$: 1) $\mathfrak{F}_n p_1 = (\mathfrak{F}_n(p_1))_{n-1}$; 2) $\mathfrak{F}_n p_1 \ldots p_t = (\mathfrak{F}_n p_1 \ldots p_{t-1}(p_n))_{n-t-1}$.

19.3. Лемма. *Пусть* $p_1, \ldots, p_t$ — *подходящая для* $\mathfrak{X}$ *последовательность*, $\mathfrak{F} = \mathfrak{l}_n\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$ *и* $n > t$. *Тогда* $\mathfrak{F}_n p_1 \ldots p_t$ — *такой локальный экран, что для всякого* $p \in \pi\left(\mathfrak{X}^{p_1 \ldots p_t}\right)$ *справедливо равенство* $\mathfrak{F}_n p_1 \ldots p_t(p) =$

$=\mathfrak{L}_{n-t-1}\mathrm{form}\,\mathfrak{X}^{p_1\ldots p_tp}$ *и* $\mathfrak{F}_np_1\ldots p_t(p)=\varnothing$, *если* $p\notin\pi(\mathfrak{X}^{p_1\ldots p_t})$.

Доказательство. Предположим сначала, что $t=1$. Тогда $\mathfrak{F}_np_1$ — минимальный $(n-2)$-кратно локальный экран формации $\mathfrak{F}_n(p_1)$. Пусть $p\in\pi(\mathfrak{X}^{p_1})$. Тогда

$$\mathfrak{F}_np_1(p)=\mathfrak{L}_{n-2}\mathrm{form}\,((\mathfrak{L}_{n-1}\mathrm{form}\,\mathfrak{X}^{p_1})^p)=$$
$$=\mathfrak{L}_{n-2}\mathrm{form}\,\mathfrak{X}^{p_1p}=\mathfrak{L}_{n-1-1}\mathrm{form}\,\mathfrak{X}^{p_1p}.$$

Если же $p\notin\pi(\mathfrak{X}^{p_1})$, то $p\notin\mathfrak{L}_{n-1}\mathrm{form}\,\mathfrak{X}^{p_1}$. Значит, $\mathfrak{F}_np_1(p)=\varnothing$.

Предположим, что $t\geqslant 2$. Понятно, что $\mathfrak{F}_np_1\ldots p_t=(\mathfrak{F}_n(p_1))_{n-1}p_2\ldots p_t$. Так как формация $\mathfrak{F}_n(p_1)$ $(n-1)$-кратно локальна, то по индукции для $\mathfrak{F}_n(p_1)=\mathfrak{L}_{n-1}\mathrm{form}\,\mathfrak{X}^{p_1}$ лемма верна. Пусть $p\in\pi(\mathfrak{X}^{p_1\ldots p_t})$. Тогда $p\in\pi((\mathfrak{X}^{p_1})^{p_2\ldots p_t})$. Следовательно,

$$(\mathfrak{F}_n(p_1))_{n-1}p_2\ldots p_t(p)=\mathfrak{L}_{n-1-(t-1)-1}\mathrm{form}\,((\mathfrak{X}^{p_1})^{p_2\ldots p_tp})=$$
$$=\mathfrak{L}_{n-t-1}\mathrm{form}\,\mathfrak{X}^{p_1\ldots p_tp}.$$

Значит, $\mathfrak{F}_np_1\ldots p_t(p)=\mathfrak{L}_{n-t-1}\mathrm{form}\,\mathfrak{X}^{p_1\ldots p_tp}$. С другой стороны, если $p\notin\pi(\mathfrak{X}^{p_1\ldots p_t})=\pi((\mathfrak{X}^{p_1})^{p_2\ldots p_t})$, то $(\mathfrak{F}_n(p_1))_{n-1}p_2\ldots p_t(p)=\varnothing$. Поэтому $\mathfrak{F}_np_1\ldots p_t(p)=\varnothing$. Лемма доказана.

19.4. Лемма. *Пусть A — монолитическая группа с неабелевым монолитом R. Тогда в формации $\mathfrak{F}=\mathfrak{L}_n\mathrm{form}\,A$ $(n\geqslant 1)$ имеется лишь одна максимальная n-кратно локальная подформация $\mathfrak{H}=\mathfrak{L}_n\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — такое множество групп, что $G\in\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда G — регулярное сплетение*

$$P_1\wr(P_2\wr\ldots\wr(P_n\wr((A/R)/O_{p_n}(A/R)))\ldots),$$

где $|P_i|=p_i$, $p_i\neq p_{i+1}$ $(i=1,\ldots,n-1)$ *и* $p_1,\ldots,p_n\in\pi(R)$.

Доказательство. Проведем индукцию по n. Пусть $n=1$. При всяком $p\in\pi(R)$ имеет место $F_p(A)=\{1\}$. Значит,

$$\mathfrak{F}_1(p)=\mathrm{form}\,(A/F_p(A))=\mathrm{form}\,A,$$

и поэтому $(A/R)/O_p(A/R)\in\mathfrak{F}_1(p)$. Используя теперь лемму 8.2, заключаем, что $P\wr((A/R)/O_p(A/R))\in\mathfrak{F}$, где P — группа порядка p. Таким образом, $\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{F}$. Покажем, что $\mathfrak{H}\neq\mathfrak{F}$. Пусть $p\in\pi(R)$. Тогда $\mathfrak{H}_1(p)\subseteq\mathrm{form}\,(A/R)$. Но по лемме 18.2

$$\mathrm{form}\,(A/R)\subset\mathrm{form}\,A=\mathfrak{F}_1(p).$$

Значит, $\mathfrak{H}\subset\mathfrak{F}$.

Покажем, что если $\mathfrak{M}$ — собственная локальная подформация $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $p \in \pi(R)$. Предположим, что $\mathfrak{M}_1(p) = \mathfrak{F}_1(p)$. Тогда $A \in \mathfrak{M}$. Значит, $\mathfrak{F} = \mathfrak{l}\mathrm{form}\, A \subseteq \mathfrak{M}$. Это противоречит определению формации $\mathfrak{M}$. Следовательно, $\mathfrak{M}_1(p) \subset \mathfrak{F}_1(p)$. Ввиду леммы 18.2, $\mathrm{form}(A/R)$ — единственная максимальная подформация формации $\mathrm{form}\, A$. Значит,

$$\mathfrak{M}_1(p) \subseteq \mathrm{form}(A/R) \subseteq \mathfrak{N}_p \mathfrak{H}_1(p).$$

Пусть $p \in \pi(A) \setminus \pi(R)$. Тогда ввиду лемм 19.1, 19.2 имеет место

$$\mathfrak{M}_1(p) \subseteq \mathfrak{F}_1(p) = \mathrm{form}(A/\mathrm{F}_p(A)) = \mathrm{form}\, \mathfrak{X}^p = \mathfrak{H}_1(p).$$

Таким образом, для всякого $p \in \pi(A) = \pi(\mathfrak{H})$ справедливо включение $\mathfrak{M}_1(p) \subseteq \mathfrak{N}_p \mathfrak{H}_1(p)$. Ввиду следствия 8.6 последнее влечет $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$. Следовательно, $\mathfrak{H}$ — единственная максимальная локальная подформация формации $\mathfrak{F}$.

Пусть $n \geqslant 2$, и предположим, что лемма верна при $n-1$. Обозначим через $\mathfrak{X}_1$ такое множество групп, что $G \in \mathfrak{X}_1$ тогда и только тогда, когда G — регулярное сплетение

$$P_2 \wr (P_3 \wr \ldots \wr (P_n \wr ((A/R)/\mathrm{O}_{p_n}(A/R))) \ldots),$$

где $|P_i| = p_i$, $p_i \neq p_{i+1}$ $(i = 2, \ldots, n-1)$ и $p_2, \ldots, p_n \in \pi(R)$. Пусть t — такой локальный экран, что $t(p) = \mathfrak{F}_n(p)$, если $p \in \pi(A) \setminus \pi(R)$, $t(p) = \mathfrak{l}_{n-1}\mathrm{form}\, \mathfrak{X}_1$ при всяком $p \in \pi(R)$ и $t(p) = \varnothing$, если $p \notin \pi(A)$.

Покажем, что t — внутренний экран формации $\langle t \rangle$. Пусть $B \in t(p)$, где $p \in \pi(R)$. Тогда для всех $q \in \pi(R)$ справедливо $B/\mathrm{F}_q(B) \in t(q)$. Пусть $q \in \pi(B) \setminus \pi(R)$. Легко видеть, что если $H \in \mathfrak{X}_1$, то $H/\mathrm{F}_q(H) \simeq A/\mathrm{F}_q(A)$. Значит,

$$\mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{S}_{\pi(A) \setminus \{q\}} \mathfrak{N}_q \mathfrak{l}_{n-1}\mathrm{form}(A/\mathrm{F}_q(A)).$$

Ввиду следствия 7.13,

$$\mathfrak{l}_{n-1}\mathrm{form}\, \mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{S}_{\pi(A) \setminus \{q\}} \mathfrak{N}_q \mathfrak{l}_{n-1}\mathrm{form}(A/\mathrm{F}_q(A)).$$

Поэтому

$$B/\mathrm{F}_q(B) \in \mathfrak{l}_{n-1}\mathrm{form}(A/\mathrm{F}_q(A)) = \mathfrak{F}_n(q) = t(q).$$

Итак, для всех $q \in \pi(B)$ справедливо $B/\mathrm{F}_q(B) \in t(p)$. Это означает, что $B \in \langle t \rangle$. Пусть $B \in t(p)$, где $p \in \pi(A) \setminus \pi(R)$. Тогда для всех $q \in \{p\} \cup \pi(R)$ справедливо $B/\mathrm{F}_q(B) \in t(q)$. Пусть $q \in \pi(A) \setminus (\{p\} \cup \pi(R))$. Так как $B \in t(p) = \mathfrak{F}_n(p) \subseteq \mathfrak{F}$, то $B/\mathrm{F}_q(B) \in \mathfrak{F}_n(q) = t(q)$. Таким образом, $B/\mathrm{F}_q(B) \in t(q)$

при всех $q \in \pi(B)$. Значит, $B \in \langle t \rangle$. Следовательно, t — внутренний экран формации $\langle t \rangle$.

Пусть теперь $\mathfrak{M}$ — произвольная нетривиальная n-кратно локальная подформация $\mathfrak{F}$. Тогда ввиду леммы 19.2 $\mathfrak{M}_n(p) \subseteq \mathfrak{F}_n(p)$ при всяком простом p. Следовательно, если $p \in \pi(A) \setminus \pi(R)$, то $\mathfrak{M}_n(p) \subseteq t(p) = \mathfrak{F}_n(p)$. Пусть $p \in \pi(R)$. Предположим, что $\mathfrak{M}_n(p) = \mathfrak{F}_n(p)$. Тогда поскольку по теореме 8.3

$$\mathfrak{F}_n(p) = \mathfrak{l}_{n-1}\mathrm{form}\,(A/\mathrm{F}_p(A)) = \mathfrak{l}_{n-1}\mathrm{form}\,A,$$

то $A \in \mathfrak{M}_n(p) \subseteq \mathfrak{M}$. Значит, $\mathfrak{F} = \mathfrak{l}_n\mathrm{form}\,A \subseteq \mathfrak{M}$. Это противоречит определению $\mathfrak{M}$. Следовательно, $\mathfrak{M}_n(p) \subset \mathfrak{F}_n(p)$. В силу нашего предположения $t(p)$ — единственная максимальная $(n-1)$-кратно локальная подформация в $\mathfrak{F}_n(p)$. Поэтому снова получаем, что $\mathfrak{M}_n(p) \subseteq t(p)$. Итак, при всяком простом p справедливо, что $\mathfrak{M}_n(p) \subseteq t(p)$. Это означает, что $\mathfrak{M} \subseteq \langle t \rangle$.

Пусть h — минимальный $(n-1)$-кратно локальный экран формации $\langle t \rangle$. Ввиду лемм 19.1 и 19.2 имеет место $h(p) = t(p)$ при всяком $p \in \pi(A) \setminus \pi(R)$ и $h(p) = \mathfrak{l}_{n-1}\mathrm{form}\,\mathfrak{X}_2$, где $\mathfrak{X}_2$ — такое множество групп H из $\mathfrak{X}_1$, что $\mathrm{O}_p(H) = \{1\}$. Покажем, что $h \leqslant \mathfrak{F}_n$. Для этого достаточно показать, что если $p \in \pi(R)$, то $h(p) \subseteq \mathfrak{F}_n(p)$. Пусть

$$H = P_2 \wr (P_3 \wr \ldots \wr (P_n \wr ((A/R)/\mathrm{O}_{p_n}(A/R))) \ldots) \in \mathfrak{X}_2,$$

где $|P_i| = p_i$, $p_i \neq p_{i+1}$ $(i = 2, \ldots, n-1)$ и $p_2, \ldots, p_n \in \in \pi(R)$. Тогда ввиду леммы 19.3 $L = (A/R)/\mathrm{O}_{p_n}(A/R) \in \in \mathfrak{F}_n p p_2 \ldots p_{n-1}(p_n)$. Значит, по лемме 8.2

$$P_n \wr L \in \mathfrak{F}_n p p_2 \ldots p_{n-2}(p_{n-1}),\ P_{n-1} \wr (P_n \wr L) \in \\ \in \mathfrak{F}_n p p_2 \ldots p_{n-3}(p_{n-2}),\ \ldots,\ H \in \mathfrak{F}_n(p).$$

Таким образом, $\mathfrak{X}_2 \subseteq \mathfrak{F}_n(p)$. Последнее влечет $h(p) \subseteq \mathfrak{F}_n(p)$. Итак, для всех простых p справедливо, что $h(p) \subseteq \mathfrak{F}_n(p)$. Значит, $\langle t \rangle \subseteq \mathfrak{F}$.

Покажем, что $\langle t \rangle \neq \mathfrak{F}$. Пусть $p_1, \ldots, p_n \in \pi(R)$. Тогда $\mathfrak{F}_n p_1 \ldots p_{n-1}(p_n) = \mathrm{form}\,A$. С другой стороны,

$$\langle t \rangle_n p_1 \ldots p_{n-1}(p_n) \subseteq \mathrm{form}\,(A/R) \subset \mathrm{form}\,A.$$

Следовательно, $\langle t \rangle \neq \mathfrak{F}$. Ввиду всего показанного $\langle t \rangle$ — единственная максимальная n-кратно локальная подформация $\mathfrak{F}$. Прямой проверкой можно убедиться, что для всякого $p \in \pi(A)$ значение на p экрана $\mathfrak{H}_n$ совпадает с $h(p)$. Таким образом, $\langle t \rangle = \mathfrak{H}$. Этим доказательство леммы завершено.

Для всякой разрешимой группы G через $l(G)$ будем обозначать нильпотентную длину G. Если G — единичная группа, то $l(G)=0$.

19.5. Лемма. *Пусть A — такая монолитическая группа с неабелевым монолитом R, что факторгруппа A/R разрешима и $l(A/R)=m$. Тогда формация $\mathfrak{F}=\mathfrak{l}_n\mathrm{form}\,A$ имеет максимальную n-кратно локальную подформацию, которая входит в $\mathfrak{N}^{n+m}$, но не входит в $\mathfrak{N}^{n+m-1}$.*

Доказательство. Утверждение леммы при $n=0$ является следствием леммы 18.2.

Пусть $n\geqslant 1$. По лемме 19.4 $\mathfrak{F}$ имеет такую максимальную n-кратно локальную подформацию $\mathfrak{H}$, что $\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{N}^{n+m}$. Следовательно, для доказательства леммы достаточно показать, что $\mathfrak{H}\nsubseteq\mathfrak{N}^{n+m-1}$. Поскольку по условию $l(A/R)=m$ и $\mathrm{F}(A/R)$ — пересечение всех централизаторов главных факторов факторгруппы A/R, то A/R имеет такой главный фактор $(H/R)/(K/R)$, что $l((A/R)/C_{A/R}((H/R)/(K/R)))=m-1$. Пусть $L=H/K\rightthreetimes A/C_A(H/K)$. Ясно, что $l(L)=m$. Пусть $p_1,\ldots,p_n\in\pi(R)$, $p_i\neq p_{i+1}$ $(i=1,\ldots,n-1)$ и $p_n\notin\pi(H/K)$. Обозначим через P_i одну из групп порядка p_i, $i=1,\ldots,n$. Тогда по лемме 19.4 группа

$$P_1\wr(P_2\wr\ldots\wr(P_n\wr((A/R)/\mathrm{O}_{p_n}(A/R)))\ldots)$$

принадлежит формации $\mathfrak{H}$. Следовательно, $(A/R)/\mathrm{O}_{p_n}(A/R)\in\in\mathfrak{H}_n p_1\ldots p_{n-1}(p_n)$. В главном ряде группы A/R, проходящем через $\mathrm{O}_{p_n}(A/R)$, найдется фактор $(M/R)/(D/R)$, проективный фактору $(H/R)/(K/R)$. Так как $p_n\notin\pi(H/K)$, то $\mathrm{O}_{p_n}(A/R)\subseteq D/R$. Значит, по лемме 3.32

$$E=M/D\rightthreetimes A/C_A(M/D)\in\mathrm{form}\,((A/R)/\mathrm{O}_{p_n}(A/R)).$$

Но ввиду леммы 3.28 $E\simeq L$. Следовательно, $L\in\mathfrak{H}_n p_1\ldots\ldots p_{n-1}(p_n)$. Применяя теперь лемму 8.2, заключаем, что группа $T=P_1\wr(P_2\wr\ldots\wr(P_n\wr L)\ldots)$ принадлежит формации $\mathfrak{H}$. При этом поскольку $\mathrm{O}_{p_n}(L)=\{1\}$, $(|P_i|,|P_{i+1}|)=1$ $(i=1,\ldots,n-1)$ и $l(L)=m$, то $l(T)=n+m$. Значит, $\mathfrak{H}\nsubseteq\mathfrak{N}^{n+m-1}$. Лемма доказана.

19.6. Лемма. *Пусть $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ — n-кратно локальные формации $(n\geqslant 0)$, причем $\mathfrak{H}\nsubseteq\mathfrak{F}$. Тогда если одна из формаций $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ разрешима, то в $\mathfrak{H}$ содержится минимальная n-кратно локальная не $\mathfrak{F}$-формация.*

Доказательство. Пусть A — группа минимального порядка из $\mathfrak{H}\setminus\mathfrak{F}$. Ввиду условия леммы $\mathfrak{S}$-корадикал $A^{\mathfrak{S}}$ группы A не имеет фраттиниевых A-главных факторов.

Значит, в силу теоремы 3.49 в формации $\mathfrak{l}_n\mathrm{form}\, A$ содержится лишь конечное множество n-кратно локальных подформаций. Так как при этом $\mathfrak{l}_n\mathrm{form}\, A \not\subseteq \mathfrak{F}$, но $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{l}_n\mathrm{form}\, A$, то из последнего вытекает, что в $\mathfrak{l}_n\mathrm{form}\, A$ найдется такая n-кратно локальная подформация $\mathfrak{M}$, что $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{F}$, но $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{F}$ справедливо для всякой собственной n-кратно локальной подформации $\mathfrak{M}_1$ из $\mathfrak{M}$. Значит, $\mathfrak{M}$ — минимальная n-кратно локальная не $\mathfrak{F}$-формация, входящая в $\mathfrak{H}$. Лемма доказана.

19.7. Лемма. *Пусть A — разрешимая группа с нильпотентной длиной $r \geqslant 1$. Тогда в $\mathrm{P}(A)$ найдется последовательность $p_1, \ldots, p_r$ длины r.*

Доказательство. Проведем индукцию по r. Основание индукции тривиально.

Пусть $r > 1$ и лемма верна для групп с нильпотентной длиной не больше $r-1$. Так как $\mathrm{F}(A) = \bigcap_{p \in \pi(A)} \mathrm{F}_p(A)$ и класс разрешимых групп с нильпотентной длиной, не превосходящей фиксированное натуральное число, является формацией, то найдется такое $p_1 \in \pi(A)$, что $l(A/\mathrm{F}_{p_1}(A)) = r-1$. Тогда в $\mathrm{P}(A/\mathrm{F}_{p_1}(A))$ имеется последовательность $p_2, \ldots, p_r$ длины $r-1$. Значит, последовательность $p_1, \ldots, p_r$ является подходящей для A и ее длина равна r. Лемма доказана.

19.8. Лемма. *Для любого класса групп $\mathfrak{X}$ имеет место*

$$\mathrm{P}(\mathfrak{X}) = \mathrm{P}(\mathfrak{l}_n\mathrm{form}\, \mathfrak{X}).$$

Доказательство. Пусть последовательность простых чисел $q_1, \ldots, q_d$ не принадлежит $\mathrm{P}(\mathfrak{X})$. Тогда $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H} = \mathfrak{S}_{q_1'}\mathfrak{N}_{q_1} \ldots \mathfrak{S}_{q_{n-1}'}\mathfrak{N}_{q_{n-1}}\mathfrak{S}_{q_n'}$ для некоторого $n \leqslant d$. Ввиду п. 2.31 для каждого множества простых чисел π класс $\mathfrak{S}_\pi$ — тотально локальная формация. Значит, ввиду следствия 7.14, $\mathfrak{H}$ — n-кратно локальная формация. Таким образом, $\mathfrak{l}_n\mathrm{form}\, \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$. Нетрудно заметить, что последовательность $q_1, \ldots, q_d$ не подходит для $\mathfrak{H}$. Значит, тем более она не является подходящей для формации $\mathfrak{l}_n\mathrm{form}\, \mathfrak{X}$. Таким образом, остается заключить, что $\mathrm{P}(\mathfrak{l}_n\mathrm{form}\, \mathfrak{X}) \subseteq \mathrm{P}(\mathfrak{X})$. Лемма доказана.

19.9. Теорема. *Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ — минимальная n-кратно локальная не $\mathfrak{N}^m$-формация ($m \geqslant 1, n \geqslant 0$), когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{l}_n\mathrm{form}\, G$, где G — одна из следующих групп:*

1) *монолитическая группа с таким неабелевым монолитом R, что факторгруппа G/R разрешима и $n + l(G/R) \leqslant m$;*

2) $P_1 \leftthreetimes (P_2 \leftthreetimes \ldots \leftthreetimes (P_t \leftthreetimes N) \ldots)$, *где* P_i — *самоцентрализуемая минимальная нормальная подгруппа в* $P_i \leftthreetimes (P_{i+1} \leftthreetimes \ldots \ldots \leftthreetimes (P_t \leftthreetimes N) \ldots)$, $i = 1, \ldots, t$, N — *разрешимая группа и* $t + l(N) = m + 1$, *причем если* $n \geqslant m$, *то* $t = m + 1$, *если же* $n < m$, *то* $t = n + 1$.

Доказательство. Достаточность. Если G удовлетворяет условию 1), то ввиду леммы 19.5 $\mathfrak{F}$ — минимальная n-кратно локальная не $\mathfrak{N}^m$-формация.

Пусть G удовлетворяет условию 2). Если $n = 0$, то $\mathfrak{F} = \operatorname{form}(P \leftthreetimes N)$, где $P = C_{P \leftthreetimes N}(P)$ — минимальная нормальная подгруппа в $P \leftthreetimes N$, N — разрешимая группа и $l(N) = m$. Ввиду леммы 18.2, $\operatorname{form} N$ — единственная максимальная подформация формации $\mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{F}$ — минимальная не $\mathfrak{N}^m$-формация.

Пусть $n \geqslant 1$ и $\{p_i\} = \pi(P_i)$, $i = 1, \ldots, t$. Понятно, что $P_1 = G^{\mathfrak{N}^m}$. Ввиду соображений индукции формация

$$\mathfrak{F}_n(p_1) = \mathfrak{l}_{n-1}\operatorname{form}(G/\mathrm{F}_{p_1}(G)) = \\ = \mathfrak{l}_{n-1}\operatorname{form}(P_2 \leftthreetimes (P_3 \leftthreetimes \ldots \leftthreetimes (P_t \leftthreetimes N) \ldots))$$

является минимальной $(n-1)$-кратно локальной не $\mathfrak{N}^{m-1}$-формацией. По лемме 8.2 $p_1 \neq p_2$. Значит, $\mathfrak{F}_n(p_1) \not\subseteq \mathfrak{N}_{p_1}\mathfrak{N}^{m-1}$. Следовательно, $\mathfrak{F}_n(p_1)$ — минимальная $(n-1)$-кратно локальная не $(\mathfrak{N}_{p_1}\mathfrak{N}^{m-1})$-формация. Так как $\mathfrak{N}^m = \mathfrak{N}\mathfrak{N}^{m-1}$, то по теореме 7.18 формация $\mathfrak{N}^m$ обладает таким локальным экраном h, что $h(p) = \mathfrak{N}^{m-1}$ для всякого простого числа p. Значит, по следствию 8.6 значение на p максимального внутреннего локального экрана формации $\mathfrak{N}^m$ совпадает с $\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}^{m-1}$. Применяя теперь следствие 18.6, заключаем, что в рассматриваемом случае $\mathfrak{F}$ также является минимальной n-кратно локальной не $\mathfrak{N}^m$-формацией.

Необходимость. При $n = 0$ утверждение следует из леммы 18.2. Пусть $n \geqslant 1$, и предположим, что при $n - 1$ теорема верна. По следствию 18.6 $\mathfrak{F} = \mathfrak{l}_n\operatorname{form} A$, где A — такая монолитическая группа с монолитом $A^{\mathfrak{N}^m}$, что для всех $p \in \pi(A^{\mathfrak{N}^m})$ формация $\mathfrak{F}_n(p)$ является минимальной $(n-1)$-кратно локальной не $(\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}^{m-1})$-формацией. Если $A^{\mathfrak{N}^m}$ — неабелева группа, то ввиду лемм 19.4 и 19.6 имеет место $n + l(A/A^{\mathfrak{N}^m}) \leqslant m$, т. е. A удовлетворяет условию 1).

Пусть $A^{\mathfrak{N}^m}$ — абелева группа, $p \in \pi(A^{\mathfrak{N}^m})$. Так как формация $\mathfrak{N}^m$ локальна, то $A^{\mathfrak{N}^m} \not\subseteq \Phi(A)$. Следовательно, $A^{\mathfrak{N}^m}$ обладает дополнением H в A. Отсюда, в частности, следует, что $\mathrm{F}_p(A) = A^{\mathfrak{N}^m}$. Понятно, что $\mathfrak{F}_n(p) = \mathfrak{l}_{n-1}\operatorname{form} H \not\subseteq \mathfrak{N}^{m-1}$. По лемме 19.6 в формацию $\mathfrak{F}_n(p)$ входит минимальная $(n-1)$-кратно локальная не $\mathfrak{N}^{m-1}$-формация $\mathfrak{M}$. Ввиду нашего предположения $\mathfrak{M} = \mathfrak{l}_{n-1}\operatorname{form} B$, где $B=P_2\leftthreetimes(P_3\leftthreetimes\ldots\leftthreetimes(P_t\leftthreetimes N)\ldots)$, P_i — самоцентрализуемая минимальная нормальная подгруппа в $P_i\leftthreetimes(P_{i+1}\leftthreetimes\ldots$ $\ldots\leftthreetimes(P_t\leftthreetimes N)\ldots)$, N — разрешимая группа, $(t-1)+l(N)=$ $=(m-1)+1$, причем если $n-1\geqslant m-1$, то $t-1=m$, если же $n-1<m-1$, то $t-1=(n-1)+1$.

Пусть P_2 не является p-группой. Тогда по лемме 18.8 существует точный неприводимый $F_p[B]$-модуль P_1. Пусть $G=P_1\leftthreetimes B$. Ввиду леммы 8.2 $G\in\mathfrak{F}$. При этом, очевидно, $l(G)=m+1$. Значит, $\mathfrak{F}=\mathfrak{l}_n\mathrm{form}\,G$. Легко видеть, что группа G удовлетворяет условию 2).

Предположим теперь, что P_2 — p-группа. По лемме 19.7 в $\mathrm{P}(B)$ найдется такая последовательность

$$p_2,\ \ldots,\ p_t,\ p_{t+1},\ \ldots,\ p_{t+l(N)} \qquad (\alpha)$$

длины m, что $p_i\in\pi(P_i)$, $i=2,\ \ldots,\ t$. Так как $B\in\mathfrak{l}_{n-1}\mathrm{form}\,H$, то ввиду леммы 19.8 последовательность (α) подходит для H. Заметим, что поскольку $p=p_2$, то $\mathrm{O}_{p_2}(H)=\{1\}$. Это означает, что если последовательность $q_1,\ \ldots,\ q_t$ подходит для H и $q_1=p_2$, то $r\leqslant m-1$. Но последовательность (α) имеет длину m. Полученное противоречие показывает, что рассматриваемый случай невозможен. Теорема доказана.

19.10. Следствие. *Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ — минимальная n-кратно локальная ненильпотентная формация, где $n\geqslant1$, когда $\mathfrak{F}=\mathfrak{l}_n\mathrm{form}\,G$ и выполняется одно из следующих условий:*

1) G — группа Шмидта;

2) $n=1$, G — простая неабелева группа.

19.11. Следствие. *Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная неметанильпотентная формация, когда $\mathfrak{F}=\mathfrak{l}\mathrm{form}\,G$, где G — такая монолитическая группа с монолитом P, что выполняется одно из следующих условий:*

1) $P=G^{\mathfrak{N}}$ — неабелева группа;

2) $G=P\leftthreetimes(Q\leftthreetimes N)$, где $P=C_G(P)$, $Q=C_{Q\leftthreetimes N}(Q)$ — минимальная нормальная подгруппа в $Q\leftthreetimes N$ и N — нильпотентная группа.

Применим теперь теорему 19.9 для доказательства следующего утверждения.

19.12. Теорема. *Тогда и только тогда группа G разрешима и ее нильпотентная длина не превышает $n+1$, когда в формации $\mathfrak{l}_n\mathrm{form}\,G$ наследственна каждая n-кратно локальная подформация.*

Предварительно докажем следующую лемму.

19.13. Лемма. *Пусть* $A=P_1\leftthreetimes(P_2\leftthreetimes\ldots\leftthreetimes(P_{n+1}\leftthreetimes N)\ldots)$, *где* N *— нильпотентная группа и* P_i *— самоцентрализуемая минимальная нормальная подгруппа в*

$$P_i\leftthreetimes(P_{i+1}\leftthreetimes\ldots\leftthreetimes(P_{n+1}\leftthreetimes N)\ldots),\qquad i=1,\ \ldots,\ n+1.$$

Тогда

$$P_1\leftthreetimes(P_2\leftthreetimes\ldots\leftthreetimes(P_n\leftthreetimes P_{n+1})\ldots)\notin \mathfrak{l}_n\mathrm{form}\,A.$$

Доказательство. Пусть $n=0$. Тогда $A=P_1\leftthreetimes N$, где $P_1=C_A(P_1)$ — минимальная нормальная подгруппа в A, $N\in\mathfrak{N}$. Пусть $p\in\pi(P_1)$. По лемме 8.2 $O_p(A/P_1)=\{1\}$. Следовательно, $(|P_1|,\ |N|)=1$. Значит, по лемме 18.2, $P_1\notin \mathrm{form}\,A$.

Пусть $n\geqslant 1$, и предположим, что лемма верна при $n-1$. Тогда

$$P_2\leftthreetimes(P_3\leftthreetimes\ldots\leftthreetimes(P_n\leftthreetimes P_{n+1})\ldots)\notin$$
$$\notin\mathfrak{l}_{n-1}\mathrm{form}\,(P_2\leftthreetimes(P_3\leftthreetimes\ldots\leftthreetimes(P_{n+1}\leftthreetimes N)\ldots))=$$
$$=\mathfrak{l}_{n-1}\mathrm{form}\,(A/F_{p_1}(A)),$$

где p_1 — простой делитель порядка группы $|P_1|$. Следовательно,

$$P_1\leftthreetimes(P_2\leftthreetimes\ldots\leftthreetimes(P_n\leftthreetimes P_{n+1})\ldots)\notin\mathfrak{l}_n\mathrm{form}\,A.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 19.12. Достаточность. Предположим, что группа G не является разрешимой с $l(G)\leqslant n+1$. Тогда

$$\mathfrak{F}=\mathfrak{l}_n\mathrm{form}\,G\not\subseteq\mathfrak{N}^{n+1}.$$

Ввиду леммы 19.6 найдется такая минимальная n-кратно локальная не $\mathfrak{N}^{n+1}$-формация $\mathfrak{M}$, что $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{F}$. По теореме 19.9 $\mathfrak{M}=\mathfrak{l}_n\mathrm{form}\,A$, где A — одна из следующих групп: 1) монолитическая группа с таким неабелевым монолитом P, что A/P — нильпотентная группа; 2) $P_1\leftthreetimes(P_2\leftthreetimes\ldots\leftthreetimes(P_n\leftthreetimes N)\ldots)$, где N — нильпотентная группа, P_i — самоцентрализуемая минимальная нормальная подгруппа в

$$P_i\leftthreetimes(P_{i+1}\leftthreetimes\ldots\leftthreetimes(P_{n+1}\leftthreetimes N)\ldots),\quad i=1,\ \ldots,\ n+1.$$

По условию формация $\mathfrak{M}$ наследственна. Следовательно, ввиду леммы 19.13 группа A не может удовлетворять условию 2).

Пусть A удовлетворяет условию 1); H — группа Шмидта, являющаяся подгруппой в P и $B=H/\Phi(H)$.

Пусть $\pi(B)=\{p, q\}$, причем в B нормальна силовская q-подгруппа. Понятно, что $B\in\mathfrak{M}$. Кроме того, ввиду леммы 19.13 формация $\mathrm{form}\, B$ не является наследственной. Следовательно, $n\geqslant 1$. Пусть $p_1, \ldots, p_n$ — такая последовательность простых чисел из $\pi(P)$, что $p_n\neq q$ и $p_i\neq p_{i+1}$ при любом $i=1, \ldots, n-1$. Ввиду леммы 18.8 найдется такая группа $T=P_1\leftthreetimes(P_2\leftthreetimes\ldots\leftthreetimes(P_n\leftthreetimes B)\ldots)$, в которой P_i — самоцентрализуемая минимальная нормальная подгруппа в $P_i\leftthreetimes(P_{i+1}\leftthreetimes\ldots\leftthreetimes(P_n\leftthreetimes B)\ldots)$ порядка $p_i^{\alpha_i}$, $i=1, \ldots, n$. Покажем, что $T\in\mathfrak{M}$. Для этого ввиду леммы 8.2 достаточно установить, что $B\in\mathfrak{M}_n p_1\ldots p_{n-1}(p_n)$. Прежде докажем индукцией по t $(1\leqslant t\leqslant n)$, что формация $\mathfrak{N}_{p_t}\mathfrak{M}_n p_1\ldots p_{t-1}(p_t)$ наследственна. При $t=1$ это вытекает из леммы 8.7. Пусть $t>1$ и предположим, что утверждение верно при $t-1$. Тогда $\mathfrak{H}=\mathfrak{N}_{p_{t-1}}\mathfrak{M}_n p_1\ldots$ $\ldots p_{t-2}(p_{t-1})$ — наследственная формация. Ввиду теоремы 7.18 формация $\mathfrak{H}$ имеет такой локальный экран h, что $h(p_{t-1})=\mathfrak{M}_n p_1\ldots p_{t-2}(p_{t-1})$ и

$$h(p)=(\mathfrak{M}_n p_1\ldots p_{t-2}(p_{t-1}))_{n+1-t}(p)$$

при любом простом $p\neq p_{t-1}$. Но $p_t\neq p_{t-1}$. Следовательно,

$$\mathfrak{N}_{p_t}((\mathfrak{M}_n p_1\ldots p_{t-2}(p_{t-1}))_{n+1-t}(p_t))=\mathfrak{N}_{p_t}\mathfrak{M}_n p_1\ldots p_{t-1}(p_t)$$

— наследственная формация. Таким образом, наследственной является и формация $\mathfrak{N}_{p_n}\mathfrak{M}_n p_1\ldots p_{n-1}(p_n)$. Так как для любого $p\in\pi(P)$ имеет место $\mathrm{F}_p(A)=\{1\}$, то $A\in\mathfrak{M}_n p_1\ldots$ $\ldots p_{n-1}(p_n)$. Следовательно, $B\in\mathfrak{N}_{p_n}\mathfrak{M}_n p_1\ldots p_{n-1}(p_n)$. Но $O_{p_n}(B)=\{1\}$, и поэтому $B\in\mathfrak{M}_n p_1\ldots p_{n-1}(p_n)$. Применив теперь лемму 8.2, имеем $T\in\mathfrak{M}$. Следовательно, $\mathfrak{l}_n\mathrm{form}\, T\subseteq\mathfrak{F}$. Значит, по условию формация $\mathfrak{l}_n\mathrm{form}\, T$ наследственна. С другой стороны, по лемме 19.13 эта формация наследственной не является. Полученное противоречие показывает, что $G\in\mathfrak{N}^{n+1}$, т. е. G — разрешимая группа и нильпотентная длина G не превосходит $n+1$.

Необходимость. Пусть теперь G — разрешимая группа с нильпотентной длиной не больше $n+1$. Тогда поскольку ввиду следствия 7.14 формация $\mathfrak{N}^{n+1}$ n-кратно локальна, то $\mathfrak{F}=\mathfrak{l}_n\mathrm{form}\, G\subseteq\mathfrak{N}^{n+1}$. Пусть H — произвольная подгруппа группы $A\in\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{F}$, где $\mathfrak{M}$ — n-кратно локальная формация. Тогда по лемме 8.10 $H\in\mathfrak{l}_n\mathrm{form}\, A\subseteq\mathfrak{M}$. Таким образом, всякая n-кратно локальная подформация формации $\mathfrak{F}$ наследственна. Теорема доказана.

19.14. Следствие. *Тогда и только тогда группа нильпотентна, когда в формации, ею порожденной, наследственны все подформации.*

19.15. Следствие. *Тогда и только тогда группа метанильпотентна, когда в локальной формации, ею порожденной, наследственны все локальные подформации.*

19.16. Следствие. *Пусть* $\mathfrak{F}$ — *n-кратно локальная формация. Тогда* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}^{n+1}$ *в том и только в том случае, когда каждая n-кратно локальная подформация из* $\mathfrak{F}$ *наследственна.*

19.17. Следствие. *Тогда и только тогда каждая композиционная подформация композиционной формации* $\mathfrak{F}$ *наследственна, когда* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}^2$.

Доказательство. Достаточно показать, что $\mathfrak{F}$ — разрешимая формация. Предположим противное. Тогда ввиду условия $\mathfrak{F}$ содержит простую неабелеву группу A. Легко видеть, что композиционная формация, порожденная A, совпадает с form A. Значит, по условию формация form A наследственна. Последнее, очевидно, неверно, ибо формации form A ввиду леммы 8.12 не принадлежат, например, силовские подгруппы из A.

§ 20. Применение критических формаций в вопросах классификации локальных формаций

Критические формации, описанные в двух предыдущих параграфах, могут быть использованы при решении различных вопросов теории формаций. Напомним, что при доказательстве основного результата § 8 нами было использовано описание минимальных локальных неметанильпотентных формаций. Полученная в § 19 классификация минимальных n-кратно локальных не $\mathfrak{N}^m$-формаций позволила дать характеризацию конечных разрешимых групп с заданной нильпотентной длиной. Особенно эффективно применение критических формаций в вопросах классификации локальных формаций с заданной системой подформаций. Ряд примеров такого рода применения критических формаций можно найти в данном и следующем параграфе главы.

Локальные формации с нильпотентным дефектом 2. 20.1. Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторая локальная формация групп, $\mathfrak{H}$ — непустой класс групп. Определим индуктивно понятие $\mathfrak{H}$-дефекта формации $\mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{H}$-дефект формации $\mathfrak{F}$ положим равным нулю. $\mathfrak{H}$-дефект формации $\mathfrak{F}$ полагаем равным n (n — натуральное число), если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, в $\mathfrak{F}$ имеется максимальная локальная подформация $\mathfrak{H}$-дефекта $n-1$ и среди других максимальных локальных подформаций из $\mathfrak{F}$ нет ни одной с $\mathfrak{H}$-дефектом меньшим, чем $n-1$.

В данном параграфе мы опишем локальные формации с $\mathfrak{N}$-дефектом (или, иначе, с *нильпотентным дефектом*) 2.

Пусть $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ — локальные формации, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Тогда если найдутся такие локальные формации $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n$, что $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}_n$, $\mathfrak{F}_1$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}_i$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{F}_{i-1}$ ($i = 2, \ldots, n$), то будем писать $|\mathfrak{F}:\mathfrak{H}|_l = n$. Если же $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$, то положим $|\mathfrak{F}:\mathfrak{H}|_l = 0$. Для произвольных двух локальных формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$, через $\mathfrak{F}/_l\mathfrak{M}$ обозначим решетку всех локальных формаций, заключенных между $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$. В дальнейшем вместо $\mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{F} = \operatorname{lform}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{F})$ мы будем писать $\mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{F}$.

20.2. Лемма. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — локальные формации. Тогда если n — $\mathfrak{H}$-дефект формации $\mathfrak{F}$, то $n = |\mathfrak{F}:\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}|_l$.*

Доказательство. Проведем индукцию по n. Пусть $n \geqslant 2$. Обозначим через $\mathfrak{F}_1$ такую максимальную локальную подформацию $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$-дефект которой равен $n-1$. Пусть $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{F}_1$. Тогда ввиду следствия 9.22 имеет место решеточный изоморфизм $\mathfrak{F}/_l\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H} \simeq \mathfrak{F}_1/_l\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{H}$. Так как $|\mathfrak{F}_1:\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{H}|_l = n-1$, то из последнего вытекает, что существует цепь $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}_0 \supseteq \mathfrak{M}_1 \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{M}_{n-1} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$, в которой $\mathfrak{M}_i$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{M}_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n-1$. Пусть $\mathfrak{M}_i$ — первая (считая в порядке возрастания индексов) формация с $\mathfrak{H}$-дефектом $\neq n$. Очевидно, $\mathfrak{H}$-дефект $\mathfrak{M}_i$ равен $n-1$ и $|\mathfrak{M}_i:\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{H}|_l = n-1$. Но $\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$, и поэтому $|\mathfrak{M}_i:\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{H}|_l = |\mathfrak{M}_i:\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}|_l = n-(i+1) < n-2$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}_1$, и поэтому $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{H}$. Значит, $|\mathfrak{F}:\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_l = n$. Лемма доказана.

20.3. Лемма. *Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — локальные формации, причем $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Тогда если m и n — $\mathfrak{H}$-дефекты формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно, то $m \leqslant n$.*

Доказательство. Ввиду следствия 9.20 решетки

$$\mathfrak{M} \vee_l (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F})/_l\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F} \text{ и } \mathfrak{M}/_l\mathfrak{M} \cap (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}) = \mathfrak{M}/_l\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$$

изоморфны. Значит, утверждение леммы 20.3 — следствие леммы 20.2.

20.4. Лемма. *Пусть $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{H}$ — локальные формации, причем $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{X}$. Тогда если m, r и t — $\mathfrak{H}$-дефекты формаций $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно, то $t \leqslant m + r$.*

Доказательство. Проведем индукцию по $m+r$. Основание индукции тривиально. Пусть $m+r\geqslant 1$. Тогда $\mathfrak{H}$-дефект хотя бы одной из формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{X}$ положителен. Пусть, например, $m\geqslant 1$. Обозначим через $\mathfrak{M}_m$ такую максимальную локальную подформацию из $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}$-дефект которой равен $m-1$. Ввиду соображений индукции $\mathfrak{H}$-дефект t_1 формации $\mathfrak{F}_1=\mathfrak{M}_m\vee_l\mathfrak{X}$ не превосходит $m-1+r$. Покажем, что $t\leqslant m+r$. Это справедливо, если $t=t_1$. Пусть $t_1\neq t$. Тогда ввиду решеточного изоморфизма

$$\mathfrak{M}\vee_l\mathfrak{X}/_l\mathfrak{M}_m\vee_l\mathfrak{X}\simeq\mathfrak{M}/_l(\mathfrak{X}\cap\mathfrak{M})\vee_l\mathfrak{M}_m$$

формация $\mathfrak{F}_1$ является максимальной локальной подформацией в $\mathfrak{F}$. В силу изоморфизмов

$$\mathfrak{F}_1/_l\mathfrak{F}_1\cap\mathfrak{H}\simeq\mathfrak{F}_1\vee_l\mathfrak{H}/_l\mathfrak{H},\qquad \mathfrak{F}/_l\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}\simeq\mathfrak{F}\vee_l\mathfrak{H}/_l\mathfrak{H},$$

леммы 20.2 и условия $t\neq t_1$ заключаем, что $\mathfrak{F}\vee_l\mathfrak{H}\neq\neq\mathfrak{F}_1\vee_l\mathfrak{H}$. Значит, $\mathfrak{H}\vee_l\mathfrak{F}/_l\mathfrak{H}\vee_l\mathfrak{F}_1\simeq\mathfrak{F}/_l\mathfrak{F}_1$. Следовательно, $\mathfrak{F}_1\vee_l\mathfrak{H}$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{F}\vee_l\mathfrak{H}$. Последнее означает, что $t_1=t-1$. Но $t_1\leqslant m-1+r$. Следовательно, $t\leqslant m+r$. Лемма доказана.

20.5. Лемма. *В точности тогда нильпотентный дефект локальной формации $\mathfrak{F}$ равен* 1, *когда $\mathfrak{F}=\mathfrak{M}\vee_l\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ — нильпотентная локальная формация, $\mathfrak{H}$ — минимальная локальная ненильпотентная формация, при этом*: 1) *всякая нильпотентная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M}\vee_l(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{N})$; всякая ненильпотентная локальная подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{H}\vee_l(\mathfrak{F}_1\cap\mathfrak{N})$.*

Доказательство. Необходимость. Так как формация $\mathfrak{F}$ ненильпотентна, то по лемме 19.6 в формацию $\mathfrak{F}$ входит некоторая минимальная локальная ненильпотентная формация $\mathfrak{H}$. По условию $\mathfrak{M}=\mathfrak{N}\cap\mathfrak{F}$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{F}=\mathfrak{M}\vee_l\mathfrak{H}$.

Достаточность вытекает из леммы 20.4. Докажем справедливость второго утверждения леммы. Так как $\mathfrak{N}\cap\mathfrak{H}$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{H}$, то из решеточного изоморфизма

$$((\mathfrak{N}\cap\mathfrak{H})\vee_l\mathfrak{M})\vee_l\mathfrak{H}/_l(\mathfrak{N}\cap\mathfrak{H})\vee_l\mathfrak{M}\simeq$$
$$\simeq\mathfrak{H}/_l\mathfrak{H}\cap((\mathfrak{H}\cap\mathfrak{N})\vee_l\mathfrak{M})=\mathfrak{H}/_l\mathfrak{H}\cap\mathfrak{N}$$

следует, что $(\mathfrak{N}\cap\mathfrak{H})\vee_l\mathfrak{M}$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{F}$. Следовательно, поскольку $\mathfrak{F}\not\subseteq\mathfrak{N}$, то всякая нильпотентная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $(\mathfrak{N}\cap\mathfrak{H})\vee_l\mathfrak{M}$. Предположим, что в $\mathfrak{F}$ имеется минимальная локальная нильпотентная подформация $\mathfrak{H}_1$, отличная от $\mathfrak{H}$. Пусть m, f, h и h_1 — минимальные локальные экраны соответственно формаций $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}_1$. Тогда ввиду теоремы 8.3 для всякого простого числа p имеет место $f(p) = \mathrm{form}(h(p) \cup m(p))$. Пусть формация $\mathfrak{H}$ разрешима. Тогда разрешимой является и формация $\mathfrak{H}_1$. По следствию 19.10 найдутся такие группы Шмидта H и H_1, что $\mathfrak{H} = \mathrm{lform}\, H$, $\mathfrak{H}_1 = \mathrm{lform}\, H_1$. Пусть $\pi(H) = \{p, q\}$, причем в H нормальна силовская p-подгруппа. В этом случае экран f таков, что $f(p) = \mathrm{form}\, Z_q$, где Z_q — группа порядка q и $f(t) = \mathfrak{E}$ при всех $t \in \pi(\mathfrak{F}) \setminus \{p\}$. Ввиду следствия 8.4 $h_1 \leqslant f$. Значит, $\pi(H_1) = \{p, q\}$ и в H_1 нормальна силовская p-подгруппа. Последнее в силу теоремы 8.3 и следствия 8.4 означает, что $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1$. Противоречие. Значит, формация $\mathfrak{H}$ не разрешима. По следствию 19.10 $\mathfrak{H} = \mathrm{lform}\, G$, где G — некоторая простая неабелева группа. Следовательно, экран f таков, что $f(p) = \mathrm{form}\, G$ при всех $p \in \pi(G)$ и $f(p) = \mathfrak{E}$ при всех $p \in \pi(\mathfrak{F}) \setminus \pi(G)$. Используя теперь следствие 19.10, а также теорему 8.3 и следствие 8.4, заключаем, что $\mathfrak{H}_1 = \mathrm{lform}\, G = \mathfrak{H}$. Последнее противоречит определению формации $\mathfrak{H}_1$. Таким образом, в формации $\mathfrak{F}$ нет минимальных локальных ненильпотентных подформаций, отличных от $\mathfrak{H}$.

Пусть теперь $\mathfrak{F}_1$ — произвольная ненильпотентная локальная подформация из $\mathfrak{F}$. Тогда в силу леммы 19.6 $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Следовательно, ввиду леммы 20.3

$$\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_1 \cap (\mathfrak{H} \vee_l \mathfrak{M}) = \mathfrak{H} \vee_l (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{M}).$$

Лемма доказана.

Локальную формацию $\mathfrak{F}$ назовем *приводимой*, если $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{X}_i\right)$, где $\{\mathfrak{X}_i \mid i \in I\}$ — множество всех собственных локальных подформаций из $\mathfrak{F}$.

20.6. Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — приводимая локальная формация. Тогда нильпотентный дефект формации $\mathfrak{F}$ в том и только в том случае равен 2, когда $\mathfrak{F}$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) *$\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{H}_2 \vee_l \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, а $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — различные минимальные локальные ненильпотентные формации;*

2) *$\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \vee_l \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, $\mathfrak{H}$ — неприводимая локальная формация, нильпотентный дефект которой равен 2, $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{H}$.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 1). Тогда ввиду леммы 20.4 нильпотентный дефект формации $\mathfrak{F}$ не превосходит 2. Ввиду леммы 20.4 и 20.5 $\mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{H}_2$ — локальная формация с нильпотентным дефектом 2. Значит, в силу леммы 20.3 нильпотентный дефект $\mathfrak{F}$ равен 2. Случай, когда $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 2), очевиден.

Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}_1$ — такая максимальная локальная подформация в $\mathfrak{F}$, нильпотентный дефект которой равен 1. Тогда по лемме 20.5 $\mathfrak{F}_1=\mathfrak{H}_1\vee_l\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{N}$, а $\mathfrak{H}_1$ — минимальная локальная ненильпотентная формация. Предположим, что в $\mathfrak{F}$ имеется минимальная локальная ненильпотентная подформация $\mathfrak{H}_2$, отличная от $\mathfrak{H}_1$. Ввиду леммы 20.5 $\mathfrak{H}_2\not\subseteq\mathfrak{F}_1$. Значит, $\mathfrak{F}=\mathfrak{H}_1\vee_l(\mathfrak{H}_2\vee_l\mathfrak{M})$, т. е. в этом случае $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 1). Пусть теперь в $\mathfrak{F}$ нет минимальных локальных ненильпотентных подформаций, отличных от $\mathfrak{H}_1$. Индукцией по $|\pi(\mathfrak{F})|$ покажем, что в этом случае $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 2). Так как по условию $\mathfrak{F}$ — приводимая локальная формация, то в $\mathfrak{F}\setminus\mathfrak{F}_1$ найдется такая группа G, что $\mathfrak{F}_0=\mathrm{lform}\,G\neq\mathfrak{F}$. Пусть n — нильпотентный дефект формации $\mathfrak{F}_0$. Ввиду условия теоремы и леммы 20.3 $n\leqslant 2$. Так как $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_1\vee_l\mathfrak{F}_0$, то в силу леммы 20.4 будет $n\geqslant 1$. Пусть $n=1$. Тогда $\mathfrak{F}_0=\mathfrak{H}_1\vee_l\mathfrak{M}_1$, где $\mathfrak{M}_1\subseteq\mathfrak{N}$ и

$$\mathfrak{F}=(\mathfrak{H}_1\vee_l\mathfrak{M})\vee_l(\mathfrak{H}_1\vee_l\mathfrak{M}_1)=\mathfrak{H}_1\vee_l(\mathfrak{M}\vee_l\mathfrak{M}_1).$$

Последнее ввиду леммы 20.3 противоречит условию. Значит, $n=2$. Понятно, что $\mathfrak{F}_1\not\subseteq\mathfrak{F}_0$. Следовательно, $\mathfrak{M}\not\subseteq\mathfrak{F}_0$. Поэтому $|\pi(\mathfrak{F}_0)|<|\pi(\mathfrak{F})|$. Таким образом, если $\mathfrak{F}_0$ — приводимая локальная формация, то мы можем считать, что $\mathfrak{F}_0=\mathfrak{M}_3\vee_l\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}_3\subseteq\mathfrak{N}$, $\mathfrak{H}$ — неприводимая локальная формация, нильпотентный дефект которой равен 2 и $\mathfrak{M}_3\not\subseteq\mathfrak{H}$. Но тогда $\mathfrak{F}=(\mathfrak{M}\vee_l\mathfrak{M}_3)\vee_l\mathfrak{H}$, т. е. $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 2). Это же справедливо и в случае, если $\mathfrak{F}_0$ — неприводимая локальная формация, так как $\mathfrak{F}=\mathfrak{M}\vee_l\mathfrak{F}_0$ и $\mathfrak{F}_0\neq\mathfrak{F}$. Теорема доказана.

20.7. Теорема. *В точности тогда $\mathfrak{F}$ — неприводимая локальная формация с нильпотентным дефектом 2, когда $\mathfrak{F}=\mathrm{lform}\,G$, где G — такая монолитическая группа с монолитом R, что либо R — неабелева группа, G/R — прямое произведение изоморфных простых неабелевых групп и $\pi(R)\subseteq\pi(G/R)$, либо $G=R\rtimes H$, где $R=C_G(R)$ — минимальная нормальная p-подгруппа в G, а H — одна из следующих групп:*

1) *простая неабелева p'-группа;*

2) *$Q\rtimes N$, где $Q=C_{Q\rtimes N}(Q)$ — минимальная нормальная q-подгруппа в $Q\rtimes N$ $(q\neq p)$, а N — либо группа порядка p, либо прямое произведение изоморфных простых неабелевых групп и $p,\ q\in\pi(N)$;*

3) *неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты $q \neq p$;*

4) *циклическая примарная группа порядка q^2, где q — простое число $\neq p$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{M}$ — максимальная локальная подформация формации $\mathfrak{F}$. Тогда поскольку $\mathfrak{F}$ — неприводимая локальная формация, то всякая собственная локальная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M}$. Значит, $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная не $\mathfrak{M}$-формация. Пусть f и m — минимальные локальные экраны соответственно формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$. Тогда по следствию 18.5 и следствию 8.6 $\mathfrak{F} = \mathfrak{l}\mathrm{form}\, G$, где G — такая монолитическая группа с монолитом $G^{\mathfrak{M}}$, что $f(p)$ — минимальная не $(\mathfrak{N}_p m(p))$-формация для любого $p \in \pi(G^{\mathfrak{M}})$.

Ввиду условия теоремы нильпотентный дефект формации $\mathfrak{M}$ равен 1. Значит, по лемме 20.5 $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \vee_l \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{N}$, а $\mathfrak{H}$ — минимальная локальная ненильпотентная формация. По следствию 19.10 $\mathfrak{H} = \mathfrak{l}\mathrm{form}\, G$, где G — либо группа Шмидта, либо некоторая простая неабелева группа. Рассмотрим сначала случай, когда формация $\mathfrak{M}$ неразрешима. Тогда по теореме 8.3 $m(t) = \mathrm{form}\, B$ при всех $t \in \pi(B)$ и $m(t) = \mathfrak{E}$ при всех $t \in \pi(\mathfrak{M}) \setminus \pi(B)$. Предположим, что $G^{\mathfrak{M}}$ — неабелева группа. В этом случае ввиду леммы 18.7 и 9.14 экран m таков, что $m(p) = \mathrm{form}((G/G^{\mathfrak{M}})/\mathrm{O}_p(G/G^{\mathfrak{M}}))$ при всех $p \in \pi(G^{\mathfrak{M}})$ и $m(p) = \mathrm{form}(G/\mathrm{F}_n(G))$ при всех $p \in \pi(G) \setminus \pi(G^{\mathfrak{M}})$. Следовательно, поскольку для всех $p \in \pi(G^{\mathfrak{M}})$ и $q \in \pi(G) \setminus \pi(G^{\mathfrak{M}})$ имеет место $\mathrm{O}_p(G/G^{\mathfrak{M}}) \subseteq \mathrm{F}_q(G/G^{\mathfrak{M}})$ и, кроме того, $\mathrm{F}_q(G/G^{\mathfrak{M}}) = \mathrm{F}_q(G)/G^{\mathfrak{M}}$, то $G/G^{\mathfrak{M}}$ — прямое произведение изоморфных копий группы B. Пусть найдется такое простое число p, что $p \in \pi(G^{\mathfrak{M}}) \setminus \pi(G/G^{\mathfrak{M}})$. Тогда $p \notin \pi(B)$. Следовательно, в силу первого описания экрана m имеет место $m(p) = \mathfrak{E}$. Но из второго описания m следует, что $m(p) = \mathrm{form}(G/G^{\mathfrak{M}})$. Противоречие. Значит, $\pi(G^{\mathfrak{M}}) \subseteq \subseteq \pi(G/G^{\mathfrak{M}})$. Таким образом, в рассматриваемом случае G удовлетворяет условию теоремы.

Пусть $G^{\mathfrak{M}}$ — p-группа. Легко показать, что в $f(p) \setminus m(p)$ найдется такая монолитическая группа A, что $\mathrm{O}_p(A) = \{1\}$. Понятно, что $f(p) = \mathrm{form}\, A$. Обозначим через L монолит группы A. Ввиду леммы 18.2, $\mathrm{form}(A/L) \neq f(p)$. Значит, $(A/L)/\mathrm{O}_p(A/L) \in m(p)$.

Предположим, что $p \notin \pi(B)$. Тогда $m(p) = \mathfrak{E}$. Следовательно, A/L — p-группа. Пусть $p \in \pi(L)$. Тогда поскольку $\mathrm{O}_p(A) = 1$, то L — неабелева группа. Значит, $\mathrm{F}_p(A) = \{1\}$. Следовательно, поскольку $A \notin m(p)$, то $A \notin \mathfrak{M}$. Поэтому

$\mathfrak{F}=\mathfrak{l}\mathrm{form}\, A$. Пусть $q\in\pi(B)$. Тогда ввиду теоремы 8.3 $q\in\pi(L)$. Но $m\leqslant f$. Значит, $B\in f(q)=\mathrm{form}\,(A/\mathrm{F}_q(A))=\mathrm{form}\,A$. По лемме 18.2 $\mathrm{form}\,(A/L)$—единственная максимальная подформация $f(q)$. Следовательно, $\mathrm{form}\,A=\mathrm{form}\,B$. Это означает, что $A\simeq B$. Но тогда $p\in\pi(B)$. Противоречие. Таким образом, $p\notin\pi(L)$, и поэтому по теореме 8.3 $\mathfrak{l}\mathrm{form}\,A\neq\mathfrak{F}$. Значит, $A\in\mathfrak{M}$. Пусть $q\in\pi(L)$. Допустим, что L является q-группой. Тогда, очевидно, $L=\mathrm{F}_q(A)$. Следовательно, $A/L\in m(q)$. Но A/L—p-группа. Значит, $A=L$—группа порядка q. В этом случае $\mathfrak{F}=\mathfrak{l}\mathrm{form}\,T$, где T—группа Шмидта. Но тогда ввиду леммы 20.5 нильпотентный дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1. Противоречие. Значит, L—неабелева группа. Следовательно, $\mathrm{F}_q(A)=\{1\}$. Поэтому $A\simeq A/\mathrm{F}_q(A)\in m(q)=\mathrm{form}\,B$. Так как при этом группа A монолитична, то $A\simeq B$. По лемме 18.7 существует точный неприводимый $F_p[B]$-модуль P. Пусть $N=P\leftthreetimes B$. Тогда, очевидно, $\mathfrak{F}=\mathfrak{l}\mathrm{form}\,N$ и N удовлетворяет условию 1).

Пусть $p\in\pi(B)$, $q\in\pi(L)\setminus\{p\}$. Тогда $m(p)=\mathrm{form}\,B$. Предположим, что L—неабелева группа. Тогда $A/\mathrm{F}_q(A)\simeq A\in f(q)$. Но

$$G/\mathrm{F}_q(G)\simeq(G/G^{\mathfrak{M}})/(\mathrm{F}_q(G)/G^{\mathfrak{M}})=(G/G^{\mathfrak{M}})/\mathrm{F}_q(G/G^{\mathfrak{M}}).$$

Значит, $m(q)=f(q)$. Из этого следует, что $A\simeq B$. Но тогда $A\in m(p)$. Противоречие. Следовательно, в рассматриваемом случае группа L абелева. Пусть $H=L\leftthreetimes A/C_A(L)$. По лемме 3.32 $H\in f(p)$. При этом ясно, что $\mathfrak{l}\mathrm{form}\,H\neq\mathfrak{F}$. Значит, $H\in\mathfrak{M}$. Поэтому $H/\mathrm{F}_q(H)\simeq A/C_A(L)\in m(q)$. Легко видеть, что $C_A(L)\neq A$. Следовательно, $A/C_A(L)$—прямое произведение групп, изоморфных B. Пусть P—точный неприводимый $F_p[H]$-модуль и $M=P\leftthreetimes H$. Нетрудно заметить, что $\mathfrak{l}\mathrm{form}\,M=\mathfrak{F}$ и $q\in\pi(B)$. Таким образом, группа M удовлетворяет условию 2).

Рассмотрим теперь случай, когда формация $\mathfrak{M}$ разрешима. Тогда $\mathfrak{H}\cup\mathfrak{M}_1\subseteq\mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Следовательно, $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Предположим, что $\mathfrak{F}\not\subseteq\mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Тогда $\mathfrak{F}$—минимальная локальная не $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-формация. Значит, ввиду п. 18.22, $\mathfrak{F}=\mathfrak{l}\mathrm{form}\,D$, где D—такая монолитическая группа с монолитом P, что либо P—неабелева группа, совпадающая с коммутантом группы D, либо $D=P\leftthreetimes H$, где $P=C_D(P)$—p-группа, а H—одна из следующих групп: а) $Q\leftthreetimes N$, где $Q=C_{Q\leftthreetimes N}(Q)=(Q\leftthreetimes N)^{\mathfrak{A}}\neq\{1\}$—минимальная нормальная q-подгруппа в $Q\leftthreetimes N$; б) неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q; в) группа кватернионов порядка 8. Легко видеть, что найдется такое $l\in\pi(\mathfrak{M})$, что $m(l)=$

$=\mathfrak{l}\mathrm{form}\, F$, где F — группа простого порядка $e \neq l$ и $m(r) = \mathfrak{G}$ при всех $r \in \pi(\mathfrak{M}) \setminus \{l\}$. Пусть P — неабелева группа. Тогда по лемме 18.7 $m(t) = \mathrm{form}((D/P)/O_t(D/P))$ при всех $t \in \pi(P)$. Пусть $r \in \pi(P) \setminus \{l\}$. Тогда, с одной стороны, $m(r) = \mathfrak{G}$, с другой — $m(r) = \mathrm{form}((D/P)/O_r(D/P))$. Значит, D/P — r-группа. Следовательно, поскольку $|\pi(P) \setminus \{l\}| \geqslant 2$, то D — простая неабелева группа. Ввиду следствия 19.10 формация $\mathfrak{l}\mathrm{form}\, D$ имеет нильпотентную максимальную локальную подформацию. Это противоречит условию. Значит, P — абелева группа. Пусть H удовлетворяет условию а). Тогда, ввиду лемм 18.7 и 9.14, $m(p) = \mathrm{form}(N/O_p(N))$, $m(q) = \mathrm{form}\, N$ и $m(t) = \mathfrak{G}$ при всех $t \in \pi(N) \setminus \{p\}$. Сравнивая такое описание экрана m с данным выше, заключаем, что $l = q$ и $p = e$. Отсюда вытекает, что $N \in \mathrm{form}\, F$. Являясь неприводимой абелевой группой автоморфизмов, группа N циклична, т. е. $|N| = e$. Таким образом, в рассматриваемом случае группа H удовлетворяет условию 2).

Пусть H удовлетворяет условию в). Тогда регулярное сплетение $F = E \wr K$, где E и K — соответственно циклические группы порядков p и 4, принадлежит $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{l}\mathrm{form}\, F \neq \mathfrak{F}$. Но всякая собственная локальная подформация формации $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M}$. Значит, $\mathfrak{l}\mathrm{form}\, F = \mathfrak{F}$. Противоречие. Следовательно, рассматриваемый случай невозможен.

Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Так как формация $\mathfrak{M}$ локальная, то $G^{\mathfrak{M}} \not\subseteq \Phi(G)$. Следовательно, $G^{\mathfrak{M}}$ имеет в G дополнение T. Понятно, что $G^{\mathfrak{M}} = \mathrm{F}(G)$. Значит, $T \in \mathfrak{A}$. Так как при этом T — неприводимая группа автоморфизмов, то T — циклическая группа. Применяя теперь теорему 18.4, заключаем, что $|T| = q^2$, где q — простое число $\neq p$. Таким образом, G удовлетворяет условию 4).

Достаточность. Пусть R — неабелева группа. Тогда по лемме 18.7 в $\mathfrak{F}$ имеется лишь одна максимальная локальная подформация $\mathfrak{M}$, минимальный локальный экран m которой таков, что $m(p) = \mathrm{form}(G/R)$ при всех $p \in \pi(R)$. Так как G/R — прямое произведение изоморфных простых неабелевых групп и $\pi(R) \subseteq \pi(G/R)$, то $\mathfrak{M} = \mathfrak{l}\mathrm{form}(G/R)$ и по следствию 19.10 $\mathfrak{M}$ — минимальная локальная ненильпотентная формация. Следовательно, в рассматриваемом случае $\mathfrak{F}$ — неприводимая локальная формация с нильпотентным дефектом 2.

Пусть H удовлетворяет условию 1). Обозначим через $\mathfrak{M}$ формацию $\mathfrak{l}\mathrm{form}\, H \vee_l \mathfrak{N}_p$, а через m — ее минимальный локальный экран. Так как $m(p) = \mathfrak{G}$ — единственная максимальная подформация в $f(p)$ (здесь, как и выше, f — минимальный локальный экран формации $\mathfrak{F}$) и, как нетрудно заметить, $f(t)=m(t)$ при всех простых $t\neq p$, то $\mathfrak{M}$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{H}$ — произвольная собственная локальная подформация в $\mathfrak{F}$, h — ее минимальный локальный экран. Тогда $h\leqslant f$, причем найдется такое простое число t, что $h(t)\neq f(t)$. Если $t=p$, то $h(t)\subseteq\mathfrak{E}=m(t)$. Значит, $h\leqslant m$ и $\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{M}$. Пусть $h(p)=f(p)$. Тогда, очевидно, $G\in\mathfrak{H}$. Следовательно, $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{H}$. Это противоречит определению формации $\mathfrak{H}$. Таким образом, $\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{M}$, т. е. $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная не $\mathfrak{M}$-формация. По лемме 20.5 нильпотентный дефект $\mathfrak{M}$ равен 1. Значит, $\mathfrak{F}$ неприводима и имеет $\mathfrak{N}$-дефект 2.

Пусть H удовлетворяет условию 2). Тогда ввиду леммы 18.7 $\mathfrak{F}$ — неприводимая локальная формация, причем минимальный локальный экран m максимальной локальной подформации $\mathfrak{M}$ из $\mathfrak{F}$ таков, что $m(p)=$ $=\mathrm{form}\,(N/O_p(N))$ и $m(t)=\mathrm{form}\,N$ при всех $t\in\pi(N)\diagdown\{p\}$. Пусть $|N|=p$. Тогда $m(p)=\mathfrak{E}$, $m(q)=\mathrm{form}\,N$. В этом случае $\mathfrak{N}\cap\mathfrak{M}$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{M}$, т. е. нильпотентный дефект $\mathfrak{F}$ равен 2. Пусть N — неабелева группа. Тогда $O_p(N)=\{1\}$. Значит, при всех $t\in\pi(G)$ справедливо $m(t)=\mathrm{form}\,N$. Последнее означает, что $\mathfrak{M}=\mathfrak{l}\mathrm{form}\,N$. Следовательно, в силу следствия 19.10 нильпотентный дефект $\mathfrak{F}$ равен 2.

Случай, когда H удовлетворяет одному из условий 3) или 4), очевидны.

20.8. Проблема. Описать локальные формации со сверхразрешимым дефектом 2.

20.9. Проблема. Описать локальные формации с нильпотентным дефектом 3.

§ 21. Локальные формации длины не больше 5

Будем говорить, что *неединичная локальная формация* $\mathfrak{F}$ *имеет длину* n, если существует такая совокупность формаций $\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n$, что $\mathfrak{F}_n=\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_0=\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{F}_{i-1}$ — максимальная локальная подформация формации $\mathfrak{F}_i$, $i=1, \ldots$ $\ldots, n$.

Скажем, что *формация* $\mathfrak{H}$ *имеет длину* t, если существует такая совокупность формаций $\mathfrak{H}_0, \mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_t$, что $\mathfrak{H}_t=\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_0=\varnothing$ и $\mathfrak{H}_{i-1}$ — максимальная подформация формации $\mathfrak{H}_i$, $i=1, \ldots, t$. По определению единичная формация имеет длину 1.

Корректность этих двух определений базируется на отмеченной выше модулярности решетки формаций и решетки локальных формаций (см. следствие 9.22). Из модулярности следует также, что неединичная локальная формация не обладает длиной в смысле второго из приведенных определений.

Используя результаты предыдущих параграфов, в данном параграфе мы опишем локальные формации длины не больше 5.

Пусть $\mathfrak{F}$—формация, m—натуральное число. Тогда если экспонента любой группы из $\mathfrak{F}$ делит m и в $\mathfrak{F}$ имеется группа экспоненты m, то m назовем *экспонентой* формации $\mathfrak{F}$.

21.1. Лемма. *Если $\mathfrak{F}$—абелева формация экспоненты $m=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\ldots p_t^{n_t}$, где $p_1, \ldots, p_t$—различные простые числа, то ее длина равна $n_1+n_2+\ldots+n_t+1$.*

Доказательство. При $m=1$ лемма верна. Пусть $m>1$ и $\mathfrak{H}$—произвольная максимальная подформация из $\mathfrak{F}$. Покажем, что для некоторого $i\in\{1, \ldots, t\}$ число $p_1^{n_1}p_2^{n_2}\ldots p_{i-1}^{n_{i-1}}p_i^{n_i-1}p_{i+1}^{n_{i+1}}\ldots p_t^{n_t}$—экспонента формации $\mathfrak{H}$. Действительно, пусть A—группа минимального порядка из $\mathfrak{F}\setminus\mathfrak{H}$. Тогда A—примарная циклическая группа. Пусть $|A|=p_i^n$. Так как $\mathfrak{F}=\mathrm{form}\,(\mathfrak{H}\cup\{A\})$, то ввиду леммы 8.11 для всякого $j\neq i$ справедливо, что $p_j^{n_j}$ делит экспоненту формации $\mathfrak{H}$ и, кроме того, $n=n_i$. Если H—максимальная подгруппа группы A, то $H\in\mathfrak{H}$ ввиду выбора группы A. Но экспонента группы H совпадает с ее порядком, равным p_i^{n-1}. Таким образом, экспонента формации $\mathfrak{H}$ равна $p_1^{n_1}\ \ldots\ p_{i-1}^{n_{i-1}}p_i^{n_i-1}\ p_{i+1}^{n_{i+1}}\ \ldots\ p_t^{n_t}$. Ввиду соображений индукции длина формации $\mathfrak{H}$ равна $n_1+\ldots+n_{i-1}+n_i+$ $+n_{i+1}+\ldots+n_t$. Из последнего заключаем, что длина формации $\mathfrak{F}$ равна $n_1+\ldots+n_t+1$. Лемма доказана.

21.2. Лемма. *Пусть f_1 и f_2—минимальные локальные экраны соответственно формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если $f_1(p)=f_2(p)$ при всяком простом $p\neq t$ и $f_1(t)\subset$ $\subset f_2(t)$, причем для любой группы $A\in f_2(t)\setminus f_1(t)$ с $O_t(A)=$ $=\{1\}$ выполняется $\mathrm{form}\,(\{A\}\cup f_1(t))=f_2(t)$, то $\mathfrak{F}_1$ является максимальной локальной подформацией $\mathfrak{F}_2$;*

2) *если $\mathfrak{F}_1$—максимальная локальная подформация $\mathfrak{F}_2$, то для всякого простого p такого, что $f_1(p)\subset f_2(p)$, и любой группы $A\in f_2(p)\setminus f_1(p)$ с $O_p(A)=\{1\}$ имеет место $f_2(p)=\mathrm{form}\,(\{A\}\cup f_1(p))$, причем если формация $\mathfrak{F}_2$ разрешима, то существует точно одно такое простое число t, что $f_1(t)\subset f_2(t)$.*

Доказательство. Пусть экраны f_1 и f_2 удовлетворяют условию 1). Тогда, очевидно, $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$. Пусть $\mathfrak{F}_1 \subset \subset \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_2$, где $\mathfrak{F}$ — некоторая локальная формация. Покажем, что в такой ситуации $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_2$. Пусть $G \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}_1$, f — минимальный локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Ввиду следствия 8.4 имеет место $f_1 \leqslant f \leqslant f_2$. Так как $f_1(p) = f_2(p)$ при любом простом $p \neq t$, то

$$G/\mathrm{F}_t(G) \in f(t) \setminus f_1(t) \subseteq f_2(t) \setminus f_1(t).$$

Но $\mathrm{O}_t(G/\mathrm{F}_t(G)) = \{1\}$, и поэтому $\mathrm{form}(\{G/\mathrm{F}_t(G)\} \cup f_1(t)) = f_2(t)$. Следовательно, $f(t) = f_2(t)$. Значит, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_2$. Таким образом, $\mathfrak{F}_1$ — максимальная локальная подформация $\mathfrak{F}_2$.

Предположим теперь, что $\mathfrak{F}_1$ — максимальная локальная подформация $\mathfrak{F}_2$. Пусть $A \in f_2(p) \setminus f_1(p)$ и $\mathrm{O}_p(A) = \{1\}$. Обозначим через T базу регулярного сплетения $P \wr A$, где $|P| = p$. Тогда $T = \mathrm{F}_p(P \wr A)$ и $P \wr A/T \simeq A$. Значит, $P \wr A \notin \mathfrak{F}_1$, и ввиду леммы 8.2 $P \wr A \in \mathfrak{F}_2$. Следовательно, $\mathfrak{F}_2 = \mathrm{lform}(\{P \wr A\} \cup \mathfrak{F}_1)$. Применяя теперь теорему 8.3, заключаем, что $f_2(p) = \mathrm{form}(\{A\} \cup f_1(p))$.

Предположим дополнительно, что формация $\mathfrak{F}$ разрешима. Допустим, что $f_1(p) \subset f_2(p)$ и $f_1(q) \subset f_2(q)$, $p \neq q$. Пусть A — группа минимального порядка из $f_2(p) \setminus f_1(p)$ со свойством $\mathrm{O}_p(A) = \{1\}$. Обозначим через G регулярное сплетение $P \wr A$, где $|P| = p$. Тогда $G \in \mathfrak{F}_2$ и $G/\mathrm{F}_p(G) \simeq A$. Последнее означает, что $G \notin \mathfrak{F}_1$. Поскольку $\mathfrak{F}_1$ — максимальная локальная подформация $\mathfrak{F}_2$, то $\mathfrak{F}_2 = \mathrm{lform}(\{G\} \cup \mathfrak{F}_1)$. Значит, $f_2(q) = \mathrm{form}(\{G/\mathrm{F}_q(G)\} \cup f_1(q))$. Легко видеть, что $G/\mathrm{F}_q(G) \simeq A/\mathrm{F}_q(A)$. Следовательно, поскольку $f_1(q) \subset \subset f_2(q)$, то $A_1 = A/\mathrm{F}_q(A) \in f_2(q) \setminus f_1(q)$. Пусть $D = Q \wr A_1$, где $|Q| = q$. Рассуждая так и выше, видим, что $A_2 = A_1/F_p(A_1) \in f_2(p) \setminus f_1(p)$. Но $\mathrm{O}_p(A_2) = \{1\}$ и, очевидно, $|A_2| < |A|$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

21.3. Лемма. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация длины n, f — ее минимальный локальный экран. Тогда если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}^2$, то n совпадает с суммой длин формаций, являющихся значениями экрана f на простых числах.*

Доказательство. Проведем доказательство леммы индукцией по n. Пусть $\mathfrak{H}$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{F}$, h — ее минимальный локальный экран. Так как $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}^2$, то ввиду леммы 21.2 найдется такое $p \in \pi(\mathfrak{F})$, что $h(p)$ — максимальная подформация в $f(p)$ и $h(t) = f(t)$ при всех простых $t \neq p$. Следовательно, сумма длин формаций, являющихся значениями экрана h, на 1 меньше, чем сумма длин формаций, являющихся значениями экрана f. В свою очередь, ввиду следствия 9.22. длина формации $\mathfrak{H}$ на 1 меньше, чем длина формации $\mathfrak{F}$. Таким образом, поскольку по индукции лемма верна для $\mathfrak{H}$, то ее утверждение оказывается справедливым и для формации $\mathfrak{F}$. Лемма доказана.

21.4. Лемма. *Пусть $\mathfrak{F}$ — такая нильпотентная локальная формация, что $\pi(\mathfrak{F})$ — конечное множество. Тогда длина формации $\mathfrak{F}$ равна $|\pi(\mathfrak{F})|$.*

Доказательство. Пусть f — минимальный локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Тогда $f(p)=\mathfrak{E}$ при всех $p\in\pi(\mathfrak{F})$ и $f(p)=\varnothing$, если p — простое число, не принадлежащее $\pi(\mathfrak{F})$. Следовательно, по лемме 21.3 длина формации $\mathfrak{F}$ совпадает с $|\pi(\mathfrak{F})|$. Лемма доказана.

21.5. Лемма. *В точности тогда длина локальной формации $\mathfrak{F}$ равна 3, когда $\mathfrak{F}$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) *$\mathfrak{F}$ — нильпотентная формация, $|\pi(\mathfrak{F})|=3$;*

2) *$\mathfrak{F}$ — минимальная локальная ненильпотентная формация, $|\pi(\mathfrak{F})|=2$.*

Доказательство. Необходимость. Если $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{N}$, то по лемме 21.4 $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 1). Пусть $\mathfrak{F}$ не входит в $\mathfrak{N}$. Тогда по лемме 18.6 в $\mathfrak{F}$ имеется минимальная локальная ненильпотентная подформация $\mathfrak{H}$. Ясно также, что $|\pi(\mathfrak{H})|=3$.

Достаточность вытекает из леммы 21.4.

21.6. Лемма. *В точности тогда длина локальной формации $\mathfrak{F}$ равна 4, когда $\mathfrak{F}$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) *$\mathfrak{F}=\mathfrak{H}\vee_l\mathfrak{N}_p$, где $\mathfrak{H}$ — локальная формация длины 3, $\mathfrak{H}\cap\mathfrak{N}_p=\mathfrak{E}$;*

2) *$\mathfrak{F}=\mathfrak{H}_1\vee_l\mathfrak{H}_2$, где $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — такие две различные минимальные локальные ненильпотентные формации, что $\pi(\mathfrak{H}_1)=\pi(\mathfrak{H}_2)$, $|\pi(\mathfrak{H}_1)|=2$;*

3) *$\mathfrak{F}$ — минимальная локальная ненильпотентная формация, $|\pi(\mathfrak{F})|=3$;*

4) *$\mathfrak{F}=\mathfrak{l}\mathrm{form}\,G$, где $G=P\rtimes H$, $P=C_G(P)$ — минимальная нормальная p-подгруппа в G, а H — одна из следующих групп:* а) *циклическая примарная группа порядка q^2;* б) *неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q;* в) *p-нильпотентная pd-группа Шмидта с тривиальной подгруппой Фраттини.*

Доказательство. Необходимость. Если нильпотентный дефект формации $\mathfrak{F}$ не превосходит 1, то ввиду лемм 20.5 и 21.5 $\mathfrak{F}$ удовлетворяет одному из условий 1), 3). Пусть нильпотентный дефект формации $\mathfrak{F}$ больше 1.

Тогда ввиду следствия 9.22 и леммы 21.4, $n=2$ и формация $\mathfrak{F}$ разрешима. Если формация $\mathfrak{F}$ неприводима, то в силу теоремы 20.6 эта формация удовлетворяет условию 4). Пусть формация $\mathfrak{F}$ приводима. Тогда по теореме 20.6 $\mathfrak{F}$ — одна из следующих формаций: а) $\mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{H}_2 \vee_l \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, а $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — различные минимальные локальные ненильпотентные формации; б) $\mathfrak{H} \vee_l \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, $\mathfrak{H}$ — неприводимая локальная формация с нильпотентным дефектом 2, $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{H}$. По следствию 19.10 каждая из формаций $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ имеет длину 3. Значит, в случае а) по лемме 20.5 $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{H}_2$ и $\pi(\mathfrak{H}_1) = \pi(\mathfrak{H}_2)$, т. е. $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 2). Легко проверить, что всякая неприводимая локальная формация с нильпотентным дефектом 2 имеет длину $\geqslant 2$. Следовательно, длина формации $\mathfrak{H} \vee_l \mathfrak{M}$ имеет длину $\geqslant 5$. Противоречие. Таким образом, случай б) невозможен.

Достаточность устанавливается прямой проверкой. Лемма доказана.

21.7. Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — неразрешимая локальная формация. В точности тогда длина $\mathfrak{F}$ равна 5, когда $\mathfrak{F}$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) *$\mathfrak{F}$ — минимальная локальная ненильпотентная формация, $|\pi(\mathfrak{F})| = 4$;*

2) *$\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \vee_l \mathfrak{N}_p$, где $\mathfrak{H}$ — минимальная локальная ненильпотентная формация, $|\pi(\mathfrak{H})| = 3$, $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N}_p = \mathfrak{E}$;*

3) *$\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \vee_l \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M}$ — различные минимальные локальные ненильпотентные формации, $|\pi(\mathfrak{H})| = 3$ и $\pi(\mathfrak{M}) \subseteq \pi(\mathfrak{H})$;*

4) *$\mathfrak{F} = \mathfrak{l}\mathrm{form}\, G$, где $G = P \rtimes (Q \rtimes N)$, $P = C_G(P)$ — минимальная нормальная p-подгруппа в G, $Q = C_{Q \rtimes N}(Q)$ — минимальная нормальная q-подгруппа в $Q \rtimes N$, N — прямое произведение изоморфных неабелевых простых групп, причем $|\pi(N)| = 3$ и $p, q \in \pi(N)$;*

5) *$\mathfrak{F} = \mathfrak{l}\mathrm{form}\, G$, где G — такая монолитическая группа с неабелевым монолитом R, что $|\pi(R)| = 3$, G/R — прямое произведение изоморфных простых неабелевых групп и $\pi(R) = \pi(G/R)$.*

Доказательство. Необходимость. Так как всякая бипримарная группа разрешима и $\mathfrak{F}$ — неразрешимая формация, то $|\pi(\mathfrak{F})| \geqslant 3$. Следовательно, поскольку длина формации $\mathfrak{F}$ равна 5, то нильпотентный дефект формации $\mathfrak{F}$ не больше 2. Если нильпотентный дефект $\mathfrak{F}$ равен 1, то ввиду лемм 20.5 и 21.4 $\mathfrak{F}$ удовлетворяет одному из условий 1), 2).

Пусть нильпотентный дефект $\mathfrak{F}$ равен 2. Тогда, очевидно, $|\pi(\mathfrak{F})| = 3$. Допустим, что формация $\mathfrak{F}$ приводима. Тогда по теореме 20.6 $\mathfrak{F}$ — одна из следующих формаций: а) $\mathfrak{H}_1 \vee_l \vee_l \mathfrak{H}_2 \vee_l \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, а $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — различные минимальные локальные ненильпотентные формации; б) $\mathfrak{H} \vee_l \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, $\mathfrak{H}$ — неприводимая локальная формация с нильпотентным дефектом 2 и $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию а). Так как формация $\mathfrak{F}$ неразрешима, то по крайней мере одна из формаций $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ неразрешима. Пусть это будет $\mathfrak{H}_1$. Тогда $|\pi(\mathfrak{H}_1)| \geqslant 3$, т. е. длина $\mathfrak{H}_1$ не меньше чем 4. Ввиду леммы 20.5, $\mathfrak{H}_1 \neq \mathfrak{F}$, и поэтому длина $\mathfrak{H}_1$ равна 4, т. е. $\mathfrak{H}_1$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{F}$. Допустим, что $\pi(\mathfrak{F}) \not\subseteq \pi(\mathfrak{H}_1)$, $p \in \in \pi(\mathfrak{F}) \setminus \pi(\mathfrak{H}_1)$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{N}_p$. Но в рассматриваемом случае это невозможно в силу леммы 20.5. Значит, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}_1$, $\pi(\mathfrak{H}_2) \subseteq \pi(\mathfrak{H}_1)$ и $|\pi(\mathfrak{H}_1)| = 3$, т. е. $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 3). Пусть $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию б). Тогда $\mathfrak{H}$ — неразрешимая формация. Легко видеть, что $|\pi(\mathfrak{H})| = 3$. Следовательно, поскольку $\mathfrak{H}$ неприводима и ее нильпотентный дефект равен 3, то $\mathfrak{H}$ — формация длины 5. Но тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$, что невозможно, ибо $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{H}$. Таким образом, случай б) невозможен.

Предположим теперь, что формация $\mathfrak{F}$ неприводима. Тогда ввиду теоремы 20.7 $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}\, G$, где G — такая монолитическая группа с монолитом P, что либо P — неабелева группа, G/P — прямое произведение неизоморфных простых неабелевых групп и $\pi(P) \subseteq \pi(G/P)$, либо $G = P \times H$, где $P = C_G(P)$ — минимальная нормальная p-подгруппа в G, а H — одна из следующих групп: а) простая неабелева p'-группа; б) $Q \times N$, где $Q = C_{G \times N}(Q)$ — минимальная нормальная q-подгруппа в $Q \times N$ $(q \neq p)$, а N — прямое произведение изоморфных простых неабелевых групп и p, $q \in \pi(N)$. Пусть P — неабелева группа. Тогда поскольку $|\pi(\mathfrak{F})| = 3$, то $|\pi(P)| = 3$ и $\pi(P) = \pi(G/P)$, т. е. G удовлетворяет условию 5). Пусть P — абелева p-группа. Если H удовлетворяет условию а), то $\{p\} \cup \pi(H) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и $|\{p\} \cup \pi(H)| \geqslant 4$, т. е. $|\pi(\mathfrak{F})|$ не меньше, чем 4, что невозможно. Значит, такой случай не имеет места. Если же H удовлетворяет условию б), то, очевидно, $|\pi(H)| = 3$, т. е. $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 4).

Достаточность. Если $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 1) или 2), то, очевидно, $\mathfrak{F}$ имеет длину 5. Пусть $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 3). Так как $\pi(\mathfrak{M}) \subseteq \pi(\mathfrak{H})$, то $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$. Но $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{M}$. Следовательно, ввиду следствия 9.22, $\mathfrak{H}$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \vee_l \mathfrak{M}$. Так как по лемме 21.6 длина $\mathfrak{H}$ равна 4, то $\mathfrak{F}$ — формация длины 5. Пусть $\mathfrak{F}$ удовлетворяетряет условию 4). Тогда по лемме 18.7 $\mathfrak{F}$ обладает максимальной локальной подформацией $\mathfrak{H}$, у которой имеется внутренний локальный экран h со следующими непустыми значениями: $h(p)=\operatorname{form} N$ и $h(t)=\operatorname{form}(G/F_t(G))$ при всех $t\in\pi(G)\setminus\{p\}$. Легко видеть, что при всех $t\in\pi(G)$ справедливо $h(t)=\operatorname{form} N$. Значит, $\mathfrak{H}=\operatorname{lform} N$. По условию $|\pi(N)|=3$. Следовательно, ввиду леммы 21.6 и следствия 19.10 $\mathfrak{H}$ — локальная формация длины 4. Поэтому в рассматриваемом случае $\mathfrak{F}$ — локальная формация длины 5. Аналогично проверяется, что длина $\mathfrak{F}$ равна 5, если $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 5). Теорема доказана.

21.8. Теорема. *В точности тогда $\mathfrak{F}$ — разрешимая приводимая локальная формация длины* 5, *когда $\mathfrak{F}$ удовлетворяет одному из следующих условий*:

1) $\mathfrak{F}=\mathfrak{H}\vee_l\mathfrak{N}_p$, *где $\mathfrak{H}$ — локальная формация длины* 4, $\mathfrak{H}\cap\mathfrak{N}_p=\mathfrak{E}$;

2) $\mathfrak{F}=\mathfrak{H}\vee_l\mathfrak{M}$, *где $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M}$ — минимальные локальные ненильпотентные формации*, $|\pi(\mathfrak{H})|\neq|\pi(\mathfrak{M})|$, $|\pi(\mathfrak{F})|=3$;

3) $\mathfrak{F}=\mathfrak{H}\vee_l\mathfrak{M}$, *где $\mathfrak{H}$ — неприводимая локальная формация длины* 4, *$\mathfrak{M}$ — такая минимальная локальная не $\mathfrak{H}$-формация длины 4, что* $\pi(\mathfrak{H})=\pi(\mathfrak{M})$.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что в $\mathfrak{F}$ найдется такая максимальная локальная подформация $\mathfrak{H}$, что $\pi(\mathfrak{F})\neq\pi(\mathfrak{H})$. Тогда $\mathfrak{F}=\mathfrak{H}\vee_l\mathfrak{N}_p$, где $p\in\in\pi(\mathfrak{F})\setminus\pi(\mathfrak{H})$. Ввиду следствия 9.22 длина $\mathfrak{H}$ равна 4. Следовательно, $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 1). Таким образом, в дальнейшем мы можем считать, что для любой максимальной локальной подформации $\mathfrak{X}$ из $\mathfrak{F}$ имеет место $|\pi(\mathfrak{X})|=|\pi(\mathfrak{F})|$.

Поскольку формация $\mathfrak{F}$ по условию приводима, то в ней найдутся по крайней мере две различные максимальные локальные подформации $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$. Пусть обе формации $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ приводимы. Так как длины формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ равны 4 и $\pi(\mathfrak{F}_1)=\pi(\mathfrak{F})=\pi(\mathfrak{F}_2)$, то ввиду леммы 21.6 либо обе эти формации имеют вид $\mathfrak{H}\vee\mathfrak{N}_p$, где $\mathfrak{H}$ — локальная формация длины 3 и $\mathfrak{H}\cap\mathfrak{N}_p=\mathfrak{E}$, либо каждая из них есть $\mathfrak{H}_1\vee_l\mathfrak{H}_2$, где $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — такие минимальные локальные ненильпотентные формации, что $\pi(\mathfrak{H}_1)=\pi(\mathfrak{H}_2)$, $|\pi(\mathfrak{H}_1)|=2$. Заметим, что для каждой данной пары простых чисел p и q существуют лишь две различные минимальные локальные ненильпотентные формации $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ такие, что $\pi(\mathfrak{M}_1)=\pi(\mathfrak{M}_2)=\{p, q\}$. Но $\mathfrak{F}_1\neq\mathfrak{F}_2$. Таким образом, второе не может иметь места. Предположим, что $\mathfrak{F}_1\subseteq\mathfrak{N}$. Тогда, ввиду леммы 21.4, $|\pi(\mathfrak{F}_1)|=4=|\pi(\mathfrak{F}_2)|$. Последнее означает, что $\mathfrak{F}_2$ — нильпотентная формация. Но

$\pi(\mathfrak{F}_1)=\pi(\mathfrak{F}_2)$. Значит, $\mathfrak{F}_1=\mathfrak{F}_2$. Полученное противоречие показывает, что формация $\mathfrak{F}_1$ не входит в $\mathfrak{N}$. Следовательно, $\mathfrak{F}_1=\mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{N}_{p_1}$, где $\mathfrak{H}_1$ — минимальная локальная ненильпотентная формация, $|\pi(\mathfrak{H}_1)|=2$ и $p_1 \notin \pi(\mathfrak{H})$. Рассуждая аналогично, убеждаемся, что $\mathfrak{F}_2=\mathfrak{H}_2 \vee_l \mathfrak{N}_{p_2}$, где $\mathfrak{H}_2$ — минимальная локальная ненильпотентная формация, $|\pi(\mathfrak{H}_2)|=2$, $p_2 \notin \pi(\mathfrak{H})$. Предположим, что $p_1=p_2$. Тогда $\pi(\mathfrak{H}_1)=\pi(\mathfrak{H}_2)$, причем $\mathfrak{H}_1 \neq \mathfrak{H}_2$. По лемме 21.6 $\mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{H}_2$ — локальная формация длины 4. Понятно, что $\mathfrak{F}=\mathfrak{H}_1 \vee_l \vee_l \mathfrak{H}_2 \vee_l \mathfrak{N}_p$, где $p=p_1=p_2$ и $\mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_2 \cap \mathfrak{N}_p=\mathfrak{E}$. Это означает, что $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 1). Если $p_1 \neq p_2$, то $\mathfrak{F}=\mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{H}_2$ и $\pi(\mathfrak{F})=3$, т. е. $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 2).

Предположим теперь, что одна из формаций $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ неприводима. Пусть, например, таковой будет $\mathfrak{F}_1$. По лемме 18.6, $\mathfrak{F}$ содержит подформацию $\mathfrak{M}$, являющуюся минимальной локальной не $\mathfrak{F}_1$-формацией. Понятно, что $\mathfrak{F}= =\mathfrak{F}_1 \vee_l \mathfrak{M}$ и $\pi(\mathfrak{M}) \subseteq \pi(\mathfrak{F}_1)$. Таким образом, в рассматриваемом случае $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 3).

Достаточность устанавливается прямой проверкой. Теорема доказана.

21.9. Лемма. *Пусть $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная не $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-формация. Тогда длина $\mathfrak{F}$ в том и только в том случае равна* 4, *когда $\mathfrak{F}=\mathrm{lform}\, G$, где G — либо простая неабелева группа с $|\pi(G)|=3$, либо $G=P \rtimes H$, где $P= =C_G(P)$ — минимальная нормальная p-подгруппа в G, а H — одна из следующих групп:* 1) *p-нильпотентная pd-группа Шмидта с тривиальной подгруппой Фраттини;* 2) *неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q.*

Доказательство. Необходимость. Ввиду п. 18.22 $\mathfrak{F}=\mathrm{lform}\, G$, где G — такая монолитическая группа с монолитом P, что либо P — неабелева группа, совпадающая с коммутантом G, либо $G=P \rtimes H$, где $P=C_G(P)$ — p-группа, а H — одна из следующих групп: а) группа кватернионов порядка 8; б) неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q; в) группа вида $Q \rtimes N$, где $Q=C_{Q \rtimes N}(Q)$ — минимальная инвариантная q-подгруппа в $Q \rtimes N$, совпадающая с коммутантом группы $Q \rtimes N$. Пусть P — неабелева группа. Тогда $|\pi(P)| \geqslant 3$. Ввиду леммы 21.4 $|\pi(\mathfrak{F})| \leqslant 3$. Значит, $|\pi(P)|=3$ и ввиду следствия 19.10 $G=P$ — простая группа.

Пусть P — абелева группа, f — минимальный локальный экран $\mathfrak{F}$. Если H удовлетворяет условию а), то $\mathfrak{F} \subseteq \subseteq \mathfrak{N}^2$. Значит, длина $\mathfrak{F}$ совпадает с суммой длин формаций, являющихся значениями экрана f. По теореме 8.3 $f(p)=$

$=\mathrm{form}\, H$ и $f(2)=\mathfrak{E}$. По лемме 18.13 абелева формация экспоненты 4 является максимальной подформацией в $\mathrm{form}\, H$. Следовательно, по лемме 21.1 длина формации $f(p)$ равна 4. Значит, длина $\mathfrak{F}$ равна 5. Это противоречит условию. Таким образом, рассматриваемый случай невозможен.

Пусть H удовлетворяет условию в). Обозначим через $\mathfrak{H}$ максимальную локальную подформацию из $\mathfrak{F}$, и пусть h—минимальный локальный экран формации $\mathfrak{H}$. Тогда ввиду леммы 18.7 $h(p)=\mathrm{form}\,(N/O_p(N))$, $h(q)=\mathrm{form}\, N$ и $h(t)=\mathfrak{E}$ при всех $t\in\pi(G)\setminus\{p,\ q\}$. Так как длина формации $\mathfrak{H}$ равна 3 и $\mathfrak{H}$ не входит в $\mathfrak{N}$, то по лемме 21.4 $\mathfrak{H}$—минимальная локальная ненильпотентная формация и $|\pi(\mathfrak{H})|=2$. Применяя теперь следствие 19.10, видим, что N—группа порядка p. Значит, в рассматриваемом случае H является p-нильпотентной pd-группой Шмидта с тривиальной подгруппой Фраттини.

Достаточность устанавливается прямой проверкой с привлечением лемм 21.1 и 21.3.

Аналогично доказывается следующая лемма.

21.10. Лемма. *Пусть $\mathfrak{F}$—минимальная локальная не $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-формация. Тогда длина $\mathfrak{F}$ в том и только в том случае равна* 5, *когда $\mathfrak{F}=\mathfrak{l}\mathrm{form}\, G$, где G—такая монолитическая группа с монолитом P, что либо $P=G$—неабелева группа с $|\pi(G)|=4$, либо $G=P\rtimes H$, где $P=C_G(P)$—p-группа, а H—одна из следующих групп:* 1) *группа кватернионов порядка* 8; 2) *группа вида $Q\rtimes N$, где $Q=C_{Q\rtimes N}(Q)$—минимальная нормальная q-подгруппа в $Q\rtimes N$, а N—циклическая группа порядка p^2.*

Неприводимый случай. 21.11. Будем говорить, что *$\mathfrak{F}$—локальная формация типа $(m,\ n)$*, если m и n—такие наименьшие натуральные числа, что всякая собственная локальная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{N}^m$ и $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{N}^n$. Из леммы 21.6 вытекает, что тип любой разрешимой неприводимой локальной формации длины 5 принадлежит множеству $\Omega=\{(2,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 3),\ (3,\ 4)\}$. Мы покажем в этом пункте, что в действительности любой элемент из Ω является типом некоторой неприводимой локальной формации длины 5.

21.12. Теорема. *В точности тогда $\mathfrak{F}$—неприводимая локальная формация длины* 5 *одного из типов* (2, 3), (3, 4), *когда $\mathfrak{F}=\mathfrak{l}\mathrm{form}\, G$, где $G=P\rtimes H$, $P=C_G(P)$—минимальная нормальная p-подгруппа в G, $H=Q\rtimes N$, где $Q=C_H(Q)$—минимальная нормальная q-подгруппа в H, а N—одна из следующих групп:* 1) *циклическая группа* *порядка p^2; 2) экстраспециальная группа экспоненты p ($p \neq 2$); 3) подпрямое произведение таких p-замкнутых групп Шмидта A, что $\Phi(A)=\{1\}$ и $\pi(A)=\{p, q\}$.*

Доказательство. Необходимость. Ввиду теоремы 19.9 $\mathfrak{F}=\mathrm{lform}\, G$, где $G=P \rtimes H$, $P=C_G(P)$ — минимальная нормальная p-подгруппа в G, $H=Q \rtimes N$, где $Q=C_H(Q)$ — минимальная нормальная q-подгруппа в H и либо $Q = H^{\mathfrak{N}}$ (если $\mathfrak{F}$ — типа (2, 3)), либо $Q=H^{\mathfrak{N}^2}$. Так как $\mathfrak{F}$ не входит в $\mathfrak{N}^2$, то одна из подформаций $\mathfrak{F}$ является минимальной локальной не $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-формацией. Пусть таковой будет подформация $\mathfrak{M}$. Допустим, что $\mathfrak{M}=\mathfrak{F}$. Тогда ввиду леммы 21.10 N — циклическая группа порядка p^2.

Пусть $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{F}$. Ввиду леммы 21.10 длина всякой разрешимой минимальной локальной не ($\mathfrak{N}\mathfrak{A}$)-формации $\geqslant 4$. Но длина равна 5. Значит, длина $\mathfrak{M}$ равна 4, т. е. $\mathfrak{M}$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{F}$. По лемме 21.9 $|\pi(\mathfrak{M})|=2$. Так как формация $\mathfrak{F}$ по условию неприводима, то всякая нетривиальная локальная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M}$. Значит, $\pi(\mathfrak{F})=\pi(\mathfrak{H})=\{p, q\}$. Таким образом, по лемме 18.7 минимальный локальный экран m формации $\mathfrak{M}$ таков, что $m(p)=\mathrm{form}(N/O_p(N))$, $m(q) = \mathrm{form}\, N$ и $m(t)=\varnothing$, если t — произвольное простое число, отличное от p и q. Пусть $Q=H^{\mathfrak{N}}$. Тогда ввиду леммы 8.5 N — p-группа. Значит, по лемме 18.13 $m(q)$ — формация, порожденная неабелевой группой порядка p^3 простой нечетной экспоненты p. Но $m(q)=\mathrm{form}\, N$. Следовательно, N — группа экспоненты p ступени нильпотентности 2. Таким образом, $\Phi(N)=N^pN'=N' \subseteq Z(N)$. Но группа N — неприводимая группа автоморфизмов для Q. Значит, $Z(N)$ — циклическая группа. Следовательно, $\Phi(N)=N' = Z(N)$ — группа порядка p, т. е. N — экстраспециальная группа.

Предположим теперь, что $Q=H^{\mathfrak{N}^2}$. Сравнивая непустые значения экрана m с непустыми значениями минимального локального экрана минимальной локальной не $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-формации длины 4, видим, что $\mathrm{form}\, N=\mathrm{form}\, A$, где A — такая p-замкнутая pd-группа Шмидта, что $\Phi(A)=\{1\}$ и $\pi(A)=\{p, q\}$. Пусть $L=L_1 \times \ldots \times L_n$ — цоколь группы N, где L_i — минимальная нормальная подгруппа N, $i=1, \ldots, n$. И пусть $N_i=L_1 \times \ldots \times L_{i-1} \times L_{i+1} \times \ldots \times L_n$. Обозначим через M_i наибольшую нормальную подгруппу группы N, содержащую N_i, но не содержащую L_i. Тогда N/M_i — монолитическая группа с монолитом L_iM_i/M_i. Ввиду условия и леммы 8.5, $O_q(N)=\{1\}$. Значит, $O_q(N/M_i) = \{1\}$, $i=1, \ldots, n$. Следовательно, ввиду теоремы 3.37,

$N/M_i \simeq A$. Легко видеть также, что $M_1 \cap \ldots \cap M_n = \{1\}$. Следовательно, в рассматриваемом случае N — подпрямое произведение групп, изоморфных A.

Достаточность устанавливается прямой проверкой с привлечением лемм 21.9, 21.10 и 18.7. Теорема доказана.

21.13. Лемма. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ненильпотентная неприводимая локальная формация, входящая в $\mathfrak{N}^2$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}\, G$, где $H = P \leftthreetimes Q$ — бипримарная монолитическая группа, у которой монолит $P = C_G(P)$ является силовской подгруппой.*

Доказательство. Пусть G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ — максимальная локальная подформация $\mathfrak{F}$. По лемме 18.3 $G = P \leftthreetimes Q$, где $P = C_G(P)$ — монолит G. Понятно, что Q — нильпотентная группа порядка, взаимно простого с $|P|$. Значит, P — силовская подгруппа группы G. Предположим, что Q не является силовской подгруппой в G. Пусть $\{p\} = \pi(P)$ и $\{q_1, \ldots, q_t\} = \pi(Q)$. Тогда $Q = Q_1 \times \ldots \times Q_t$, где Q_i — силовская q_i-подгруппа в Q, $i = 1, \ldots, t$. Пусть $D_i = R \wr Q_i$ — регулярное сплетение, где $|R| = p$, $i = 1, \ldots, t$. Обозначим через $\mathfrak{F}_i$ формацию $\mathrm{lform}\, D_i$. Легко видеть, что $\mathfrak{F}_i \subset \mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}_1 \vee_l \mathfrak{F}_2 \vee_l \ldots \vee_l \mathfrak{F}_t$, m — минимальный локальный экран формации $\mathfrak{M}$. Так как $D_i/\mathrm{F}_p(D_i) \simeq Q_i$, $i = 1, \ldots, t$, то ввиду теоремы 8.3

$$m(p) = \mathrm{form}\{Q_1, \ldots, Q_t\} = \mathrm{form}\, Q = f(p),$$

где f — минимальный локальный экран формации $\mathfrak{F}$. С другой стороны, очевидно, $m(q_i) = \mathfrak{E} = f(q_i)$ при любом $i = 1, \ldots, t$. Значит, $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$. Но это невозможно, так как по условию $\mathfrak{F}$ — неприводимая локальная формация. Полученное противоречие показывает, что Q — силовская подгруппа в G. Лемма доказана.

Сформулируем в виде леммы следующий результат работы [56].

21.14. Лемма. *Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие нильпотентных групп ступени не больше 3. Тогда всякое тождество на $\mathfrak{M}$ эквивалентно некоторой системе тождеств Ω, взятых из множеств $S_1 = \langle x^\alpha = 1 \mid \alpha = 1, 2, \ldots \rangle$, $S_2 = \langle [x, y]^\beta = 1 \mid \beta = 1, 2, \ldots \rangle$, $S_3 = \langle [x, y, y]^\gamma \mid \gamma = 1, 2, \ldots \rangle$, $S_4 = \langle [x, y, z]^\rho = 1 \mid \rho = 1, 2, \ldots \rangle$, причем в Ω входит не более одного тождества из каждого множества S_i, $i = 1, 2, 3, 4$.*

21.15. Теорема. *В точности тогда $\mathfrak{F}$ — неприводимая локальная формация длины 5 типа (2, 2), когда $\mathfrak{F} =$*

$=\mathfrak{l}\mathrm{form}\ G$, *где* $G=P\leftthreetimes H$, $P=C_G(P)$*—минимальная нормальная подгруппа в* G, *а* H*—одна из следующих групп*: 1) *циклическая* q*-группа порядка* q^3; 2) *группа кватернионов порядка* 8; 3) *группа простой нечетной экспоненты* q *ступени нильпотентности* 3.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{H}$—максимальная локальная подформация $\mathfrak{F}$, h и f—минимальные локальные экраны соответственно формаций $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$.

По лемме 21.13, $\mathfrak{F}=\mathfrak{l}\mathrm{form}\,G$, где $G=P\leftthreetimes H$, $P=C_G(P)$—минимальная нормальная p-подгруппа в G, а H—силовская q-подгруппа G $(p\neq q)$. Пусть $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Тогда H—неприводимая абелева группа автоморфизмов группы P. Следовательно, H—циклическая группа. Применяя теперь лемму 21.1 и 21.3, видим, что $|H|=q^3$.

Пусть $\mathfrak{F}$ не входит в $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{M}$—минимальная локальная не $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-формация, входящая в $\mathfrak{F}$. Ввиду следствия 19.10 и леммы 21.5 всякая локальная формация длины $\leqslant 3$ входит в $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Значит, $\mathfrak{M}$ имеет длину 4 или 5. Пусть длина $\mathfrak{M}$ равна 4. Тогда $\mathfrak{M}=\mathfrak{H}$. Ввиду леммы 21.2, $h(p)$—единственная максимальная подформация формации $f(p)$. Пусть Q—группа минимального порядка из $f(p)\diagdown h(p)$, q^n—ее экспонента. Обозначим через B некоторую циклическую подгруппу порядка q^n из Q. Предположим, что $B=Q$. Тогда поскольку $f(p)=\mathrm{form}\,Q$, то $H\in\mathfrak{A}$. Значит, $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Полученное противоречие показывает, что $Q\neq B$. Ввиду леммы 8.10, $B\in f(p)$. Следовательно, $B\in h(p)$. Но по лемме 21.9 $h(p)$—формация экспоненты q (q нечетно). Таким образом, Q—группа простой нечетной экспоненты q. Понятно, что $Q/Z(Q)\in h(p)$. Следовательно, поскольку ступень нильпотентности любой группы из $h(p)$ не превосходит 2, то ступень группы Q не превышает 3. Легко показать, что если ступень Q равна 2, то $Q\in h(p)$. Это противоречит определению группы Q. Значит, ступень группы Q равна 3. В группе Q имеется лишь одна минимальная нормальная подгруппа. Следовательно, существует точный неприводимый $F_p[Q]$—модуль L. Нетрудно заметить, что $\mathfrak{F}=\mathfrak{l}\mathrm{form}\,(L\times Q)$. Наконец, если длина $\mathfrak{M}$ равна 5, то $\mathfrak{M}=\mathfrak{F}$, и в этом случае утверждение теоремы справедливо в силу леммы 21.10.

Достаточность. Пусть H удовлетворяет условию 1) и M—ее максимальная подгруппа. Легко проверить, что $\mathrm{form}\,M$—единственная максимальная подформация формации $f(p)=\mathrm{form}\,H$. Обозначим через L точный неприводимый $F_p[M]$-модуль. Тогда $\mathfrak{H}=\mathfrak{l}\mathrm{form}\,(L\times M)\subseteq\mathfrak{F}$. Ввиду теоремы 8.3 значение минимального локального экрана формации $\mathfrak{H}$ на p совпадает с $\operatorname{form} M$. Следовательно, по теореме 18.4 $\mathfrak{H}$ — единственная максимальная локальная подформация в $\mathfrak{F}$. Значит, формация $\mathfrak{F}$ неприводима и ее длина ввиду лемм 21.1 и 21.3 равна 5. Если H удовлетворяет условию 2), то по лемме 21.10 $\mathfrak{F}$ — неприводимая локальная формация длины 5.

Пусть H удовлетворяет условию 3). Так как $\operatorname{form} H$ неабелева формация, то в ней имеется минимальная неабелева подформация $\mathfrak{M}$. Ввиду леммы 18.13 $\mathfrak{M}$ — формация групп экспоненты q ступени нильпотентности $\leqslant 2$. Значит, $\mathfrak{M} \neq \operatorname{form} H$. Ввиду теоремы 3.49 число подформаций формации $\operatorname{form} H$ конечно. Следовательно, одна из подформаций этой формации является минимальной не $\mathfrak{M}$-формацией. Пусть таковой будет подформация $\mathfrak{H}$. Так как экспонента формации $\operatorname{form} H$ равна q, то $\mathfrak{H}$ — неабелева формация. Применяя еще раз лемму 18.13, видим, что $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{M}$, т. е. $\mathfrak{M}$ — единственная максимальная подформация формации $\mathfrak{H}$. Пусть $\mathfrak{H} = \operatorname{form} A$. Предположим, что $\mathfrak{H} \neq \operatorname{form} H$. Допустим, что всякое тождество группы A выполняется и в группе H. Тогда ввиду леммы 9.3 H принадлежит наследственной формации $\mathfrak{H}_0$, порожденной группой A. Но ввиду леммы 8.10 $\mathfrak{H}_0 = \operatorname{form} A$. Следовательно, $\operatorname{form} H = \mathfrak{H}$. Полученное противоречие показывает, что найдется такое тождество v, которое выполняется в группе A, но не выполняется в группе H. Так как H — нильпотентная группа ступени 3, то по лемме 21.14 тождество v эквивалентно некоторой системе тождеств v_1, v_2, v_3, v_4, где $v_1 \in S_1 = \langle x^{\alpha} = 1 \mid \alpha = 1, 2, \ldots \rangle$, $v_2 \in S_2 = \langle [x, y]^{\beta} = 1 \mid \beta = 1, 2, \ldots \rangle$, $v_3 \in S_3 = \langle [x, y, y]^{\gamma} = 1 \mid \gamma = 1, 2, \ldots \rangle$, $v_4 \in S_4 = \langle [x, y, z]^{\rho} = 1 \mid \rho = 1, 2, \ldots \rangle$. Понятно, что α, β, $\rho \neq 1$. Следовательно, поскольку $\operatorname{form} H$ — формация экспоненты q, то $\alpha = \beta = \rho = q$. Это означает, что каждое из тождеств v_1, v_2, v_4 выполняется в группе H. Следовательно, в H не выполняется тождество v_3. Поэтому $\gamma = 1$. Понятно, что ступень нильпотентности группы A равна 3. Значит, ввиду теоремы 6.5 гл. III книги [162] $q = 3$. Но тогда по теореме 6.6 гл. III книги [162] тождество v_3 выполняется и в группе H. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{H} = \operatorname{form} H$.

Пусть h — такой локальный экран, что $h(p) = \mathfrak{M}$, $h(q) = \mathfrak{E}$ и $h(t) = \varnothing$ при всех простых t, не равных p, q. Легко видеть, что h — минимальный локальный экран формации $\langle h \rangle$. Следовательно, поскольку $h(p)$ — единственная максимальная подформация формации $f(p) = \operatorname{form} H$ и $h(t) = f(t)$ при всех простых $t \neq p$ (здесь, как и выше,

f—минимальный локальный экран формации $\mathfrak{F}$), то по следствию 18.5 $\mathfrak{F}$—минимальная локальная не $\langle h\rangle$-формация. Значит, формация $\mathfrak{F}$ неприводима и ее длина равна $n+1$, где n—длина формации $\langle h\rangle$. Так как $h(p)$—минимальная неабелева формация экспоненты q, то по лемме 21.1 длина формации $h(p)$ равна 3. Следовательно, ввиду леммы 21.3 $n=4$. Теорема доказана.

21.16. Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$—неприводимая локальная формация длины 5 типа* (3, 3). *Тогда* $\mathfrak{F}=\mathrm{lform}\, G$, *где* $G=P\rtimes A$, $P=C_G(P)$—*минимальная нормальная* p-*подгруппа* G, *а* $A=A_q\rtimes A_p$—*такая бипримарная монолитическая группа с монолитом* R, *что* $R=\Phi(A_q)=(A_q)'\subseteq \subseteq Z(A_q)$, A_q—*элементарная группа и для всякого* A-*главного фактора* T/L *из* A_q *произведение* $T/L\rtimes A/C_A(T/L)$—*группа Шмидта.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{H}$—минимальная локальная не $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-формация, входящая в $\mathfrak{F}$. Тогда поскольку максимальная локальная подформация формации $\mathfrak{F}$ не входит в $\mathfrak{N}^2$, то $\mathfrak{H}\neq\mathfrak{F}$. Но длина $\mathfrak{H}$ равна 4 или 5. Значит, $\mathfrak{H}$—максимальная локальная подформация формации $\mathfrak{F}$ и длина $\mathfrak{H}$ равна 4. По лемме 21.9 $\mathfrak{H}= =\mathrm{lform}\, G$, где $G=K\rtimes H$, $K=C_G(K)$ — минимальная нормальная p-подгруппа в G, а $H=Q\rtimes N$, где $Q= =C_H(Q)$—минимальная нормальная q-подгруппа в H, N—группа порядка p. Обозначим через f и h минимальные локальные экраны соответственно формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$. Ввиду следствия 18.5 найдется такое простое число r, что $f(r)$—минимальная не $(\mathfrak{N}_r h(r))$-формация и $f(t)= =h(t)$ при всех простых $t\neq r$. Пусть B—произвольная группа из $f(r)\setminus h(r)$ с $O_r(B)=\{1\}$. Предположим, что группа B не монолитична и пусть $N_1\times\ldots\times N_m$—ее цоколь, где N_i—минимальная нормальная подгруппа в B, $i=1, \ldots, m$. Обозначим через M_i подгруппу $N_1\times\ldots$ $\ldots\times N_{i-1}\times N_{i+1}\times\ldots\times N_m$, а через L_i—наибольшую нормальную подгруппу группы B, содержащую M_i, но не содержащую N_i. Тогда B/L_i—монолитическая группа с монолитом L_iN_i/L_i. Так как $O_r(B)=\{1\}$, то $O_r(B/L_i)= =\{1\}$. Заметим, что $L_1\cap\ldots\cap L_m=\{1\}$, т. е. $B\in \in R_0\{B/L_1, \ldots, B/L_m\}$. Следовательно, для некоторого $i\in\{1, \ldots, m\}$ группа B/L_i не принадлежит формации $h(p)$. Итак, в $f(p)\setminus h(p)$ найдется такая монолитическая группа A, что $O_r(A)=\{1\}$. Обозначим через P некоторый точный неприводимый $F_p[A]$-модуль. Тогда, очевидно, $D= =P\rtimes A\in\mathfrak{F}\setminus\mathfrak{H}$. Значит, $\mathfrak{F}=\mathrm{lform}\, D$. Поэтому $A\in\mathfrak{N}^2\setminus\mathfrak{N}$. Заметим также, что поскольку $\mathfrak{H}$—единственная максимальная локальная подформация в $\mathfrak{F}$, то $\pi(\mathfrak{H})=\{p, q\}=\pi(\mathfrak{F})$. Следовательно, $\pi(A)=\{p, q\}$.

Предположим, что $r=q$. Тогда монолит R группы A является p-группой. Следовательно, $\mathrm{F}(A)$ — p-группа. Но группа A бипримарна. Значит, найдется такой A-главный фактор M/K, что $M\subseteq F(A)$ и $C_A(M/K)\neq A$. Пусть $B=M/K\rtimes A/C_A(M/K)$. Тогда ввиду леммы 3.32 $B\in f(q)$. Легко видеть, что $h(q)=\operatorname{form} N\subseteq\mathfrak{N}$. Следовательно, $B\notin h(q)$. Пусть L — точный неприводимый $F_q[B]$-модуль и $T=L\rtimes B$. Тогда $T\in\mathfrak{F}\setminus\mathfrak{H}$, и поэтому $\mathfrak{F}=l\operatorname{form} T$. Последнее означает, что

$$f(p)=\operatorname{form}(T/\mathrm{F}_p(T))=h(p)=\operatorname{form}(Q\rtimes N).$$

Легко убедиться однако, что $T/\mathrm{F}_p(T)$ — q-группа. Полученное противоречие показывает, что $r\neq q$.

Пусть $r=p$. Тогда, очевидно, R — q-группа. Предположим, что R не входит в $\Phi(A)$. Легко убедиться, что в этом случае $R=C_A(R)$. Так как $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{N}^3$, то ввиду теоремы 8.3 имеем $f(p)\subseteq\mathfrak{N}^2$. Значит, $A/R\in\mathfrak{N}$. Понятно, что $f(p)=\operatorname{form} A$. Следовательно, $H\in\operatorname{form} A$. Применяя теперь теорему 3.37, видим, что $H\simeq A$, т. е. $A\in h(p)$. Но это противоречит определению группы A. Таким образом, остается заключить, что $R\subseteq\Phi(A)$. Так как группа A монолитична и метанильпотентна, то $\mathrm{F}(A)=A_q$ — силовская подгруппа из A. Так как R не имеет дополнения в A, то $\Phi(A_q)\neq\{1\}$. Но $\Phi(A_q)$ — характеристична в A_q. Значит, $\Phi(A_q)$ — нормальная подгруппа группы A. Следовательно, $R\subseteq\Phi(A_q)$. По следствию 3.23 A не принадлежит формации $\operatorname{form}(A/R)$. Значит, $A/R\in\mathfrak{N}_p h(p)$. По лемме 8.11 $A_q/R\in\operatorname{form} Q$, и поэтому силовская q-подгруппа группы A/R элементарна. Последнее, в частности, означает, что $\Phi(A_q)\subseteq R$. Таким образом, $R=\Phi(A_q)$. Легко убедиться также, что $R=(A_q)'\subseteq\mathrm{Z}(A_q)$.

Пусть теперь A_p — произвольная силовская p-подгруппа из A. Покажем, что A_p — элементарная группа. Допустим, что $\mathrm{O}_p(A/R)=D/R\neq R/R$. Тогда согласно лемме 4.4 книги [107] силовская p-подгруппа K группы D нормальна в D. Значит, K характеристична в D. Но D — нормальная в A подгруппа. Таким образом, K — неединичная нормальная p-подгруппа группы A. Поскольку $\mathrm{F}(A)=A_q$, то последнее невозможно. Следовательно, остается заключить, что $\mathrm{O}_p(A/R)=\{1\}$. Так как $A/R\in\mathfrak{N}_p h(p)$, то из последнего вытекает, что $A/R\in h(p)=\operatorname{form} H$. Применяя теперь лемму 8.11, видим, что

$A_pR/R \in \mathrm{form}\, N$. Это означает, что A_p — элементарная абелева p-группа.

Рассмотрим произвольный A-главный фактор T/L, где $T \subseteq A_q$. Пусть $C = C_A(T/L)$. Тогда $C = C \cap A_qA_p = A_q(C \cap A_p)$. Значит,

$$A/C = A_qA_p/A_q(C \cap A_p) \simeq A_p/A_p \cap C.$$

Предположим, что $C = A$. Тогда по лемме 3.32 формации $f(p)$ принадлежит группа D порядка q. Очевидно, $f(p) \neq \mathrm{form}\, D$. Следовательно, $D \in h(p) = \mathrm{form}\,(Q \leftthreetimes N)$. Но ввиду леммы 18.2 группа D не может принадлежать формации $\mathrm{form}\,(Q \leftthreetimes N)$. Полученное противоречие показывает, что $C \neq A$. Поскольку $A/C \simeq A_p/A_p \cap C$ — неприводимая абелева группа автоморфизмов группы T/C и экспонента группы A_p равна p, то A/C — группа порядка p. Значит, $T/L \leftthreetimes A/C_A(T/L)$ — группа Шмидта. Теорема доказана.

§ 22. Комментарии

22.1. На важность изучения критических формаций было обращено внимание в докладе Л. А. Шеметкова [106] на VI Всесоюзном симпозиуме по теории групп в 1978 г. Там же была поставлена задача изучения минимальных локальных не $\mathfrak{H}$-формаций. Решению этой задачи были посвящены работы А. Н. Скибы [80, 86—89, 95], основные результаты которых составили содержание параграфов 18, 19 данной книги.

22.2. Параграф 20 написан на основе результатов работы А. Н. Скибы и Е. А. Таргонского [94].

22.3. Локальную подформацию $\mathfrak{M}$ формации $\mathfrak{F}$ назовем *предмаксимальной*, если $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$ не является максимальной локальной подформацией формации $\mathfrak{F}$.

Основываясь на классификации минимальных локальных ненильпотентных и минимальных локальных несверхразрешимых формаций, Е. А. Таргонский описал ненильпотентные локальные формации, у которых все предмаксимальные локальные подформации нильпотентны [97, 99], и разрешимые несверхразрешимые локальные формации, у которых все предмаксимальные подформации сверхразрешимы [98].

22.4. В связи с теоремой 19.12 возникает следующая задача.

Проблема. Как p-длина p-разрешимой группы связана с внутренними свойствами n-кратно локальной формации, ею порожденной?

22.5. П. Нейман показал, что всякая подформация произвольной формации нильпотентных групп наследственна [174]. Обратное утверждение доказано А. Н. Скибой [81]. Следствие 19.16 распространяет эти наблюдения на случай n-кратно локальных формаций для произвольного целого неотрицательного n.

22.6. Напомним, что A-формацией мы называем всякую формацию групп с абелевыми силовскими подгруппами.

Проблема. Описать минимальные не A-формации.

22.7. Проблема. Описать неоднопорожденные тотально локальные формации, у которых все собственные тотально локальные подформации однопорождены.

22.8. Проблема. Описать конечные неоднопорожденные формации ассоциативных колец, у которых все собственные подформации однопорождены.

22.9. Проблема. Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{A}^n = \underbrace{\mathfrak{A} \ldots \mathfrak{A}}_{n}$, где $\mathfrak{A}$ — формация конечных абелевых групп, n — некоторое натуральное число. Описать формацию $\mathfrak{F}$ при условии, что она неоднопорождена, но каждая собственная подформация из $\mathfrak{F}$ однопорождена.

Отметим, что в классе наследственных формаций эта задача решена [91] с помощью полученной А. Ю. Ольшанским классификации разрешимых почти кроссовых многообразий групп [54].

22.10. Проблема. Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}^n = \underbrace{\mathfrak{M} \ldots \mathfrak{M}}_{n}$, где $\mathfrak{M}$ — формация конечных абелевых колец Ли, n — некоторое натуральное число. Описать формацию $\mathfrak{F}$ при условии, что она неоднопорождена, но каждая собственная подформация из $\mathfrak{F}$ однопорождена.

22.11. Проблема. Описать n-кратно локальные формации, у которых все n-кратно локальные подформации нормально наследственны.

22.12. Проблема. Каковы композиционные формации, у которых все композиционные подформации нормально наследственны?

ГЛАВА 5

ПРИМЕНЕНИЕ МИНИМАЛЬНЫХ НЕ $\mathfrak{F}$-ГРУПП В ВОПРОСАХ КЛАССИФИКАЦИИ ФОРМАЦИЙ

Все фигурирующие в настоящей главе формации и группы предполагаются входящими в класс конечных разрешимых групп $\mathfrak{S}$. Именно в разрешимом случае ярко проявляется роль минимальных не $\mathfrak{F}$-групп в задачах о перечислении формаций с заданным свойством.

§ 23. Минимальные не $\mathfrak{F}$-группы

Общие свойства минимальных не $\mathfrak{F}$-групп. 23.1. Напомним, что группа G называется минимальной не $\mathfrak{F}$-группой, если G не принадлежит классу $\mathfrak{F}$, но этому классу принадлежит всякая собственная подгруппа G.

Локальный экран f называется полным, если для любого простого числа p имеет место $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$.

Для любой группы A через $\mathrm{d}(A)$ обозначим минимальное число порождающих A.

23.2. Лемма. *Пусть G — минимальная не $\mathfrak{F}$-группа, где $\mathfrak{F}$ — локальная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *группа $G/\Phi(G)$ монолитична с монолитом $G^{\mathfrak{F}}\Phi(G)/\Phi(G)$ и $C_G(G^{\mathfrak{F}}\Phi(G)/\Phi(G)) = G^{\mathfrak{F}}\Phi(G) = \mathrm{F}(G)$;*

2) *$G^{\mathfrak{F}}$ — p-группа для некоторого простого p;*

3) *$G^{\mathfrak{F}}/\Phi(G^{\mathfrak{F}})$ — $\mathfrak{F}$-эксцентральный главный фактор G;*

4) $\Phi(G^{\mathfrak{F}}) = G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G) \subseteq Z(G^{\mathfrak{F}})$;

5) *если группа $G^{\mathfrak{F}}$ неабелева, то ее центр, коммутант и подгруппа Фраттини совпадают и имеют экспоненту p;*

6) *если $G^{\mathfrak{F}}$ абелева, то она элементарна;*

7) *если $p > 2$, то p — экспонента $G^{\mathfrak{F}}$; при $p = 2$ экспонента $G^{\mathfrak{F}}$ не превышает 4;*

8) *для любой $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппы M из G имеет место $M \cap C_G(G^{\mathfrak{F}}/\Phi(G^{\mathfrak{F}})) = \Phi(G)$ и*

$$C_M(G^{\mathfrak{F}}) = \Delta^{\mathfrak{F}}(G) = Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G) = \Phi(G);$$

9) *любые две $\mathfrak{F}$-абнормальные максимальные подгруппы группы G сопряжены в G;*

10) *если $\Phi(G) \subseteq H \subset G$ и подгруппа H содержит $G^{\mathfrak{F}}$, то $H/\Phi(G) \in f(p)$ для любого полного локального экрана f формации $\mathfrak{F}$;*

11) *если M — $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа группы G и f — некоторый полный локальный экран $\mathfrak{F}$, то $M/\Phi(G)$ — минимальная не $f(p)$-группа и либо $M = \Phi(G) = \{1\}$, либо $\mathrm{d}(M/\Phi(G)) \geqslant \mathrm{d}(G)$.*

Доказательство. Утверждения пунктов 1)—9) вытекают из теорем 24.2—24.5 книги [107].

Докажем 10). Не ограничивая общности, положим $\Phi(G) = \{1\}$. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ — единственная минимальная нормальная подгруппа G. Легко видеть, что $C_G(G^{\mathfrak{F}}) = G^{\mathfrak{F}}$ и $O_{p'}(H) \subseteq C_G(G^{\mathfrak{F}})$. Но $G^{\mathfrak{F}}$ — p-группа. Значит, $O_{p'}(H) = \{1\}$. По условию $H \in \mathfrak{F}$. Следовательно, ввиду полноты экрана f имеет место

$$H \simeq H/O_{p'}(H) \in f(p).$$

Докажем 11). Пусть $\Phi(G) \subseteq H \subset M$. Тогда ввиду 1) $HG^{\mathfrak{F}} \neq G$. Значит, в силу 10) имеет место $HG^{\mathfrak{F}}/\Phi(G) \in f(p)$. Поскольку при этом

$$HG^{\mathfrak{F}}/\Phi(G)G^{\mathfrak{F}} \simeq H/(H \cap G^{\mathfrak{F}})\Phi(G) = H/\Phi(G),$$

то $H/\Phi(G) \in f(p)$. Таким образом, всякая собственная подгруппа группы $M/\Phi(G)$ принадлежит $f(p)$. Допустим, что $M/\Phi(G) \in f(p)$. Тогда

$$(G/\Phi(G))/C_{G/\Phi(G)}(G^{\mathfrak{F}}\Phi(G)/\Phi(G)) = \\ = (G/\Phi(G))/(G^{\mathfrak{F}}\Phi(G)/\Phi(G)) \simeq M/\Phi(G) \in f(p),$$

и поэтому $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Полученное противоречие показывает, что $M/\Phi(G) \notin f(p)$, т. е. $M/\Phi(G)$ — минимальная не $f(p)$-группа.

Предположим теперь, что $M \neq \Phi(G)$. Покажем, что $\mathrm{d}(M/\Phi(G)) \geqslant \mathrm{d}(G/\Phi(G))$. Не теряя общности, можно положить, что $\Phi(G) = \{1\}$. Тогда $G = G^{\mathfrak{F}} \rtimes M$, $M_G = \{1\}$. Пусть $M = \langle m_1, \ldots, m_r \rangle$, где $r = \mathrm{d}(M)$ и $G^{\mathfrak{F}} = \{n_1, n_2, \ldots, n_s\}$, где $s = |G^{\mathfrak{F}}|$. Для всякого $i \in \{1, \ldots, s\}$ через M_i обозначим подгруппу $\langle m_1, \ldots, m_{r-1}, m_r n_i \rangle$. Предположим, что все M_i отличны от G. Так как

$G^{\mathfrak{F}}M_i=G$, то M_i — дополнение к $G^{\mathfrak{F}}$ в G. Если $M_i \neq M_j$ для всех различных i и j, то

$$\{M_i \mid i=1, \ldots, s\}=\{M_i^x \mid x \in G\},$$

и поэтому $m_1 \in M_{i_G}=M_G=\{1\}$. Противоречие. Значит, $M_i=M_j$ для некоторых различных i и j. Из последнего вытекает

$$(m_r n_i)(m_r n_j)=m_r n_i n_j^{-1} m_r^{-1} \in G^{\mathfrak{F}} \cap M_i,$$

что невозможно. Полученное противоречие показывает, что $M_i=G$ для некоторого i и, следовательно, $\mathrm{d}(G) \leqslant \mathrm{d}(M_i)$. Лемма доказана.

Для всякого класса групп $\mathfrak{X}$ через $\mathcal{M}(\mathfrak{X})$ обозначим совокупность всех минимальных не $\mathfrak{X}$-групп.

23.3. Лемма. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная локальная формация, N — такая нормальная подгруппа группы G, что $N \subseteq \Phi(G) \cap Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G)$. Тогда $\mathfrak{X} \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$ равносильно $G/N \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$. Тогда $G/N \notin \mathfrak{F}$, и если M — произвольная максимальная подгруппа G, то M, а значит, и M/N принадлежит $\mathfrak{F}$. Следовательно, $G/N \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$.

Предположим теперь, что $G/N \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$. Понятно, что $G \notin \mathfrak{F}$. Пусть M — произвольная максимальная подгруппа G, тогда $M/N \in \mathfrak{F}$. Пусть H/K — произвольный G-главный фактор из N; $C=C_G(H/K)$. Обозначим через f максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$, и пусть $\{p\}=\pi(H/K)$. Так как $N \subseteq Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G)$, то $G/C \in f(H/K)$. Покажем, что

$$M/C \cap M \in f(H/K). \tag{1}$$

По лемме 8.7 формация $f(H/K)$ наследственна. Следовательно, если $C \subseteq M$, то сразу получим $M/C \in f(H/K)$. Если же $C \nsubseteq M$, то (1) вытекает из изоморфизма $G/C \simeq M/C \cap M$. Итак, всякий G-главный фактор из N f-централен в M. Значит, $M \in \mathfrak{F}$. Таким образом, $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$. Лемма доказана.

23.4. Лемма. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная наследственная формация, f — некоторый ее полный экран. Тогда G является минимальной не $\mathfrak{F}$-группой в том и только в том случае, когда выполняются следующие условия:*

1) $\Phi(G)=Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G)$;

2) $G/\Phi(G)=G^{\mathfrak{F}}\Phi(G)/\Phi(G) \rtimes M/\Phi(G)$, *где $G^{\mathfrak{F}}\Phi(G)/\Phi(G)$ — главный pd-фактор группы G, $M/\Phi(G)$ — минимальная не $f(p)$-группа.*

Доказательство. Необходимость вытекает из леммы 23.2.

Достаточность. Пусть $\overline{G}=G/\Phi(G)$ и $\overline{H}=H/\Phi(G)$ — произвольная максимальная подгруппа $\overline{G}$. Покажем, что $\overline{H}\in\mathfrak{F}$. Если $\overline{H}$ $\mathfrak{F}$-абнормальна, то ввиду леммы 23.2 имеем $\overline{G}=\overline{G}^{\mathfrak{F}}\times\overline{H}$. Значит, $\overline{H}\in\mathfrak{F}$. Пусть $\overline{G}^{\mathfrak{F}}\subseteq\overline{H}$. По условию $\overline{G}/\overline{G}^{\mathfrak{F}}\simeq\overline{M}=M/\Phi(G)\in\mathcal{M}(f(p))$. Следовательно, $\overline{H}\cap\overline{G}^{\mathfrak{F}}\in\in f(p)\cap\mathfrak{F}$ и по лемме 23.2 $\overline{G}^{\mathfrak{F}}=G^{\mathfrak{F}}\Phi(G)/\Phi(G)$ — p-группа. Значит, по лемме 8.2 $\overline{H}\in\mathfrak{F}$. Итак, $G/\Phi(G)\in\mathcal{M}(\mathfrak{F})$. Применяя теперь лемму 23.3, заключаем, что $G\in\mathcal{M}(\mathfrak{F})$. Лемма доказана.

23.5. Лемма. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, имеющая постоянный наследственный локальный экран. Группа G принадлежит $\mathcal{M}(\mathfrak{F})$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*:

1) $\Phi(G)=Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G)$, $G^{\mathfrak{F}}\Phi(G)=F(G)$;

2) $G/F(G)\in\mathcal{M}(f(p))$, *где* $p\in\pi(G^{\mathfrak{F}}/\Phi(G^{\mathfrak{F}}))$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $G\in\mathcal{M}(\mathfrak{F})$. Из леммы 23.2 следует, что $\Phi(G)=Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G)$, $G^{\mathfrak{F}}\Phi(G)=F(G)$. Покажем, что $G/F(G)\in\mathcal{M}(f(p))$. Так как

$$G/F(G)\simeq(G/\Phi(G))/F(G)/\Phi(G)=(G/\Phi(G))/F(G/\Phi(G)),$$

то, не ограничивая общности, можно считать, что $\Phi(G)=\{1\}$. Пусть M — произвольная $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа G. Тогда по лемме 23.2 $G=F(G)\times M$ и $M\in\mathfrak{N}_pf(p)$. Понятно, что $O_p(G)=\{1\}$. Значит, $F(M)$ — p'-группа. Так как $M\in\mathfrak{F}$ и экран f постоянен, то $M/F(M)\in\in f(p)$. Пусть K — произвольная собственная подгруппа M. Тогда поскольку по условию формация $f(p)$ наследственная, то $K/K\cap F(M)\simeq KF(M)/F(M)\in f(p)$. Кроме того, $K\in\mathfrak{N}_pf(p)$, т. е. $K/O_p(K)\in f(p)$. Следовательно, $K\simeq\simeq K/(O_p(K)\cap F(M)\cap K)\in f(p)$. Итак, всякая собственная подгруппа M принадлежит $f(p)$. Допустим, что $M\in f(p)$. Тогда $G/F(G)\in f(p)$, и поэтому $G\in\mathfrak{F}$. Противоречие. Таким образом, $G/F(G)\simeq M\in\mathcal{M}(\mathfrak{F})$.

Достаточность. Ввиду леммы 23.3 необходимо лишь установить, что $G/\Phi(G)\in\mathcal{M}(\mathfrak{F})$, что показывается так же, как и в лемме 23.4. Лемма доказана.

Минимальные не $\mathfrak{N}^n$-группы. Подгруппу T группы G называют подгруппой *шмидтовского типа*, если T является неединичной p-группой для некоторого простого p и выполняются следующие условия:

1) если T — неабелева группа, то $\Phi(T)=T'=\mathrm{Z}(T)$ — группа экспоненты p;

2) если T — абелева группа, то она элементарна;

3) экспонента T не превосходит p^2, причем если $p>2$, то она в точности равна p;

4) если T нормальна в G, то $T/\Phi(T)$ — G-главный фактор и $\Phi(T)=T\cap\Phi(G)\subseteq \mathrm{Z}(T)$.

Пусть G — произвольная группа. Определим рекурсивно подгруппы $\mathrm{F}_i(G)$ и $\Phi_i(G)$: 1) положим $\mathrm{F}_0(G)=\Phi_0(G)=\{1\}$; 2) если $i\geqslant 1$, то пусть подгруппы $\mathrm{F}_i(G)$ и $\Phi_i(G)$ таковы, что

$$\mathrm{F}_i(G)/\mathrm{F}_{i-1}(G)=\mathrm{F}(G/\mathrm{F}_{i-1}(G)),$$
$$\Phi_i(G)/\mathrm{F}_{i-1}(G)=\Phi(G/\mathrm{F}_{i-1}(G)).$$

23.6. Лемма. *Если $G\in\mathcal{M}(\mathfrak{N}^n)$, то $G/\mathrm{F}_i(G)\in\mathcal{M}(\mathfrak{N}^{n-i})$ для любого $i\in\{1, \ldots, n\}$.*

Доказательство. Лемму докажем индукцией по i. Прежде заметим, что по следствию 7.12 формация $\mathfrak{N}^r$ при всяком $r\geqslant 2$ имеет такой локальный экран f, что $f(p)=\mathfrak{N}^{r-1}$ при любом простом p. Следовательно, утверждение леммы при $i=1$ вытекает из леммы 23.5. Пусть $i\in\{2, \ldots, n\}$ и лемма при $i-1$ верна, т. е. $G/\mathrm{F}_{i-1}(G)\in M(\mathfrak{N}^{n-(i-1)})$. По лемме 23.5 имеет место

$$(G/\mathrm{F}_{i-1}(G))/\mathrm{F}(G/\mathrm{F}_{i-1}(G))\in\mathcal{M}(\mathfrak{N}^{n-(i-1)-1})=\mathcal{M}(\mathfrak{N}^{n-i}).$$

Теперь используем следующее:

$$G/\mathrm{F}_{i-1}(G)/\mathrm{F}(G/\mathrm{F}_{i-1}(G))=$$
$$=G/\mathrm{F}_{i-1}(G)/\mathrm{F}_i(G)/\mathrm{F}_{i-1}(G)\simeq G_i/\mathrm{F}_i(G).$$

Значит, $G/\mathrm{F}_i(G)\in\mathcal{M}(\mathfrak{N}^{n-i})$. Лемма доказана.

23.7. Теорема. *Тогда и только тогда G является минимальной не $\mathfrak{N}^n$-группой (n — натуральное число), когда выполняются следующие условия:*

1) $\mathrm{F}_i(G)/\Phi_i(G)$ — G-главный фактор для любого $i\in\{1, 2, \ldots, n+1\}$;

2) $G^{\mathfrak{N}^{n-i+1}}\mathrm{F}_{i-1}(G)/\mathrm{F}_{i-1}(G)$ — подгруппа шмидтовского типа в $G/\mathrm{F}_{i-1}(G)$ и $\mathrm{F}_i(G)=G^{\mathfrak{N}^{n-i+1}}\Phi_i(G)$, $i=1, \ldots, n+1$;

3) группа G имеет точно $n+1$ классов сопряженных максимальных подгрупп, причем если $M_1, \ldots, M_{n+1}$ — представители этих классов, то $M_i/\Phi_i(G)\in\mathcal{M}(\mathfrak{N}^{n-i})$ для $i=1, \ldots, n$ и $M_{n+1}=\mathrm{F}_n(G)$;

4) для любого $i\in\{1, \ldots, n\}$ и всякого G-главного фактора H/K из $\Phi_i(G)/\mathrm{F}_{i-1}(G)$ имеет место $G/C_G(H/K)\in\mathfrak{N}^{n-i}$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{F}_i=\mathrm{F}_i(G)$, $\Phi_i=\Phi_i(G)$, $i=1, \ldots, n$.

Необходимость. Легко видеть, что $l(G)=n+1$. Пусть $i\in\{1, \ldots, n\}$. По лемме 23.6 $G/\mathrm{F}_{i-1}\in\mathcal{M}(\mathfrak{N}^{n-i+1})$. Значит, по лемме 23.2

$$\mathrm{F}(G/\mathrm{F}_{i-1})/\Phi(G/\mathrm{F}_{i-1})=(\mathrm{F}_i/\mathrm{F}_{i-1})/(\Phi_i/\Phi_{i-1})$$

— (G/F_{i-1})-главный фактор. С другой стороны,

$$(G/\mathrm{F}_{i-1})^{\mathfrak{N}^{n-i+1}}=G^{\mathfrak{N}^{n-i+1}}\mathrm{F}_{i-1}/\mathrm{F}_{i-1}$$

— подгруппа шмидтовского типа в G/F_{i-1}. Кроме того, поскольку

$$(G/\mathrm{F}_{i-1})^{\mathfrak{N}^{n-i+1}}\Phi(G/\mathrm{F}_{i-1})=\mathrm{F}(G/\mathrm{F}_{i-1}),$$

то $G^{\mathfrak{N}^{n-i+1}}\Phi_i=\mathrm{F}_i$. Таким образом, группа G удовлетворяет условиям 1), 2).

Покажем, что G удовлетворяет условию 3). Прежде заметим, что любая максимальная подгруппа G дополняет один из главных факторов $\mathrm{F}_1/\Phi_1, \ldots, \mathrm{F}_n/\Phi_n, G/\mathrm{F}_n$. Так как $G/\mathrm{F}_n\in\mathcal{M}(\mathfrak{N}^0)=\mathcal{M}(\mathfrak{E})$, то G/F_n — группа простого порядка, т. е. F_n — максимальная подгруппа G. Пусть $i\in\{1, \ldots, n\}$ и M, T — максимальные подгруппы, дополняющие фактор F_i/Φ_i. Тогда поскольку $\mathrm{F}_i=G^{\mathfrak{N}^{n-i+1}}\Phi_i$, то M/F_{i-1} и T/F_{i-1} $(\mathfrak{N}^{n-i+1})$-абнормальны в G/F_{i-1}. Но $G/\mathrm{F}_{i-1}\in\mathcal{M}(\mathfrak{N}^{n-i+1})$. Следовательно, по лемме 23.2 подгруппы M/F_{i-1} и T/F_{i-1} сопряжены в G/F_{i-1} и поэтому M и T сопряжены в G. Итак, в G имеется точно $n+1$ классов сопряженных максимальных подгрупп. Пусть $M_1, \ldots, M_n, M_{n+1}=\mathrm{F}_n$ — представители этих классов, причем M_i дополняет фактор F_i/Φ_i, $i=1, \ldots, n$. Тогда $M_i\mathrm{F}_i=G$ и $M_i\cap\mathrm{F}_i=\Phi_i$. Поэтому

$$G/\mathrm{F}_i=M_i\mathrm{F}_i/\mathrm{F}_i\simeq M/M\cap\mathrm{F}_i=M/\Phi_i.$$

Но $G/\mathrm{F}_i\in\mathcal{M}(\mathfrak{N}^{n-i})$. Значит, $M/\Phi_i\in\mathcal{M}(\mathfrak{N}^{n-i})$. Этим самым завершено доказательство того, что G удовлетворяет условию 3).

Докажем 4). Пусть H/K — произвольный G-главный фактор из $\Phi_i(G)/\mathrm{F}_{i-1}(G)$, $i\in\{1, \ldots, n\}$. Так как $G/\mathrm{F}_{i-1}\in\mathcal{M}(\mathfrak{N}^{n-i+1})$, то по лемме 23.2 $\Phi(G/\mathrm{F}_{i-1})=$ $=Z_\infty^{\mathfrak{N}^{n-i+1}}(G/\mathrm{F}_{i-1})$. Значит, фактор $(H/\mathrm{F}_{i-1})/(K/\mathrm{F}_{i-1})$ $(\mathfrak{N}^{n-i+1})$-централен в G/F_{i-1}, т. е.

$$(G/\mathrm{F}_{i-1})/C_{G/\mathrm{F}_i}((H/\mathrm{F}_{i-1})/(K/\mathrm{F}_{i-1}))\in\mathfrak{N}^{n-i},$$

а поэтому $G/C_G(H/K)\in\mathfrak{N}^{n-i}$.

Достаточность. Так как F_i/Φ_i — G-главный фактор для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$, то $l(G) = n+1$. Значит, $G \notin \mathfrak{N}^n$. Пусть M — произвольная максимальная подгруппа G. Покажем, что $M/\Phi(G) \in \mathfrak{N}^n$. Если $F(G) \subseteq M$, то, поскольку $G/F(G) = G/F_1(G) \in \mathcal{M}(\mathfrak{N}^{n-1})$, имеем $M/F(G) \in \mathfrak{N}^{n-1}$. Следовательно, $M \in \mathfrak{N}^n$. Пусть $F(G) \nsubseteq M$. Тогда M дополняет фактор F_1/Φ_1, и поэтому ввиду 3) имеет место $M/\Phi_1 = M/\Phi(G) \in \mathcal{M}(\mathfrak{N}^{n-1})$. Значит, $M/\Phi(G) \in \mathfrak{N}^n$. Итак, $G/\Phi(G) \in \mathcal{M}(\mathfrak{N}^n)$. Но тогда ввиду леммы 23.3 $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{N}^n)$. Теорема доказана.

23.8. Лемма. *Пусть f — максимальный внутренний локальный экран тотально локальной формации $\mathfrak{F}$. Тогда при всяком $p \in \pi(\mathfrak{F})$ формация $f(p)$ тотально локальна.*

Доказательство. Пусть n — произвольное натуральное число. По условию формация $\mathfrak{F}$ $(n+1)$-кратно локальна. Пусть h — некоторый n-кратно локальный экран формации $\mathfrak{F}$, и пусть t — такой локальный экран, что при любом простом q имеет место $t(q) = \mathfrak{F} \cap h(q)$. Ввиду леммы 2.14, t — экран формации $\mathfrak{F}$. По лемме 2.16 экран t n-кратно локален. Применяя следствие 8.6, видим, что $\mathfrak{N}_p t(p) = f(p)$. Значит, в силу следствия 7.14 формация $f(p)$ n-кратно локальна. Итак, формация $f(p)$ является n-кратно локальной для любого натурального числа n. Лемма доказана.

23.9. Теорема. *Пусть нильпотентная длина группы G равна n. Тогда если найдется такая тотально локальная формация $\mathfrak{F}$, что $G \in M(\mathfrak{F})$, то $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{N}^{n+1})$ и группа G 2-порождена.*

Доказательство. Предположим, что теорема не верна и G — контрпример минимального порядка. Тогда, очевидно, G не является группой простого порядка. Обозначим через f максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Ввиду следствия 8.6 экран f является полным. Значит, по лемме 23.4 $\Phi(G) = Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G)$ и $G/\Phi(G) = G^{\mathfrak{F}}\Phi(G)/\Phi(G) \leftthreetimes M/\Phi(G)$, где $G^{\mathfrak{F}}\Phi(G)/\Phi(G)$ — главный pd-фактор группы G, $M/\Phi(G) \in \mathcal{M}(f(p))$. Кроме того, по лемме 23.2 $\Phi(G)G^{\mathfrak{F}} = F(G)$. Легко видеть, что $l(M/\Phi(G)) = n$. Значит, в силу леммы 23.8 и соображений индукции $M/\Phi(G) \in M(\mathfrak{N}^{n-1})$ и группа $M/\Phi(G)$ 2-порождена. Таким образом, ввиду леммы 23.2 группа G является 2-порожденной.

Предположим, что $\Phi(G) \neq \{1\}$. Очевидно, $G/\Phi(G) \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$ и $l(G/\Phi(G)) = l(G) = n+1$. По индукции $G/\Phi(G) \in \mathcal{M}(\mathfrak{N}^n)$. Покажем, что $\Phi(G) \subseteq Z_\infty^{\mathfrak{N}^n}(G)$. Пусть H/K —

произвольный G-главный фактор из $\Phi(G)$, $C=C_G(H/K)$. Допустим, что $H\cap G^{\mathfrak{F}}=K\cap G^{\mathfrak{F}}$. Тогда фактор H/K проективен фактору $HG^{\mathfrak{F}}/KG^{\mathfrak{F}}$. Заметим, что $G/G^{\mathfrak{F}}\in\mathfrak{N}^n$. Действительно, так как $l(G/G^{\mathfrak{F}}\Phi(G))=n$ и $\Phi(G)G^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}}\subseteq\subseteq\Phi(G/G^{\mathfrak{F}})$, то ввиду изоморфизма

$$G/G^{\mathfrak{F}}\Phi(G)\simeq(G/G^{\mathfrak{F}})/(G^{\mathfrak{F}}\Phi(G)/G^{\mathfrak{F}})$$

имеет место равенство $l(G/G^{\mathfrak{F}})=n$. Значит, фактор $HG^{\mathfrak{F}}/KG^{\mathfrak{F}}$ $\mathfrak{N}^n$-централен. Но тогда ввиду лемм 3.28 и 3.27 $\mathfrak{N}^n$-централен и фактор H/K. Пусть $H\cap G^{\mathfrak{F}}\neq K\cap G^{\mathfrak{F}}$. Тогда факторы H/K и $H\cap G^{\mathfrak{F}}/K\cap G^{\mathfrak{F}}$ проективны. Значит, $C=C_G(H\cap G^{\mathfrak{F}}/K\cap G^{\mathfrak{F}})$. Пусть $D=C\cap M$. Так как $\mathrm{F}(G)\subseteq C$, то $G=CM$. Следовательно, $G/C\simeq M/D$. Предположим, что $D/\Phi(G)\subseteq\Phi(M/\Phi(G))$. Тогда поскольку фактор H/K f-централен в G (напомним, что $\Phi(G)\subseteq\subseteq Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G)$, и формация $f(p)$ тотально локальна, то $M/\Phi(G)\in f(p)$. Но это невозможно, так как $M/\Phi(G)\in\in\mathcal{M}(f(p))$. Значит, $D/\Phi(G)\not\subseteq\Phi(M/\Phi(G))$. Пусть $T/\Phi(G)$ — такая максимальная подгруппа в группе $M/\Phi(G)$, что $(D/\Phi(G))(T/\Phi(G))=M/\Phi(G)$. Тогда поскольку $M/\Phi(G)\in\in\mathcal{M}(\mathfrak{N}^{n-1})$, то в силу изоморфизмов

$$M/D\simeq(M/\Phi(G))/(D/\Phi(G))\simeq(T/\Phi(G))/(T/\Phi(G)\cap D/\Phi(G))$$

заключаем, что M/D, а следовательно, и D/C принадлежит формации $\mathfrak{N}^{n-1}$. Таким образом, фактор H/K $\mathfrak{N}^n$-централен в G. Следовательно, $\Phi(G)\subseteq Z_\infty^{\mathfrak{N}^n}(G)$. Но $G/\Phi(G)\in\in\mathcal{M}(\mathfrak{N}^n)$. Значит, ввиду леммы 23.3 $G\in\mathcal{M}(\mathfrak{N}^n)$, что противоречит определению группы G.

Пусть теперь $\Phi(G)=\{1\}$. Тогда $\mathrm{F}(G)=G^{\mathfrak{F}}$ — минимальная нормальная подгруппа в G и $G=G^{\mathfrak{F}}\rtimes M$. Ясно, что $M\in\mathfrak{N}^n$. Пусть H — произвольная $\mathfrak{F}$-нормальная максимальная подгруппа из G. Тогда поскольку $M\in\mathcal{M}(\mathfrak{N}^{n-1})$ и $H==G^{\mathfrak{F}}(M\cap H)$, то $H/G^{\mathfrak{F}}\in\mathfrak{N}^{n-1}$, т. е. $l(H)=n$. Таким образом, $G\in\mathcal{M}(\mathfrak{N}^n)$. Вновь полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

23.10. Следствие. *Пусть $\mathfrak{F}$ — тотально локальная формация. Тогда если всякая 2-порожденная подгруппа группы G принадлежит $\mathfrak{F}$, то и $G\in\mathfrak{F}$.*

Обозначим через $\mathcal{L}_p(n)$ формацию групп с p-длиной $\leqslant n$.

23.11. Следствие. *Для всякого целого неотрицательного числа n имеет место $\mathcal{M}(\mathcal{L}_p(n))\subseteq\mathcal{M}(\mathfrak{N}^{2n})$.*

Доказательство. Пусть $G\in\mathcal{M}(\mathcal{L}_p(n))$. Для доказательства следствия ввиду теоремы 23.9 необходимо лишь показать, что $l(G)=2n+1$. Это очевидно, если $n=0$. Поэтому в дальнейшем можно считать, что $n\geqslant 1$. Не ограничивая общности, можно положить $\Phi(G)=\{1\}$. Хорошо известно (см. книгу [107]), что максимальный внутренний локальный экран h формации $\mathscr{L}_p(n)$ таков, что $h(p)=\mathfrak{N}_p\mathscr{L}_p(n-1)$ и $h(q)=\mathscr{L}_p(n)$ при любом простом $q\neq p$. Ввиду лемм 23.2 и 23.4 $G=G^{\mathfrak{F}}\leftthreetimes M$, где $G^{\mathfrak{F}}=\mathrm{F}(G)=C_G(G^{\mathfrak{F}})$ — минимальная нормальная подгруппа в G, а M — минимальная не $h(G^{\mathfrak{F}})$-группа. Понятно, что $G^{\mathfrak{F}}$ — p-группа. Значит, по лемме 8.5 $O_p(M)=\{1\}$ и $M\in\mathscr{M}(\mathfrak{N}_p\mathscr{L}_p(n-1))$. Пусть $D=M/\Phi(M)$. Очевидно, $O_p(D)=\{1\}$ и $D\in\mathscr{M}(\mathfrak{N}_p\mathscr{L}_p(n-1))$. Применив к группе D леммы 23.2 и 23.4, видим, что $D/\mathrm{F}(D)\in\mathscr{M}(\mathscr{L}_p(n-1))$. По индукции $l(D/\mathrm{F}(D))=2(n-1)+1$. Значит, $l(D)=l(M)=2n$, и поэтому $l(G)=2n+1$. Лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольная локальная формация. Обозначим через $\sigma(\mathfrak{F})$ совокупность всех таких $q\in\pi(\mathfrak{F})$, что $f(q)\neq\mathfrak{F}$, где f — максимальный внутренний локальный экран $\mathfrak{F}$. По определению $\sigma(\mathfrak{E})=\varnothing$.

23.12. Лемма. *Пусть $\mathfrak{F}$ — неединичная локальная формация. Тогда $\sigma(\mathfrak{F})=\varnothing$ в том и только в том случае, когда $\mathfrak{F}=\mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})}$.*

Доказательство. Ввиду п. 2.31 $\sigma(\mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})})=\varnothing$. С другой стороны, если $\sigma(\mathfrak{F})=\varnothing$, то ввиду следствия 6.8 $\mathfrak{F}=\mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})}$. Лемма доказана.

23.13. Дадим определение ранга тотально локальной формации. Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольная тотально локальная формация, f — ее максимальный внутренний локальный экран. Если $\sigma(\mathfrak{F})=\varnothing$, то ранг формации $\mathfrak{F}$ будем считать равным 0. Пусть $\sigma(\mathfrak{F})\neq\varnothing$. Тогда если ранг любой формации из $\Lambda=\{f(p)\mid p\in\sigma(\mathfrak{F})\}$ уже определен и не превосходит $t-1$, где $t\geqslant 1$, и по крайней мере одна из формаций множества Λ имеет ранг $t-1$, то ранг формации $\mathfrak{F}$ будем считать равным t и обозначим его через $r(\mathfrak{F})$. В этом случае мы будем говорить, что формация $\mathfrak{F}$ имеет *конечный ранг* t. Если же тотально локальная формация $\mathfrak{F}$ не имеет конечного ранга, то положим $r(\mathfrak{F})=\infty$ и будем говорить, что $\mathfrak{F}$ — *тотально локальная формация бесконечного ранга.*

23.14. Будем говорить, что тотально локальная формация $\mathfrak{F}$ *изотропна*, если либо $\sigma(\mathfrak{F})=\varnothing$, либо $\sigma(\mathfrak{F})\neq\varnothing$ и для любого $p\in\sigma(\mathfrak{F})$ имеет место $r(\mathfrak{F})=r(f(p))+1$, где f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Тотально локальную формацию будем называть *анизотропной*, если она не является изотропной.

Понятие изотропной тотально локальной формации позволяет извлечь из теоремы 23.9 следующий результат.

23.15. Следствие. *Пусть $\mathfrak{F}$ — изотропная тотально локальная формация конечного ранга n. Тогда $\mathcal{M}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathcal{M}(\mathfrak{N}^n)$.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$. Ввиду лемм 23.2 и 23.4 $G/\mathrm{F}(G) \in \mathcal{M}(f(p))$, где p — некоторый простой делитель $|G|$, а f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Так как по условию формация $\mathfrak{F}$ изотропна, то $r(f(p)) = r(\mathfrak{F}) - 1$ и, кроме того, изотропной является формация $f(p)$. Значит, по индукции

$$\mathcal{M}(f(p)) \subseteq \mathcal{M}(\mathfrak{N}^{n-1}_{\pi(f(p))}).$$

Отсюда вытекает, что $l(G/\mathrm{F}(G)) = n$, т. е. $l(G) = n + 1$. Следовательно, по теореме 23.9 $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{N}^n)$, и поэтому $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{N}^n_{\pi(\mathfrak{F})})$.

Теорема 23.9 позволяет выявить также такое свойство изотропных тотально локальных формаций.

23.16. Следствие. *Пусть $\mathfrak{F}$ — изотропная тотально локальная формация конечного ранга > 1. Тогда если f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$ и $p \in \pi(\mathfrak{F})$, то $\pi(\mathfrak{F}) = \pi(f(p))$.*

Доказательство. Предположим, что для некоторого $p \in \pi(\mathfrak{F})$ найдется такая группа Q простого порядка q, что $q \in \pi(\mathfrak{F}) \setminus \pi(f(p))$. Тогда $Q \in \mathcal{M}(f(p))$, а $G = P \rtimes Q \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$, где P — точный неприводимый $F_p[G]$-модуль (F_p — поле из p элементов). По следствию 23.15 $G \in M(\mathfrak{N}^{r(\mathfrak{F})})$. Но $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{N})$. Полученное противоречие завершает доказательство следствия.

23.17. Проблема. Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольная формация, причем $\mathcal{M}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathcal{M}(\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})})$. Выяснить, является ли формация $\mathfrak{F}$ локальной.

23.18. Проблема. Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольная локальная формация, причем $\mathcal{M}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathcal{M}(\mathfrak{N}^n)$ для некоторого натурального числа n. Выяснить, является ли формация $\mathfrak{F}$ тотально локальной.

§ 24. $\check{S}$-формации

В данном параграфе изучается локальная формация $\mathfrak{F}$ с тем свойством, что каждая нециклическая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа является группой Шмидта.

24.1. Для любого класса групп $\mathfrak{X}$ через $\mathfrak{X}^S$ обозначим наибольший (по включению) наследственный подкласс класса $\mathfrak{X}$. Легко проверить (см. лемму 25.4 книги [107]), что если $\mathfrak{X}$ — формация, то $\mathfrak{X}^S$ — также формация.

Если f — локальный экран, то через f^S будем обозначать такой локальный экран, что $f^S(p)=(f(p))^S$ при любом простом p.

Пусть f — наследственный локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Будем говорить, что f — максимальный наследственный локальный экран $\mathfrak{F}$, если $h \leqslant f$ для любого наследственного локального экрана h формации $\mathfrak{F}$.

24.2. Лемма. *Пусть h — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Тогда если формация $\mathfrak{F}$ наследственна, то она обладает максимальным наследственным локальным экраном φ, причем для любого $p \in \pi(\mathfrak{F})$ имеет место следующее:*

$$\varphi(p)=\mathfrak{N}_p\varphi(p); \quad \mathcal{M}(\varphi(p)) \subseteq \mathcal{M}(h(p)).$$

Доказательство. По теореме 23.3 книги [107] формация $\mathfrak{F}$ имеет такой локальный экран f, что $t \leqslant f$ для любого локального экрана t формации $\mathfrak{F}$ и, кроме того, при всяком $p \in \pi(\mathfrak{F})$ формация $f(p)$ совпадает с классом всех тех групп, у которых $\mathfrak{F}$-нормализаторы принадлежат $h(p)$. Пусть φ — такой локальный экран, что $\varphi(p) = (f(p))^S$ при любом простом p. Покажем, что $\langle\varphi\rangle=\mathfrak{F}$. Так как $\varphi \leqslant f$, то $\langle\varphi\rangle \subseteq \mathfrak{F}$. С другой стороны, ввиду условия и леммы 8.7 $h \leqslant \varphi$. Значит, $\mathfrak{F} \subseteq \langle\varphi\rangle$. Поэтому $\mathfrak{F}=\langle\varphi\rangle$.

Очевидно, для каждого наследственного локального экрана t формации $\mathfrak{F}$ имеет место $t \leqslant \varphi$. Покажем, что экран φ является полным. Пусть d — такой локальный экран, что $d(p)=\mathfrak{N}_p\varphi(p)$ при всяком простом p. Тогда ввиду леммы 8.5 $\langle d\rangle=\mathfrak{F}$ и поэтому $d(p) \subseteq f(p)$. Кроме того, формация $d(p)$ наследственна, так как она является произведением двух наследственных формаций. Значит, $d(p) \subseteq \varphi(p)$, т. е. $\varphi(p)=\mathfrak{N}_p\varphi(p)$. Таким образом, φ — максимальный наследственный локальный экран формации $\mathfrak{F}$, причем этот экран является полным.

Пусть теперь p — произвольное простое число из $\pi(\mathfrak{F})$ и $G \in \mathcal{M}(\varphi(p))$. Предположим, что $G \notin \mathfrak{F}$ и D — некоторый $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G. Тогда $D \neq G$. Значит, $D \in \varphi(p) \cap \mathfrak{F} \subseteq h(p)$, и поэтому $G \in f(p)$. Но тогда $G \in (f(p))^S = \varphi(p)$. Противоречие. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$ и если H — собственная подгруппа G, то $H \in \mathfrak{F} \cap \varphi(p) \leqslant h(p)$. Значит, $\mathcal{M}(\varphi(p)) \subseteq \mathcal{M}(h(p))$. Лемма доказана.

Формацию $\mathfrak{F}$ назовем *$\check{S}$-формацией*, если всякая нециклическая группа из $\mathcal{M}(\mathfrak{F})$ является группой Шмидта.

24.3. Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная наследственная формация. Тогда $\mathfrak{F}$ в том и только в том случае является*

$\mathfrak{S}$-формацией, когда $\mathfrak{F}$ имеет такой полный локальный экран f, что при любом $p \in \pi(\mathfrak{F})$ имеет место $f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$.

Доказательство. Необходимость. По лемме 24.2 формация $\mathfrak{F}$ обладает максимальным наследственным локальным экраном f, причем этот экран является полным. Пусть τ — такой локальный экран, что $\tau(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$, если $p \in \pi(\mathfrak{F})$, и $\tau(p) = \varnothing$, если $p \in \pi'(\mathfrak{F})$. Докажем, что $f = \tau$. Включение $f \leqslant \tau$ очевидно.

Допустим, что класс $\tau(p) \diagdown f(p)$ непуст для некоторого простого p, и выберем в нем группу G наименьшего порядка. Тогда $G \in \mathcal{M}(f(p))$, $O_p(G) = \{1\}$ и, кроме того, группа G монолитична. По лемме 18.8 существует точный неприводимый $F_p[G]$-модуль, где F_p — поле из p элементов. Пусть $T = L \rtimes G$. Покажем, что $T \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$. Так как $G \in \mathcal{M}(f(p))$, то по лемме 24.2 $G \in \mathfrak{F}$. Пусть M — произвольная максимальная подгруппа T, не изоморфная G. Тогда $L \subseteq M$. Так как $T/L \simeq G \in \mathcal{M}(f(p))$ и по лемме 24.2 $\mathcal{M}(f(p)) \subseteq \mathcal{M}(h(p))$, где h — максимальный внутренний локальный экран $\mathfrak{F}$, то $M/L \in f(p)$. Но тогда по лемме 8.2 $M \in h(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Значит, любая собственная подгруппа T принадлежит $\mathfrak{F}$. При этом, очевидно, $T \notin \mathfrak{F}$. Следовательно, $T \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$, и поэтому по условию T — группа Шмидта. Из описания строения групп Шмидта (см. главу 5 книги [107]) вытекает, что G — группа простого порядка. Но тогда $G \in f(p)$, ибо $|G| \in \pi(f(p))$, и формация $f(p)$ наследственна. Полученное противоречие показывает, что $f = \tau$.

Достаточность. Пусть $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$. Если $|\pi(G)| = 1$, то, очевидно, G — группа простого порядка. Пусть $|\pi(G)| > 1$.

Обозначим через D группу $G/\Phi(G)$. Так как $D \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$, то ввиду лемм 23.2 и 23.4 $D = D^{\mathfrak{F}} \rtimes M$, где $D^{\mathfrak{F}}$ — минимальная нормальная q-подгруппа D, а $M \in \mathcal{M}(f(q))$. Поскольку по условию $f(q) = \mathfrak{S}_{\pi}$ для некоторого множества простых чисел π, то M — группа простого порядка. Значит, $l(G) = l(D) = 2$, и поэтому ввиду теоремы 23.9 G — группа Шмидта. Теорема доказана.

24.4. Лемма. *Для любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ имеет место $\mathcal{M}(\mathfrak{X}) = \mathcal{M}(\mathfrak{X}^S)$.*

Доказательство леммы осуществляется прямой проверкой.

24.5. Как показали Картер, Фишер и Хоукс [129] (см. также главу 5 книги [107]), класс $\mathfrak{F}^S$ является локальной формацией, если локальной формацией является класс $\mathfrak{F}$. Используя этот факт, а также лемму 24.4, получаем из теоремы 24.3 такой результат.

24.6. Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация. Тогда $\mathfrak{F}$ является S-формацией в том и только в том случае, когда $\mathfrak{F}^S$ имеет такой полный локальный экран f, что при любом $p \in \pi(\mathfrak{F})$ имеет место $f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$.*

§ 25. Формации, удовлетворяющие условию Кегеля

Будем говорить, что формация $\mathfrak{F}$ *удовлетворяет условию Кегеля*, если $\mathfrak{F}$ содержит всякую группу $G = AB = BC = AC$, где подгруппы A, B и C принадлежат $\mathfrak{F}$.

25.1. Теорема. *Если локальная формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию Кегеля, то $\mathfrak{F}^S$ является $\check{S}$-формацией.*

Доказательство. Согласно теореме 22.3 книги [107] формация $\mathfrak{F}$ имеет такой локальный экран f, что $t \leqslant f$ для любого локального экрана t формации $\mathfrak{F}$, и, кроме того, при всяком $p \in \pi(\mathfrak{F})$ формация $f(p)$ совпадает с классом всех тех групп, у которых $\mathfrak{F}$-нормализаторы принадлежат $h(p)$, где h — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$.

Пусть $p \in \pi(\mathfrak{F})$ и $G \in \mathcal{M}(f(p))$. Легко убедиться, что любая подгруппа группы G (в том числе и сама G) принадлежит $\mathfrak{F}$ (см. доказательство леммы 24.2). Покажем, что группа G циклична. Предположим противное. Тогда G имеет по крайней мере две такие максимальные подгруппы M_1 и M_2, что $M_{1G} \neq M_{2G}$. Пусть K — наибольшая (по включению) нормальная подгруппа G со свойством $\overline{G} = G/K \in \mathcal{M}(f(p))$. Тогда $K \subseteq \Phi(G)$ и группа $\overline{G}$ монолитична. Кроме того, поскольку ввиду леммы 8.5 экран f является полным, то $O_p(\overline{G}) = \{1\}$. Значит, по лемме 18.8 существует точный неприводимый $F_p[\overline{G}]$-модуль L. Пусть $D = L \rtimes \overline{G}$. Поскольку $C_D(L) = L$, то $D \notin \mathfrak{F}$. Пусть $D_i = L\overline{M}_i$, где $\overline{M}_i = M_i/K$, $i = 1, 2$, и $D_3 = \overline{G}$. Легко видеть, что $D_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2, 3$. Но $D = D_1D_2 = D_1D_3 = D_2D_3$, и поэтому по условию $D \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $\overline{G} \simeq D/C_D(L) = D/L \in f(p)$. Полученное противоречие показывает, что группа G циклична. Поскольку при этом $G \in \mathcal{M}(f(p))$, то найдется такое простое число $q \neq p$, что $|G| = q^n$, где $n \geqslant 1$.

Предположим, что $n > 1$. Пусть E и B — циклические группы соответственно порядков q^{n-1} и q. Обозначим через T регулярное сплетение $E \wr B$. И пусть L — база сплетения T. Так как некоторая подгруппа группы T изоморфна G, то $T \notin f(p)$. При этом, очевидно, группы L и B принадлежат формации $f(p)$. Пусть $R = P \wr T$, где $|P| = p$. Обозначим через A базу сплетения R. Группу R можно представить в виде

$$R = R_1R_2 = R_1R_3 = R_2R_3,$$

где $R_1 = T$, $R_2 = AL$, $R_3 = AB$. Легко видеть, что группы R_1, R_2 и R_3 принадлежат формации $\mathfrak{F}$. Значит, $R \in \mathfrak{F}$. Но $F_p(R) = A$, и поэтому $T \simeq R/A \in f(p)$. Полученное противоречие показывает, что $n = 1$.

Таким образом, всякая минимальная не $f(p)$-группа имеет простой порядок. Значит, ввиду леммы 24.4 $(f(p))^S = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$. Пусть t — такой локальный экран, что $t(p) = (f(p))^S$ при любом простом p. Ввиду теоремы 25.2 книги [107] имеет место $\langle t \rangle = \mathfrak{F}^S$. Значит, по следствию 24.6 $\mathfrak{F}$ — $\check{S}$-формация. Теорема доказана.

Напомним один хорошо известный результат Кегеля [167].

25.2. Лемма. *Если $G = AB = BC = AC$, где A, B и C — различные π-замкнутые подгруппы группы G, то G — π-замкнутая группа.*

25.3. Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная локальная формация. Тогда $\mathfrak{F}$ в том и только в том случае удовлетворяет условию Кегеля, когда $\mathfrak{F}$ — S-формация.*

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 25.1.

Пусть $\mathfrak{F}$ — $\check{S}$-формация. Тогда по теореме 24.3 $\mathfrak{F}$ имеет такой полный локальный экран f, что при любом $p \in \pi(\mathfrak{F})$ имеет место $f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$. Предположим, что формация $\mathfrak{F}$ не удовлетворяет условию Кегеля, и пусть G — группа наименьшего порядка такая, что $G = AB = BC = AC$, где A, B и C — различные подгруппы группы G, причем A, B, $C \in \mathfrak{F}$, но $G \notin \mathfrak{F}$. Легко видеть, что $\Phi(G) = \{1\}$ и группа G монолитична. Пусть N — монолит G. Тогда $N = G^{\mathfrak{F}} = C_G(N) = O_p(G)$, где $p \in \pi(N)$. Это, в частности, означает, что $G/N \notin f(p)$. Но $f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$. Значит, $\pi(G/N) \nsubseteq \pi(f(p))$. Пусть $\omega = \pi(G/N) \setminus \pi(f(p))$ и $\pi = \omega \cup \{p\}$. Из теоремы 4.6 гл. VI книги [162] легко вытекает, что в G найдется такой элемент g, что для некоторых π-холловских подгрупп A_π, B_π и C_π соответственно из A, B и C имеет место $A_\pi B_\pi = B_\pi C_\pi^g = C_\pi^g A$, причем $C_\pi = A_\pi B_\pi$ — π-холловская подгруппа группы G.

Пусть $|G_\pi| < |G|$. Так как формация $\mathfrak{F}$ наследственна, то подгруппы A_π, B_π и C_π принадлежат формации $\mathfrak{F}$. Значит, ввиду выбора G подгруппа G_π также принадлежит $\mathfrak{F}$. Следовательно, $G_\pi/F_p(G_\pi) \in f(p)$. Значит, $\pi(G_\pi/F_p(G_\pi)) \subseteq$

$\subseteq \pi(f(p))$. Так как $N \subseteq G_\pi$ и $N = C_G(N)$, то $O_{p'}(G_\pi) = \{1\}$, и поэтому $F_p(G_\pi) \subseteq O_p(G_\pi)$. Но тогда

$$\omega \cap \pi(f(p)) \supset \omega \cap \pi(G_\pi/F_p(G_\pi)) \neq \varnothing.$$

Полученное противоречие показывает, что $G_\pi = G$. Из этого, в частности, вытекает, что все три группы A, B и C p-нильпотентны. Но тогда по лемме 25.2 p-нильпотентна и сама группа G, что невозможно. Вновь полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

§ 26. Комментарии

В данном параграфе все группы конечны, но не обязательно разрешимы.

26.1. Теории минимальных не $\mathfrak{F}$-групп посвящена фундаментальная работа В. Н. Семенчука [63]. Все результаты § 23 принадлежат В. Н. Семенчуку.

26.2. Следствие 23.11 доказано Картером, Фишером и Хоуксом [129].

26.3. Как показал Ито [165], всякая минимальная не p-нильпотентная группа является группой Шмидта. С другой стороны, согласно результату С. А. Чунихина [105] группой Шмидта является и всякая минимальная не p-разложимая группа. Эти и другие результаты такого рода приводят к следующей задаче.

Проблема. Описать локальные формации $\mathfrak{F}$ такие, что каждая нециклическая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа является группой Шмидта.

В § 24 дано решение этой задачи в классе разрешимых групп [66].

26.4. Теоремы параграфа 25 доказаны А. Ф. Васильевым [2].

26.5. Пусть Σ — некоторое теоретико-групповое свойство (необязательно абстрактное). Формацию $\mathfrak{F}$ назовем Σ-различимой, если $\mathfrak{F}$ содержит всякую группу, у которой все Σ-подгруппы принадлежат $\mathfrak{F}$. Нахождению Σ-различимых формаций для некоторых свойств Σ посвящены работы А. Ф. Васильева [3, 4].

26.6. Значительно более широким, чем класс минимальных не $\mathfrak{F}$-групп, является класс не $\mathfrak{F}$-групп, у которых все подгруппы непримарных индексов принадлежат формации $\mathfrak{F}$. Изучению таких групп посвящена работа А. В. Сидорова [73].

ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНЫХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ

Если A — множество, то $|A|$ — его мощность; $\varnothing$ — пустое множество. Мы различаем знак $\subseteq$ включения множеств и знак $\subset$ строгого включения; $\cap$ и $\cup$ — соответственно знаки пересечения и объединения множеств; $\{\alpha \mid \beta\}$ — множество всех α, для которых выполнено β. Собственное подмножество множества A — это подмножество, отличное от A. Через A^n, где n — натуральное число, обозначается декартова n-я степень множества A. Образ элемента $a \in A$ при отображении α: $A \longrightarrow B$ обозначается одним из способов: a^α, $a\alpha$, $\alpha(a)$.

Алгебраической системой (или просто *системой*) называется объект $X = \langle A, O, R\rangle$, состоящий из непустого множества A, семейства O алгебраических операций o_i: $A^{n_i} \longrightarrow A$ $(i \in I)$ и семейства R отношений $r_j \subseteq A^{m_j}$ $(j \in J)$, заданных на множестве A. Показатели n_i, m_j предполагаются целыми неотрицательными числами и называются *арностями* соответствующих операций и отношений. Множество A называется *носителем* или *основным множеством* системы X, его элементы — элементами этой системы. Мощность $|A|$ множества A называется *мощностью* или *порядком* системы X. Образ $o_i\left(a_1, \ldots, a_{n_i}\right)$ элемента $\left(a_1, \ldots, a_{n_i}\right) \in A^{n_i}$ при отображении o_i: $A^{n_i} \longrightarrow A$ называется значением операции o_i в точке $\left(a_1, \ldots, a_{n_i}\right)$. Если $\left(a_1, \ldots, a_{m_j}\right) \in r_j$, то говорят, что элементы $a_1, \ldots, a_{m_j}$ находятся в отношении r_j, и пишут $r_j\left(a_1, \ldots, a_{m_j}\right)$. В бинарном случае $(m_j=2)$ вместо $r_j(a_1, a_2)$ пишут также $a_1 r_j a_2$. Вместо $r_j\left(a_1, \ldots, a_{m_j}\right)$ пишут также $r_j\left(a_1, \ldots, a_{m_j}\right) = $ И (истина), а при $\left(a_1, \ldots, a_{m_j}\right) \notin r_j$ пишут $\neg\, r_j\left(a_1, \ldots, a_{m_j}\right)$ или $r_j\left(a_1, \ldots, a_{m_j}\right) = $ Л (ложь). Другими словами, не различают отношение и отвечающий ему предикат. Поясним еще случай нулевой арности. *Нульарной* операцией на множестве A называется фиксированный элемент из этого множества, а *нульарным* предикатом — один из элементов множества $\{И, Л\}$. Операции o_i $(i \in I)$ и отношения (предикаты) r_j $(j \in J)$, в отличие от других операций и отношений, которые могут быть определены на A, называются *основными* или *главными*. Пара семейств $\langle\{n_i \mid i \in I\}; \{m_j \mid j \in J\}\rangle$ называется *типом* системы X. Система X называется *конечной*, если множество A конечно, и *конечного типа*, если множество $I \cup J$ конечно. Система X называется *алгеброй* (или *универсальной алгеброй*), если множество R ее главных отношений является пустым. Непустое подмножество A_1 основного множества A системы X называют *замкнутым*, если A_1 замкнуто относительно каждой главной операции этой системы, т. е. результат любой главной операции, произведенной над произвольными элементами множества A_1, принадлежит снова A_1. Рассматривая операции из O и отношения из R на замкнутом подмножестве A_1, мы получаем систему $X_1 = \langle A_1, O_1, R_1\rangle$, однотипную данной и называемую *подсистемой* системы X (записывают $X_1 \subseteq X$). Подсистемы алгебр называют *подалгебрами*. Подсистема M системы X называется *максимальной*, если $M \neq X$ и из $M \subseteq H \subset X$, где H — подсистема X, всегда следует $M = H$. Если D — некоторое непустое подмножество из A, то пересечение всех тех подсистем системы X, которые содержат D, называется подсистемой, *порожденной* множеством D, и применяют для нее запись $\langle D\rangle_X$ или $\langle D\rangle$; если при этом $X = \langle D\rangle$, то D называют *порождающим* множеством системы X. Систему X называют *n-порожденной*, если она имеет порождающее множество мощности n.

Пусть дана еще одна система $X' = \langle A', O', R'\rangle$ типа $\langle\{n'_i \mid i \in I'\}; \{m'_j \mid j \in J'\}\rangle$. Системы X и X' называются *однотипными*, если $I = I'$, $J = J'$ и $n_i = n'_i$, $m_j = m'_j$ для всех $i \in I$, $j \in J$. Если системы X и X' однотипны, то их главные операции o_i, o'_i для каждого $i \in I$, а также главные предикаты r_j, r'_j для каждого $j \in J$ называются *одноименными*. *Отображением* φ системы X в систему X' (записывается $\varphi\colon X \longrightarrow X'$) называется отображение $\varphi\colon A \longrightarrow A'$ основного множества системы X в основное множество системы X'. Система X *изоморфна* однотипной системе X', если существует такое взаимно однозначное отображение φ системы X на систему X', что

$$\varphi(o_i(a_1, \ldots, a_{n_i})) = o'_i(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_{n_i})),$$
$$r_j(a_1, \ldots, a_{m_j}) \Leftrightarrow r'_j(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_{m_j}))$$

для всех $a_1, a_2, \ldots$ из A и для всех $i \in I$, $j \in J$. Отображение φ с этими свойствами называется *изоморфизмом*.

В данной книге *класс систем* — это некоторая совокупность систем одного и того же типа. Системы класса $\mathfrak{M}$ называются $\mathfrak{M}$-*системами*.

При рассмотрении классов все системы одного класса записывают обычно в определенной сигнатуре следующим образом. Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторый класс систем типа $\langle\{n_i \mid i \in I\}; \{m_j \mid j \in J\}\rangle$. Каждому $i \in I$ сопоставим функциональный символ F_i арности n_i, а каждому $j \in J$ — предикатный символ P_j арности m_j. На символы F_i $(i \in I)$ и P_j $(j \in J)$ можно смотреть как на общие имена соответствующих операций и предикатов систем класса $\mathfrak{M}$. Совокупность Ω указанных символов называется *сигнатурой* класса $\mathfrak{M}$; через Ω_F и Ω_P обозначаются соответственно совокупности $\{F_i \mid i \in I\}$ и $\{P_j \mid j \in J\}$. Если X — $\mathfrak{M}$-система и o_i — ее главная операция, то элемент $o_i(a_1, \ldots, a_{n_i})$ записывают в виде $F_i(a_1, \ldots, a_{n_i})$; аналогично, если r_j — главное отношение $\mathfrak{M}$-системы X и $(a_1, \ldots, a_{m_j}) \in r_j$, то пишут $P_j(a_1, \ldots, a_{m_j}) = \text{И}$ или просто $P_j(a_1, \ldots, a_{m_j})$. Поскольку любые две однотипные системы можно записать в одной сигнатуре, термин «однотипные системы» можно понимать как синоним термину «системы одной и той же сигнатуры».

Класс $\mathfrak{M}$ систем сигнатуры Ω называется *абстрактным*, если с каждой системой X класс $\mathfrak{M}$ содержит и все изоморфные ей системы сигнатуры Ω. Через $(\mathfrak{X})$ обозначается абстрактное замыкание совокупности $\mathfrak{X}$ однотипных систем, т. е. пересечение всех абстрактных классов, содержащих $\mathfrak{X}$. Во избежание недоразумений заметим, что иногда в литературе под классом понимают абстрактный класс (например, в [107] класс групп — это всегда абстрактный класс групп).

Система X, записанная в сигнатуре Ω, называется *Ω-системой* и обозначается $X = \langle A, \Omega\rangle$ или $X = \langle A, \Omega_F, \Omega_P\rangle$. Иногда, допуская некоторую вольность, систему и ее основное множество обозначают одним символом. *Гомоморфизмом* Ω-системы X в Ω-систему X' называют всякое отображение $\varphi\colon X \longrightarrow X'$, удовлетворяющее условиям

$$\varphi(F_i(a_1, \ldots, a_{n_i})) = F_i(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_{n_i})),$$
$$P_j(a_1, \ldots, a_{m_j}) \Rightarrow P_j(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_{m_j}))$$

для всех $F_i \in \Omega_F$, $P_j \in \Omega_P$ и для всех $a_1, a_2, \ldots$ из X. Гомоморфизм φ $X \longrightarrow X'$ называется *сильным*, если для любых элементов $b_1, \ldots, b_{m_j}$ из X' и для каждого $P_j \in \Omega_P$ из $P_j(b_1, \ldots, b_{m_j}) = \text{И}$ вытекает существование в X таких прообразов $a_1, \ldots, a_{m_j}$ элементов $b_1, \ldots, b_{m_j}$, для которых $P_j(a_1, \ldots, a_{m_j}) = \text{И}$. При гомоморфизме $\varphi\colon X \longrightarrow X'$ образ C^{φ} подсистемы C системы X является подсистемой системы X'. Гомоморфизм $\varphi\colon X \longrightarrow X'$ называется *сюрьективным* (или *эпиморфизмом*), если $X^{\varphi} = X'$.

Эквивалентность $\sigma \subseteq A^2$ называется *конгруэнцией* системы $X = \langle A, \Omega\rangle$, если

$$a_1\sigma b_1, \ldots, a_{n_i}\sigma b_{n_i} \Rightarrow F_i(a_1, \ldots, a_{n_i})\,\sigma F_i(b_1, \ldots, b_{n_i})$$

для всех $a_1, b_1, \ldots, a_{n_i}, b_{n_i}$ из A и для всех $F_i \in \Omega_F$. Конгруэнция, совпадающая с A^2, называется *единичной* и обозначается также через X^2, а конгруэнция $\Delta_X = \{(a, a) \mid a \in A\}$ носит название *нулевой*. Вместо Δ_X пишут Δ, если ясно, о какой системе идет речь. Конгруэнции Δ_X и X^2 системы X называются *тривиальными*.

Для каждого гомоморфизма φ: $X \longrightarrow X'$ можно построить конгруэнцию α, полагая $a\alpha b$ $(a, b \in X)$ истинным тогда и только тогда, когда $\varphi(a) = \varphi(b)$; такая конгруэнция α называется *ядерной* конгруэнцией гомоморфизма φ. Если $\{\pi_i \mid i \in M\}$ — некоторая совокупность конгруэнций системы X, то пересечение всех конгруэнций φ системы X, для которых $\pi_i \subseteq \varphi$ при любом $i \in M$, называют конгруэнцией, *порожденной* этой совокупностью. Конгруэнция, порожденная конгруэнциями π_1 и π_2, обозначается через $\pi_1 \vee \pi_2$.

Если φ и ψ — бинарные отношения на множестве A, то через $\varphi\psi$ обозначается их произведение, которое вводится следующим образом: $a\varphi\psi b$ имеет место тогда и только тогда, когда в A найдется такой элемент c, что $a\varphi c$ и $c\psi b$. Отношения φ и ψ называются перестановочными, если $\varphi\psi = \psi\varphi$. Для любых двух конгруэнций π_1 и π_2 системы X справедливо утверждение: $\pi_1\pi_2$ тогда и только тогда есть конгруэнция X, когда $\pi_1\pi_2 = \pi_2\pi_1$.

Пусть дана конгруэнция σ системы $X = \langle A, \Omega \rangle$. Для каждого $a \in A$ множество $a\sigma = \{x \mid x\sigma a\}$ называется *смежным классом* системы X по конгруэнции σ. Вместо $a\sigma$ применяется также запись $[a]_\sigma$. Если $H \subseteq X$, то через σH обозначают совокупность $\bigcup\limits_{a \in H} a\sigma$. Для любого $F_i \in \Omega_F$ положим

$$F_i(a_1\sigma, \ldots, a_{n_i}\sigma) = F_i(a_1, \ldots, a_{n_i})\,\sigma.$$

Для любого $P_j \in \Omega_P$ положим

$$P_j(b_1\sigma, \ldots, b_{m_j}\sigma) = \text{И}$$

тогда и только тогда, когда существуют такие элементы $c_1, \ldots, c_{m_j}$ в A, что $b_1\sigma c_1, \ldots, b_{m_j}\sigma c_{m_j}$ и $P_j(c_1, \ldots, c_{m_j})$. Тем самым мы получаем Ω-систему X/σ с основным множеством $A/\sigma = \{a\sigma \mid a \in A\}$. Система X/σ называется *факторсистемой* системы X по конгруэнции σ.

Пусть дан класс Ω-систем $\{X_i = \langle A_i, \Omega \rangle \mid i \in M\}$. Пусть $D = \prod\limits_{i \in M} A_i$ — *декартово произведение системы множеств* $\{A_i \mid i \in M\}$, т. е. множество отображений f: $M \longrightarrow \bigcup\limits_{i \in M} A_i$, удовлетворяющих условию $f(i) \in A_i$ $(i \in M)$. Построим теперь систему $X = \langle D, \Omega \rangle$ следующим образом. Если F_i из Ω_F имеет арность n_i и $d_1, \ldots, d_{n_i}$ — элементы из D, то значением $F_i(d_1, \ldots, d_{n_i})$ полагаем элемент $d \in D$, определяемый условиями

$$d(t) = F_i(d_1(t), \ldots, d_{n_i}(t)) \qquad (t \in M).$$

Если P_j из Ω_P имеет арность m_j и $d_1, \ldots, d_{m_j}$ — элементы из D, то полагаем $P_j(d_1, \ldots, d_{m_j}) = $ И тогда и только тогда, когда для каждого $t \in M$

$$P_j(d_1(t), \ldots, d_{m_j}(t)) = \text{И}.$$

Построенная Ω-система X называется *декартовым произведением* систем X_i по множеству индексов M и обозначается через $\prod_{i \in M} X_i$.

Заметим, что для каждого фиксированного $t \in M$ отображение π_t: $d \longmapsto d(t)$ $(d \in D)$ есть гомоморфизм X на X_t, который называют *проектированием* X на X_t.

Относительно формального языка теории Ω-систем см. [50]. *Тождествами* называют формулы вида

$$(\forall x_1) \ldots (\forall x_s) P(f_1, \ldots, f_m),$$

где P — какой-либо предикатный символ из Ω или знак равенства $=$, а $f_1, \ldots, f_m$ — термы сигнатуры Ω от $x_1, \ldots, x_s$. *Квазитождества* — это формулы вида

$$(\forall x_1) \ldots (\forall x_s) [P(f_1, \ldots, f_k) \,\&\, \ldots \,\&\, Q(g_1, \ldots, g_m) \longrightarrow R(h_1, \ldots, h_n)]$$

где $P, \ldots, Q, R$ — некоторые предикатные символы из Ω_P или знак равенства, а $f_1, \ldots, f_k, \ldots, g_1, \ldots, g_m, h_1, \ldots, h_n$ — термы сигнатуры Ω от $x_1, \ldots, x_s$. Если задано множество S тождеств (квазитождеств) сигнатуры Ω, то класс KS всех Ω-систем, в которых истинны все формулы из S, называется *многообразием* (соответственно *квазимногообразием*) Ω-систем. Через $\operatorname{var} \mathfrak{M}$ обозначаем многообразие, порожденное классом $\mathfrak{M}$.

Обратимся теперь к терминологии, используемой в теории групп. Через $N_G(H)$ и $C_G(H)$ обозначается соответственно нормализатор и централизатор H в группе G. $Z(G)$ — центр группы G, $\Phi(G)$ — *подгруппа Фраттини*, т. е. пересечение всех ее максимальных подгрупп (если таковых нет, то полагают $\Phi(G) = G$). Главный фактор H/K группы G называется *нефраттиниевым*, если $H/K \not\subseteq \Phi(G/K)$. Через π обозначается некоторое множество простых чисел; π' — дополнение к π в множестве всех простых чисел; p, q — простые числа; $\pi(n)$ — множество всех различных простых делителей натурального числа n. Если G — конечная группа, то $\pi(G) = \pi(|G|)$. Если $\mathfrak{F}$ — некоторый класс конечных групп, то через $\pi(\mathfrak{F})$ обозначают объединение множеств $\pi(G)$ для всех $G \in \mathfrak{F}$; $\pi'(\mathfrak{F}) = (\pi(\mathfrak{F}))'$. Натуральное число n называется *π-числом* (*πd-числом*), если $\pi(n) \subseteq \pi$ (соответственно $\pi \cap \pi(n) \neq \varnothing$). Конечная группа называется *π-группой* (*πd-группой*), если ее порядок есть π-число (соответственно πd-число). Обычно в обозначениях вместо $\{p\}$ пишут p (например, p-группа). Делитель d натурального числа n называется *π-делите-*

лем, если $\pi(d) \subseteq \pi$. Через n_π обозначают наибольший π-делитель натурального числа n. Если $x, y \in G$, $H \subseteq G$, то $H^x = x^{-1}Hx$, $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$. Если A и B — подгруппы группы G, то $[A, B]$ — подгруппа, порожденная всеми $[x, y]$, где $x \in A$, $y \in B$; $[A_1, \ldots, A_n] = [\ldots[[A_1, A_2], A_3], \ldots, A_n]$. *Экспонента* конечной группы — это наименьшее общее кратное порядков всех ее элементов. Подгруппу порядка $|G|_\pi$ конечной группы G называют *S_π-подгруппой* или *π-холловской* подгруппой и обозначают иногда через G_π. Подгруппа H конечной группы G называется *холловской*, если она является S_π-подгруппой для подходящего π. Через H_G обозначают пересечение всех подгрупп, сопряженных с подгруппой H в группе G. Запись $A \triangleleft G$ означает, что A — нормальная подгруппа группы G (не исключается случай $A = G$). Запись $G = A \leftthreetimes B$ применяется для обозначения полупрямого произведения подгрупп A и B, т. е. $G = AB$, $A \triangleleft G$, $A \cap B$ — единичная подгруппа $\{1\}$. Если группа G представима в виде произведения $G = AB$ двух своих подгрупп и $A \cap B = \{1\}$, то B называется *дополнением* к A в G.

Ряд подгрупп

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \ldots \supseteq H_t = \{1\}$$

называется: 1) *нормальным*, если $H_i \triangleleft G$ для любого i; 2) *субнормальным*, если $H_i \triangleleft H_{i-1}$ для любого $i > 0$ (при этом H_{i-1}/H_i называют *фактором* указанного ряда). *Главный* (*композиционный*) фактор группы G — это фактор главного (соответственно композиционного) ряда группы G. *Фактор* группы G — это некоторая факторгруппа какой-либо ее подгруппы (иногда факторы групп называют *секциями*). Конечная группа G, имеющая силовскую p-подгруппу G_p и p'-холловскую подгруппу $G_{p'}$, называется: 1) *p-разложимой*, если G_p и $G_{p'}$ нормальны в G; 2) *p-нильпотентной*, если $G_{p'} \triangleleft G$; 3) *p-специальной*, если $G_p \triangleleft G$. Конечная группа G называется *π-разложимой* (*π-нильпотентной*, *π-специальной*), если она p-разложима (соответственно p-нильпотентна, p-специальна) для любого p из π. Конечная группа с нормальной π-холловской подгруппой называется *π-замкнутой*.

Пусть φ — линейное упорядочение множества всех простых чисел. Запись $p\varphi q$ означает, что p предшествует q в упорядочении φ (в книге [107] запись $p\varphi q$ применялась только в случае $p \neq q$). Конечная группа G порядка $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n}$ называется *φ-дисперсивной*, если $p_1\varphi p_2\varphi \ldots \varphi p_n$ и для любого i группа G имеет нормальную подгруппу порядка $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_i^{\alpha_i}$. *Дисперсивной* группой называют конечную группу, которая φ-дисперсивна для некоторого φ.

Следуя С. А. Чунихину, конечную группу G называют:

1) *π-отделимой*, если для каждого ее главного фактора H/K имеет место $|\pi \cap \pi(H/K)| \leqslant 1$;

2) *π-разрешимой*, если $|\pi(H/K)|=1$ для каждого ее главного πd-фактора H/K (главный πd-фактор — это главный фактор, являющийся πd-группой);

3) *π-сверхразрешимой*, если каждый ее главный πd-фактор циклический.

Конечная группа называется *π-обособленной*, если каждый ее главный фактор является либо π-группой, либо π'-группой.

В теории формаций конечных групп за некоторыми классами групп зафиксированы соответствующие обозначения: $\mathfrak{G}$ — класс всех конечных групп, $\mathfrak{A}$ — класс всех конечных абелевых групп; $\mathfrak{N}$ — класс всех конечных нильпотентных групп, $\mathfrak{S}$ — класс всех конечных разрешимых групп, $\mathfrak{E}$ — класс единичных групп, $\mathfrak{N}_p$ — класс всех конечных p-групп.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли.— М.: Наука, 1985.— 447 с.
2. Васильев А. Ф. О некоторых свойствах локальных формаций // Вопросы алгебры.— Минск: Изд-во «Университетское», 1985.— № 1.— С. 4—9.
3. Васильев А. Ф. ($\mathfrak{X}$, h)-различимые локальные формации // Вопросы алгебры.— Минск: Изд-во «Университетское», 1986.— № 2.— С. 34—40.
4. Васильев А. Ф. К проблеме перечисления локальных формаций с заданным свойством // Вопросы алгебры.— Минск: Изд-во «Университетское», 1987.— № 3.— С. 3—11.
5. Васильева Т. И. Конечные π-разрешимые группы и их проекторы // Докл. АН БССР.— 1985.— Т. 29, № 3.— С. 197—200.
6. Васильева Т. И. О внутренних проекторах π-разрешимых групп // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп.— Минск: Наука и техника, 1986.— С. 7—19.
7. Васильева Т. И. Проекторы расширений π-разрешимых групп // Вопросы алгебры.— Минск: Изд-во «Университетское», 1986. — № 2.— С. 87—92.
8. Ведерников В. А. О $\mathfrak{F}$-проекторах в группах // Вопросы алгебры.— Минск: Изд-во «Университетское», 1985.— № 1.— С. 9—22.
9. Воробьев Н. Т. Максимальные экраны и характеризация $\mathfrak{F}$-проекторов // Докл. АН БССР.— 1978.— Т. 22, № 1.— С. 9—11.
10. Воробьев Н. Т. Максимальные экраны формаций // Докл. АН БССР.— 1978.— Т. 22, № 7.— С. 584—587.
11. Воробьев Н. Т. Максимальные экраны порожденных формаций // Докл. АН БССР.— 1979.— Т. 23, № 2.— С. 115—117.
12. Воробьев Н. Т. Максимальные экраны локальных формаций // Алгебра и логика.— 1979.— Т. 18.— № 2.— С. 137—161.
13. Воробьев Н. Т. Вложение локальных экранов // Мат. заметки.— 1981.— Т. 30.— № 2.— С. 305—311.
14. Воробьев Н. Т. О построении некоторых классов формаций // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп.— Минск: Наука и техника, 1984.— С. 39—47.
15. Воробьев Н. Т. Признаки локальности формационных произведений // Вопросы алгебры.— Минск: Изд-во «Университетское», 1985.— № 1.— С. 22—34.
16. Воробьев Н. Т. Максимальные экраны порожденных локальных формаций // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н.— 1985.— № 3.— С. 31—35.

17. Воробьев Н. Т. Об одном признаке локальности формационных произведений // Мат. заметки.— 1983.— Т. 34, № 2.— С. 165—170.
18. Гойко В. И. Построение $\mathfrak{F}$-профраттиниевых подгрупп в произвольных конечных группах // Докл. АН БССР.— 1978.— Т. 22, № 2.— С. 687—689.
19. Гойко В. И. Максимальные локальные подформации некоторых формаций // Докл. АН БССР.— 1979.— Т. 23, № 1.— С. 20—21.
20. Гойко В. И., Скиба А. Н. О $\mathfrak{F}$-профраттиниевых подгруппах конечных групп // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп.— Минск: Наука и техника, 1984.— С. 53—58.
21. Гойко В. И. $\mathfrak{F}$-профраттиниевы подгруппы конечных групп // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп.— Минск: Наука и техника, 1986.— С. 34—42.
22. Гойко В. И. Характеризация $\mathfrak{F}$-профраттиниевых подгрупп конечных групп свойством покрытия-изолирования главных факторов группы // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп.— Минск: Наука и техника, 1986.— С. 43—47.
23. Гойко В. И. Об одном свойстве $\mathfrak{F}$-профраттиниевых подгрупп конечных групп // Вопросы алгебры.— Минск: Изд-во «Университетское», 1986.— № 2.— С. 120—124.
24. Гойко В. И., Скиба А. Н. О $\mathfrak{F}$-профраттиниевых подалгебрах алгебр Ли конечной длины // Вопросы алгебры.— Минск: Изд-во «Университетское», 1987.— № 3— С. 78—86.
25. Горбачев В. И. Локальные $\mathfrak{F}$-подгруппы конечных групп // Вопросы алгебры.— Минск: Изд-во «Университетское», 1986.— № 2.— С. 62—72.
26. Горбачев В. И. Строение конечных групп с $\mathfrak{F}$-сепарирующими подгруппами // Докл. АН БССР.— 1985.— Т. 29, № 1.— С. 19—23.
27. Ергалиева К. О. О группах с $\mathfrak{H}$-пронормальными $\mathfrak{F}$-нормализаторами // Докл. АН БССР.— 1983.— Т. 27, № 8.— С. 684—685.
28. Ергалиева К. О. О формационных подгруппах конечных групп // Вопросы алгебры.— Минск: Изд-во «Университетское», 1985.— № 1.— С. 39—45.
29. Закревская Л. Н. Конечные группы с плотной системой $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп.— Минск: Наука и техника, 1984.— С. 71—88.
30. Закревская Л. Н. Строение конечных групп с плотной системой $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп // Вопросы алгебры.— Минск: Изд-во «Университетское», 1985.— № 1.— С. 45—50.
31. Закревская Л. Н. Конечные разрешимые группы с P-плотной системой подгрупп // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп.— Минск: Наука и техника, 1986.— С. 59—69.
32. Каморников С. Ф. Построение $\mathfrak{F}$-проекторов в конечных группах // Вопросы алгебры.— Минск: Изд-во «Университетское», 1985.— № 1.— С. 50—54.
33. Каморников С. Ф. О $\mathfrak{F}$-проекторах конечных групп // Докл. АН БССР.— 1985.— Т. 29, № 9.— С. 873—875.
34. Каморников С. Ф. О формационных подгруппах конечных групп // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп.— Минск: Наука и техника, 1985.— С. 69—74.
35. Каморников С. Ф. Пронормальные проекторы конечных ω-разрешимых групп // Вопросы алгебры.— Минск: Изд-во «Университетское», 1986.— № 2.— С. 80—86.

36. Каморников С. Ф. Об одном методе построения $\mathfrak{F}$-проекторов в конечных группах // Вопросы алгебры.— Минск: Изд-во «Университетское», 1987.— № 3.— С. 31—38.
37. Кармазин А. П., Шеметков Л. А. О π-дополняемости нормальных подгрупп конечных групп // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н.— 1986.— № 2.— С. 106—107.
38. Кармазин А. П., Шеметков Л. А. О расщепляемости расширений конечных групп // Докл. АН БССР.— 1987.— Т. 31, № 1.— С. 17—19.
39. Кармазин А. П., Шеметков Л. А. О дополняемости корадикалов в расширениях конечных групп // Вопросы алгебры.— Минск: Изд-во «Университетское», 1987.— № 3.— С. 38—48.
40. Клячко А. А. Многообразия p-групп малого класса // Исследования по алгебре.— Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1971.— № 4.— С. 43—50.
41. Кон П. Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968.— 351 с.
42. Кострикин А. И. Вокруг Бернсайда.— М.: Наука, 1986.— 127 с.
43. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре.— М.: Наука, 1973.— 399 с.
44. Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр.— М.: Наука, 1969.— 668 с.
45. Левищенко С. С., Кузенный Н. Ф. Конструктивное описание конечных минимальных несверхразрешимых групп // Вопросы алгебры.— Минск: Изд-во «Университетское», 1987.— № 3.— С. 56—63.
46. Мальцев А. И. Некоторые вопросы теории классов моделей // Тр. Всесоюзн. мат. съезда.— Л., 1963.— Т. 1.— С. 169—198.
47. Мальцев А. И. Об умножении классов алгебраических систем // Сиб. мат. ж.— 1967.— Т. 8, № 2.— С. 346—365.
48. Мальцев А. И. О некоторых пограничных вопросах алгебры и математической логики // Тр. Междунар. конгр. математиков.— М.: Мир, 1968.— С. 217—231.
49. Мальцев А. И. Избранные труды.— М.: Наука, 1976.— Т. 2.— 388 с.
50. Мальцев А. И. Алгебраические системы.— М.: Наука, 1970.— 392 с.
51. Монахов В. С. Классы конечных групп с изоордными биекторами // Вопросы алгебры.— Минск: Изд-во «Университетское», 1987.— № 3.— С. 76—78.
52. Нейман X. Многообразия групп.— М.: Мир, 1969.— 264 с.
53. Ольшанский А. Ю. Условные тождества в конечных группах // Сиб. мат. ж.— 1974.— Т. 15, № 6.— С. 1409—1413.
54. Ольшанский А. Ю. Разрешимые почти кроссовы многообразия групп // Мат. сб.— 1971.— Т. 85, № 129.— С. 98—114.
55. Поляков Л. Я. К теории обобщенных субнормальных подгрупп конечных групп // Подгрупповое строение конечных групп.— Минск: Наука и техника, 1981.— С. 62—66.
56. Ремесленников В. Н. Два замечания о 3-ступенно нильпотентных группах // Алгебра и логика.— 1965.— Т. 4, № 2.— С. 59—65.
57. Селькин М. В. Конечные группы с заданными $\mathfrak{F}$-абнормальными максимальными подгруппами // Конечные группы.— Минск: Наука и техника, 1978.— С. 143—151.
58. Селькин М. В. Исследование пересечений $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных подгрупп конечных групп // Подгрупповое

строение конечных групп.— Минск: Наука и техника, 1981.— С. 108—116.
59. Селькин М. В. О свойствах максимальных подгрупп конечных групп // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп.— Минск: Наука и техника, 1984.— С. 159—166.
60. Селькин М. В., Семенчук В. Н. Пересечение максимальных подгрупп в конечных группах // Вопросы алгебры.— Минск: Изд-во «Университетское», 1985.— № 1.— С. 67—72.
61. Сементовский В. Г. Проекторы конечных π-разрешимых групп // Подгрупповое строение конечных групп.— Минск: Наука и техника, 1981.— С. 116—138.
62. Сементовский В. Г. Инъекторы конечных групп // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп.— Минск: Наука и техника, 1984.— С. 166—170.
63. Семенчук В. Н. Минимальные не $\mathfrak{F}$-группы // Алгебра и логика.— 1979.— Т. 18, № 3.— С. 348—382.
64. Семенчук В. Н. Конечные группы с системой минимальных не $\mathfrak{F}$-групп // Подгрупповое строение конечных групп.— Минск: Наука и техника, 1981.— С. 138—149.
65. Семенчук В. Н. Обобщенные минимальные не $\mathfrak{F}$-группы // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп.— Минск: Наука и техника, 1984.— С. 170—175.
66. Семенчук В. Н., Васильев А. Ф. Характеризация локальных формаций $\mathfrak{F}$ по заданным свойствам минимальных не $\mathfrak{F}$-групп // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп.— Минск: Наука и техника, 1984.— С. 175—181.
67. Семенчук В. Н. Разрешимые группы со вторыми максимальными сверхразрешимыми подгруппами // Вопросы алгебры.— Минск: Изд-во «Университетское», 1985.— № 1.— С. 86—96.
68. Семенчук В. Н. Строение конечных групп с $\mathfrak{F}$-абнормальными и $\mathfrak{F}$-субнормальными подгруппами // Вопросы алгебры.— Минск: Изд-во «Университетское», 1986.— № 2.— С. 50—55.
69. Семенчук В. Н. О разрешимых минимальных не $\mathfrak{F}$-группах // Вопросы алгебры.— Минск: Изд-во «Университетское», 1987.— № 3.— С. 16—21.
70. Сидоров А. В. Конечные группы с системой нильпотентных подгрупп // Вопросы алгебры.— Минск: Изд-во «Университетское», 1985.— № 1.— С. 96—105.
71. Сидоров А. В. Конечные группы с системой $\mathfrak{F}$-подгрупп // Докл. АН БССР.— 1985.— Т. 29, № 7.— С. 592—594.
72. Сидоров А. В. О группах, близких к минимальным не $\mathfrak{F}$-группам // Вопросы алгебры.— Минск: Изд-во «Университетское», 1986.— № 2.— С. 55—61.
73. Сидоров А. В. Конечные группы с формационными подгруппами непримарных индексов // Вопросы алгебры.— Минск: Изд-во «Университетское», 1987.— № 3.— С. 48—56.
74. Слепова Л. М. π-Разрешимые группы с подгруппами, индексы которых попарно взаимно просты // Вопросы алгебры.— Минск: Изд-во «Университетское», 1986.— № 2.— С. 92—95.
75. Скиба А. Н. О сильно насыщенных формациях конечных групп // Докл. АН БССР.— 1978.— Т. 22, № 4.— С. 300—302.
76. Скиба А. Н. Критерий принадлежности конечной группы локальной формации // Конечные группы.— Минск: Наука и техника, 1978.— С. 166—169.

77. Скиба А. Н. О формациях, порожденных конечными группами // Докл. АН БССР.— 1979.— Т. 23, № 2.— С. 101—103.
78. Скиба А. Н. О локальных формациях конечных групп с S_n-замкнутыми подформациями // Докл. АН БССР.— 1979. Т. 23, № 8.— С. 677—680.
79. Скиба А. Н. Формация с заданной системой подформаций // Докл. АН БССР.— 1979.— Т. 23, № 12.— С. 1073—1076.
80. Скиба А. Н. О критических формациях // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н.— 1980.— № 4.— С. 27—33.
81. Скиба А. Н. Характеризации конечных метанильпотентных групп // Мат. заметки.— 1980.— Т. 27, № 3.— С. 345—351.
82. Скиба А. Н. О подформациях формаций конечных групп // Докл. АН БССР.— 1981.— Т. 25, № 6.— С. 492—495.
83. Скиба А. Н. О формациях, порожденных классами групп // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н.— 1981.— № 3.— С. 33—39.
84. Скиба А. Н. О формациях с заданными системами подформаций // Подгрупповое строение конечных групп.— Минск: Наука и техника, 1981.— С. 155—180.
85. Скиба А. Н. О произведении формаций // Алгебра и логика.— 1983.— Т. 22, № 5.— С. 574—583.
86. Скиба А. Н. О критических формациях // Докл. АН БССР.— 1983.— Т. 27, № 9.— С. 780—782.
87. Скиба А. Н. Формации со сверхразрешимыми локальными подформациями // Группы и другие алгебраические системы с условиями конечности.— Новосибирск: Наука.— 1984.— Т. 4.— С. 101—118.
88. Скиба А. Н. О минимальных S-замкнутых локальных не π-сверхразрешимых формациях // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп.— Минск: Наука и техника, 1984.— С. 53—58.
89. Скиба А. Н. О минимальных локальных не π-сверхразрешимых формациях // Вопросы алгебры.— Минск: Изд-во «Университетское», 1985.— № 1.— С. 105—112.
90. Скиба А. Н. О локальных формациях длины 5 // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп.— Минск: Наука и техника, 1986.— С. 135—149.
91. Скиба А. Н. О неоднопорожденных S-замкнутых локальных формациях // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп.— Минск: Наука и техника, 1986.— С. 149—156.
92. Скиба А. Н. О конечных подформациях многообразий алгебраических систем // Вопросы алгебры.— Минск: Изд-во «Университетское», 1986.— № 2.— С. 7—20.
93. Скиба А. Н. О подформациях многообразий алгебраических систем // Докл. АН БССР.— 1986.— Т. 30, № 1.— С. 9—12.
94. Скиба А. Н., Таргонский Е. А. Классификация локальных формаций конечных групп с нильпотентным дефектом 2 // Мат. заметки.— 1987.— Т. 41, № 4.— С. 490—499.
95. Скиба А. Н. Характеризация конечных разрешимых групп заданной нильпотентной длины // Вопросы алгебры.— Минск: Изд-во «Университетское», 1987.— № 3.— С. 21—31.
96. Скорняков Л. А. Элементы общей алгебры.— М.: Наука, 1983.— 272 с.
97. Таргонский Е. А. О локальных формациях с нильпотентными немаксимальными собственными локальными подформациями // Вопросы алгебры.— Минск: Изд-во «Университетское», 1985.— № 1.— С. 118—124.

98. Таргонский Е. А. Локальные формации со сверхразрешимыми предмаксимальными локальными подформациями // Вопросы алгебры.— Минск: Изд-во «Университетское», 1986.— № 2.— С. 20—34.
99. Таргонский Е. А. Неразрешимые локальные формации с системой нильпотентных подформаций // Вопросы алгебры.— Минск: Изд-во «Университетское», 1987.— № 3.— С. 11—16.
100. Тютин В. И. n-Арные группы с f-центральными рядами // Вопросы алгебры.— Минск: Изд-во «Университетское», 1987.— № 3.— С. 93—117.
101. Харламова В. И. Конечные группы с $\mathfrak{F}$-достижимыми подгруппами // Вопросы алгебры.— Минск: Изд-во «Университетское», 1987.— № 3.— С. 67—73.
102. Ходалевич А. Д. Минимальные не $\mathfrak{F}$-группы // Докл. АН БССР.— 1984.— Т. 28, № 5.— С. 389—391.
103. Ходалевич А. Д. Подгрупповое строение минимальных не $\mathfrak{H}$-групп // Вопросы алгебры.— Минск: Изд-во «Университетское», 1986.— № 2.— С. 72—80.
104. Холл М. Теория групп.— М.: ИЛ, 1962.— 468 с.
105. Чунихин С. А. Подгруппы конечных групп.— Минск: Наука и техника, 1964.— 158 с.
106. Шеметков Л. А. Экраны ступенчатых формаций // Тр. VI Всесоюзн. симпозиума по теории групп.— Киев: Наукова думка, 1980.— С. 37—50.
107. Шеметков Л. А. Формации конечных групп.— М.: Наука, 1978.— 267 с.
108. Шеметков Л. А. Два направления в развитии теории непростых конечных групп // Успехи мат. наук.— 1975.— Т. 30, № 2.— С. 179—198.
109. Шеметков Л. А. Факторизации непростых конечных групп // Алгебра и логика.— 1976.— Т. 15, № 6.— С. 684—715.
110. Шеметков Л. А. Экраны произведения формаций // Докл. АН БССР.— 1981.— Т. 25, № 8.— С. 677—680.
111. Шеметков Л. А. О $\mathfrak{F}$-радикалах конечных групп // Докл. АН БССР.— 1981.— Т.25, № 10.— С. 869—872.
112. Шеметков Л. А. О произведении формаций // Докл. АН БССР.— 1984.— Т.28, № 2.— С. 101—103.
113. Шеметков Л. А. О произведении формаций алгебраических систем // Алгебра и логика.— 1984.— Т. 23, № 6.— 721—729.
114. Шеметков Л. А. Новое направление общей алгебры // Вопросы алгебры.— Минск. Изд-во «Университетское», 1986.— № 2.— С. 3—7.
115. Шмелькин А. Л. Сплетения и многообразия групп // Изв. АН СССР. Математика.—1965.— Т. 29. — С. 149—170.
116. Baer R. The embedding relation derived from a formation // Houston J. Math.— 1978.— V. 4, № 4.— P. 447—516.
117. Barnes D. W., Gastineau-Hills H. On the theory of soluble Lie algebras // Math. Z.— 1969. Bd 106, № 4.— S. 34[illegible]—354.
118. Barnes D. W., Newell M. Some theorems on saturated homomorphs of soluble Lie algebras // Math. Z.—1970.— Bd 115, № 2.— S. 17[illegible]—187.
119. Barnes D. W. The Frattini argument for Lie algebras // Math. Z.— 1973.— Bd 133, № 3.— S. 277—283.
120. Barnes D. W. Saturated formations of soluble Lie algebras in characteristic 0 // Arch. Math.— 1978.— V. 30, № 6.— P. 477—480.

121. B a r n e s D. W. On $\mathfrak{F}$-hypercentral modules for Lie algebras // Arch. Math.— 1978.— V. 30, № 1.— P. 1—7.
122. B e r g e r T., C o s s e y J. More Fitting formations // J. Algebra.— 1978.— V. 51, № 2.— P. 573—578.
123. B r a n d l R. Zur Theorie der Untergruppenabgeschlossenen Formationen: Endlichen Varietäten // J. Algebra.—1981.— V. 73, № 1.— P. 1—22.
124. B r a n d l R. Finite varieties and groups with Sylow p-subgroups of low class // J. Austral. Math. Soc.— 1981.— V. 31, № 4.— P. 464—669.
125. B r a n d l R. Formations of metanilpotent groups and generalized Engel conditions // Arch. Math.— 1982.— V. 39, № 6.— P. 485—491.
126. B r a n d l R. Groups sharing some varietal properties with supersoluble groups // J. Austral. Math. Soc.— 1983.— V. A34, № 2.— P. 265—268.
127. B r y a n t R. M., B r y c e R. A., H a r t l e y B. The formation generated by a finite group // Bull. Austral. Math. Soc.— 1970.— V. 2, № 3.— P. 347—357.
128. B r y c e R. A., C o s s e y J. Subgroup closed Fitting classes are formations // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.—1982.— V. 91, № 2.— P. 225—258.
129. C a r t e r R., F i s c h e r B., H a w k e s T. Extreme classes of finite soluble groups // J. Algebra.—1968.— V. 9, № 3.— P. 285—313.
130. C a r t e r R., H a w k e s T. The $\mathfrak{F}$-normalizers of a finite soluble group // J. Algebra.—1967.— V. 5, № 2.— P. 175—202.
131. C o s s e y J., M a c d o n a l d Sh. O. On the definition of saturated formations of groups // Bull. Austral. Math. Soc.—1971.— V. 4, № 1.— P. 9—15.
132. C o s s e y J. Critical groups and the lattice of varieties // Proc. Amer. Math. Soc.— 1969.— V. 20.— P. 217—221.
133. D a d e E. C. Caractéres venant des $\mathfrak{F}$-normalisateurs d'un groupe fini résoluble // J. reine und angew. Math.—1979.— V. 307—308.— P. 53—112.
134. D a d e E. C. Some M-subgroups of M-groups // Arch. Math.— 1984.— Bd 42, № 6.— S. 503—508.
135. De G i o v a n n i F., F r a n c i o s i S. Su una particolare classe di formazioni saturate // Matematiche.— 1979.— V. 34, № 1—2.— P. 250—272.
136. D e r r J. B., D e s k i n s W. E., M u k h e r j e e N. P. The influence of minimal p-subgroups on the structure of finite groups // Arch. Math.—1985.— Bd 45, № 1.— S. 1—4.
137. D e s k i n s W. E. A condition for the solvability of a finite group // Ill. J. Math.— 1961.— V. 5, № 2.— P. 306—313.
138. D o e r k K., H a w k e s T. On the residual of a direct product // Arch. Math.—1978.— V. 30, № 5.— P. 458—468.
139. E r i c h s o n R. P. Products of saturated formations // Commun. Algebra.—1982.— V. 10, № 18.— P. 1911—1917.
140. E r i c h s o n R. P. Projectors of finite groups // Commun. Algebra.— 1982.— V. 10, № 18.— P. 1919—1938.
141. F e d r i V., T i b e r i o U. Una caratterizzazione dei gruppi finiti risolubili minimali non-$\mathfrak{F}$ // Boll. Unione mat. ital. —1980.— № 2.— S. 173—180.
142. F ö r s t e r P. Closure operations for Schunck classes and for-

mations of finite solvable groups // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.— 1979.— V. 85, № 2.— P. 253—259.
143. Förster P. Über die iterieter Definitionsbereiche von Homomorphen endlicher auflösbarer Gruppen // Arch. Math.—1980.— Bd 35, № 1—2.— S. 27—41.
144. Förster P. Prefrattini groups // J. Austral. Math. Soc.— 1983.— V. A34, № 2.— P. 234—247.
145. Förster P., Salomon E. Local definitions of local homomorphs and formations of finite groups // Bull. Austral. Math. Soc.—1985.— V. 35, № 1.— P. 5—34.
146. Förster P. Gesättigte Formationen: Projektoren // Arch. Math.— 1985.— Bd 44, № 3.— S. 193—209.
147. Gaschütz W. Praefrattinigruppen // Arch. Math.— 1962.— Bd 13, № 3.— S. 418—426.
148. Gaschütz W. Lectures on subgroups of Sylow type in finite soluble groups // Notes in Pure Mathematics.— Canberra: Austral. Nat. Univ.—1979.— V. 11.— 100 p.
149. Gaschütz W. Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen // Math. Z.— 1963.— Bd 80, № 4.— S. 300—305.
150. Gaschütz W. Eine Kennzeichnung der Projektoren endlicher auflösbarer Gruppen // Arch. Math.— 1980.— Bd 33, № 5.— S. 401—403.
151. Gardiner A. D., Hartley B., Tomkinson M. J. Saturated formations and Sylow structure in locally finite groups // J. Algebra.— 1971.— V. 17, № 2.— P. 177—211.
152. Grätzer G. A representation theorem for multi-algebras // Arch. Math.— 1962.— V. 13, № 6.— P. 452—456.
153. Gross F. Elementary Abelian operator groups and admissible formations // J. Austral. Math. Soc.— 1983.— V. A 34, № 1.— P. 71—91.
154. Hartley B. $\mathfrak{F}$-abnormal subgroups of certain locally finite groups // Proc. London Math. Soc.— 1971.— V. 23, № 1.— P. 128—158.
155. Hartley B. A note on $\mathfrak{F}$-reducibility // J. London Math. Soc.— 1972.— V. 6, № 1.— P. 161—168.
156. Hawkes T., Graham J. On the structure of a group whose orbits on a finite module are the orbits of a proper subgroup // J. Algebra.— 1985.— V. 94, № 4.— P. 364—381.
157. Hawkes T., Humphreys J. A character-theoretic criterion for the existence of normal complements to subgroups of finite groups // J. Algebra.— 1985.— V. 94, № 2.— P. 382—387.
158. Hawkes T. Analogues of prefrattini subgroups // Proc. Internat Conf. Theory of Groups.— Canberra, 1965.— № 4.— P. 145—150.
159. Heineken H. Group classes defined by chief factor ranks // Boll. Unione. mat. ital.— 1979.— V. B16, № 2.— P. 754—764.
160. Higgins P. J. Groups with multiple operators // Proc. London Math. Soc.— 1956.— V. 6, № 3.— P. 366—416.
161. Higman G. Representations of general linear groups and varieties of groups // Proc. Internat. Conf. Theory of Groups.— Canberra: Austral Nat. Univ., 1965.— P. 167—173.
162. Huppert B. Endliche Gruppen I.— Berlin; Heidelberg; New Jork: Springer. 1967.— 793 S.
163. Huppert B. Zur Theorie der Formationen // Arch. Math.— 1969. Bd 19, № 6.— S. 561—574.
164. Idowu E. p-saturated formations // Jsr. J. Math.— 1978.— V. 30, № 4.— P. 307—312.

165. Ito N. Note on (LN)-groups of finite order // Kodai Math. Seminar Report.— 1951.— V. 1—2.— P. 1—6.
166. Jonsson B. Varieties of groups of nilpotency three // Bull. London Math. Soc.— 1970.— V. 2, № 1.— P. 91.
167. Kegel O. H. Zur Struktur mehrfach faktorisierbarer endlicher Gruppen // Math. Z.— 1965.— Bd 87, № 1.— S. 42—48.
168. Kramer O.-U. Properties of critical groups // J. Algebra.— 1980.— V. 65, № 1.— P. 95—103.
169. Kramer O.-U. Gruppenklassen, deren kritische Gruppen minimal nicht nilpotent sind // Manuscr. Math.— 1979.— V. 27.— P. 113—123.
170. Laue R. Dualization of saturation for locally defined formations // J. Algebra.— 1978. — V. 84, № 3.— P. 437—441.
171. Lafuente J. Homomorphs and formations of given derived class // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.— 1978.— V. 84, № 3.— P. 437—441.
172. Liebeck H. Concerning nilpotent wreath products // Proc. Cambridge Phil. Soc.— 1962.— V. 58, № 5.— P. 443—451.
173. Malek A. A. The Frattini subalgebra of a Malcev algebra // Arch. Math.— 1981.— Bd 3[illegible] № 3.— S. 306—315. 37
174. Neumann P. M. A note on formations of finite nilpotent groups // Bull. London Math. Soc.— 1970.— V. 2, № 1.— P. 91.
175. Newell M. L. Nilpotent projectors in $\mathfrak{S}_1$-groups // Proc. Roy. Irish. Acad.— 1975.— V. A75, № 11.— P. 107—114.
176. Oates S., Powell M. B. Identical relations in finite groups // J. Algebra.— 1964.— V. 1.— P. 11—39.
177. Schmid P. Formationen und Automorphismen-gruppen // J. London Math. Soc.— 1973.— Bd 7, № 1.— S. 83—94.
178. Schmid P. Every saturated formation is a local formation // J. Algebra.— 1978.— V 51, № 1.— P. 144—148.
179. Sioson F. On generalized algebras // Portug. Math.— 1966.— V. 25, № 1—2.— P. 67—90.
180. Stitzinger E. Covering-avoidance for saturated formations of solvable Lie algebras // Math. Z.— Bd 124, № 3.— S. 237—249.
181. Stonehewer S. E. Formations and a class of locally soluble groups // Proc. Cambridge Philos Soc.—1966.— V. 62, № 4.— P. 613—635.
182. Tomkinson M. J. Formations of locally soluble *FC*-groups // Proc. London Math. Soc.—1969.— V. 19, № 4.— P. 675—708.
183. Tomkinson M. J. Prefrattini subgroups and cover-avoidance properties in $\mathfrak{U}$-groups // Can. J. Math.— 1975.— V. 27, № 4.— P. 837—851.
184. Tomkinson M. J. Formation theory and groups of automorphisms of $\mathfrak{U}$-groups // Proc. Royal. Soc. Edinburgh.— 1977.— V. 76A.— P. 255—265.
185. Torres M. Residuals of direct products and relative normality in formations // Commun. Algebra.— 1985.— V. 13, № 2.— P. 375—386.
186. Waal R. On monomial groups // J. reine und angew. Math.— 1973.— V. 264.— P. 103—134.

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Научное издание

Шеметков Леонид Александрович

Скиба Александр Николаевич

ФОРМАЦИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Серия «Современная алгебра»

Заведующий редакцией *Н. А. Угарова*
Редактор *Ф. И. Кизнер*
Художественный редактор *Г. М. Коровина*
Технический редактор *С. Я. Шкляр*
Корректор *Т. С. Вайсберг*

ИБ № 32389

Сдано в набор 10.06.88. Подписано к печати 13.12.88.
Формат 84×108/32. Бумага книжно-журнальная.
Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 13,44.
Усл. кр.-отт. 13,65. Уч.-изд. л. 14,85.
Тираж 2100 экз. Заказ № 3281. Цена 3 р.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени МПО «Первая Образцовая типография»
Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
113054 Москва, Валовая, 28

Отпечатано во 2-й типографии издательства «Наука».
121099 Москва Г-99, Шубинский пер., 6. Заказ 2646

Leonid Šemetkov, Alexander Skiba

FORMATIONS OF ALGEBRAIC SYSTEMS

Moscow, *Nauka*, Main Editorial Board for
Physical and Mathematical Literature, 1989

Readership: The book is addressed to students and researchers in algebra.

From the book's review: «... At present formation theory of algebraic systems has valuable ideas and methods which are given in this book. The book is rich in fruitful ideas and consructions for general theory of algebras congruences».

Professor D. M. SMIRNOV (Novosibirsk)

Summary: Formation is a class of algebraic systems which is closed under the operations of taking factor-systems and subdirect products. Originally formation theory was developed mainly within the theory of finite groups. This book for the first time presents the formation theory in the most general way. A great part of the book gives the results obtained by members of Gomel algebraic seminar headed by professor L. A. Šemetkov.

Contents: Modes of formation building (graduated formations, generated formations, pre-varieties). Algebra of formations (Malcev's and replica products of classes of systems, lattices of formations). Subalgebras of algebras in Malcev's variety (projectors and semiprojectors, prefrattini subalgebras, radicals and so on). Formations with given systems of subformations. Applications minimal non $\mathfrak{F}$-groups to the classification of formations ($\check{\mathfrak{S}}$-formations, formations with Kegel's condition).

Authors. Leonid Alexandrovich Šemetkov is Professor of Mathematics at the Gomel State University, Dr Sci. in Mathematics, corresponding member of Academy of Sciences of Byelorussian SSR, the author of numerous papers on algebra.

Alexander Nikolaevich Skiba is Professor-assistant at the Gomel State University, Candidate of Sci. in Mathematics, the author of a number of papers on algebra.

СПИСОК КНИГ, ВЫПУЩЕННЫХ ГЛАВНОЙ РЕДАКЦИЕЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ ИЗДАТЕЛЬСТВА «НАУКА»

В серии «СОВРЕМЕННАЯ АЛГЕБРА»

Черников С. Н. Линейные неравенства.— 1968.

Мальцев А. И. Алгебраические системы.— 1970.

Кокорин А. И., Копытов В. М. Линейно упорядоченные группы.— 1972.

Супруненко Д. А. Группы матриц.— 1972.

Цаленко М. Ш., Шульгейфер Е. Г. Основы теории категорий.— 1974.

Горчаков Ю. М. Группы с конечными классами сопряженных элементов.— 1978.

Кольца, близкие к ассоциативным/Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И.— 1978.

Шеметков Л. А. Формации конечных групп.— 1978.

Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М. Радикалы алгебр и структурная теория.— 1979.

Мерзляков Ю. И. Рациональные группы.— 1980.

Черников С. Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп.— 1980.

Копытов В. М. Решеточно упорядоченные группы.— 1984.

Салий В. Н. Решетки с единственными дополнениями.— 1984.

Ольшанский А. Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах.— 1989.

Размыслов Ю. П. Тождества алгебр и их представлений.— 1989.

Шеметков Л. А., Скиба А. Н. Формации алгебраических систем.— 1989.