Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
“Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины”

В. В. АНИСЬКОВ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Гомель, 2009

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
“Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины”

В. В. АНИСЬКОВ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ПРАКТИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

*для студентов 1 курса
заочного факультета специальности 1–31 03 01–02 — “Математика
(научно-педагогическая деятельность)”*

Гомель, 2009

УДК 514.12(075.8)
ББК 22.151 я 73
А 674

Рецензент:

кафедра алгебры и геометрии учреждения образования “Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины”

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования “Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины”

Аниськов, В.В.
Аналитическая геометрия: практическое пособие для студентов 1 курса заочного факультета специальности 1 -31 03 01–02 — “Математика (научно-педагогическая деятельность)”. / В. В. Аниськов. Мин-во образования РБ, Гомельский гос. ун-т им. Ф.Скорины. — Гомель: ГГУ им. Ф.Скорины, — 2009. — 50 с.

Практическое пособие предназначено студентам 1 курса математического отделения заочного факультета специальности 1–31 03 01–02 — “Математика (научно-педагогическая деятельность)”, изучающим дисциплину “Аналитическая геометрия”. Может быть использовано для самостоятельного изучения.

УДК 514.12(075.8)
ББК 22.151 я 73 ..

Содержание

Введение

Данное пособие является пособием для проведения практических занятий и выполнения контрольных работ по дисциплине "Аналитическая геометрия" для студентов заочного факультета.

В пособии представлены следующие разделы: "Векторная алгебра", "Прямая и плоскость", "Линии второго порядка", "Поверхности второго порядка".

Для задач принята сквозная нумерация. В начале каждой темы даются краткие теоретические сведения, необходимые для решения задач данной темы. Типовые задачи темы даны с решениями, некоторыке задачи содержат указания к их решению. Это позволяет использовать пособие для самоподготовки.

В конце пособия дается распределение задач по вариантам.

1 ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

1.1 Векторы. Линейные операции над векторами. Проекция вектора

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на действительное число α называется такой вектор $\vec{b}$, что выполняются следующие условия:

1) $|\vec{b}| = |\alpha|\ |\vec{a}|$;

2) $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны;

3) если $\alpha > 0$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и, если $\alpha < 0$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, что если $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ — представители векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то $\overrightarrow{AC}$ — представитель вектора $\vec{c}$.

Произведение вектора на число и сумму векторов принято называть линейными операциями над векторами. Линейные операции над векторами обладают следующими свойствами:

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$;

3) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ для любого действительного числа α и любых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (дистрибутивность);

4) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ для любых действительных чисел α и β и любого вектора $\vec{a}$;

5) $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$ для любого вектора $\vec{a}$ и любых двух действительных чисел α и β.

Векторы называются *коллинеарными,* если их представители параллельны одной и той же прямой.

Векторы называются *компланарными,* если их представители параллельны одной и той же плоскости.

Пусть дан ненулевой вектор $\vec{a}$. Для любого коллинеарного ему вектора $\vec{b}$ существует единственное действительное число λ такое, что $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Упорядоченная пара неколлинеарных векторов $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$ называется *базисом на плоскости.*

Если некоторый произвольный вектор $\vec{a}$ может быть представлен в виде $\vec{a} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2$, где $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$ — некоторый базис на плоскости, а $\alpha,\ \beta$ — некоторые действительные числа, то говорят, что вектор $\vec{a}$ разложен по векторам базиса $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$, а числа α и β называют коэффициентами разложения вектора $\vec{a}$ по векторам базиса $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$ или *координатами* вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$.

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ называется *базисом в пространстве.*

Если некоторый произвольный вектор $\vec{a}$ может быть представлен в виде $\vec{a} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3$, где $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ — некоторый базис в пространстве, а $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ — некоторые действительные числа, то говорят, что вектор $\vec{a}$ разложен по векторам базиса $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$, а числа $\alpha,\ \beta$ и γ называют коэффициентами разложения вектора $\vec{a}$ по векторам базиса $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ или *координатами* вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$.

Если базис состоит из единичных и взаимно перпендикулярных векторов, то он называется *ортонормированным*, а координаты произвольного вектора в этом базисе — *прямоугольными координатами.*

Осью называется некоторая прямая на которой выбран представитель некоторого единичного вектора.

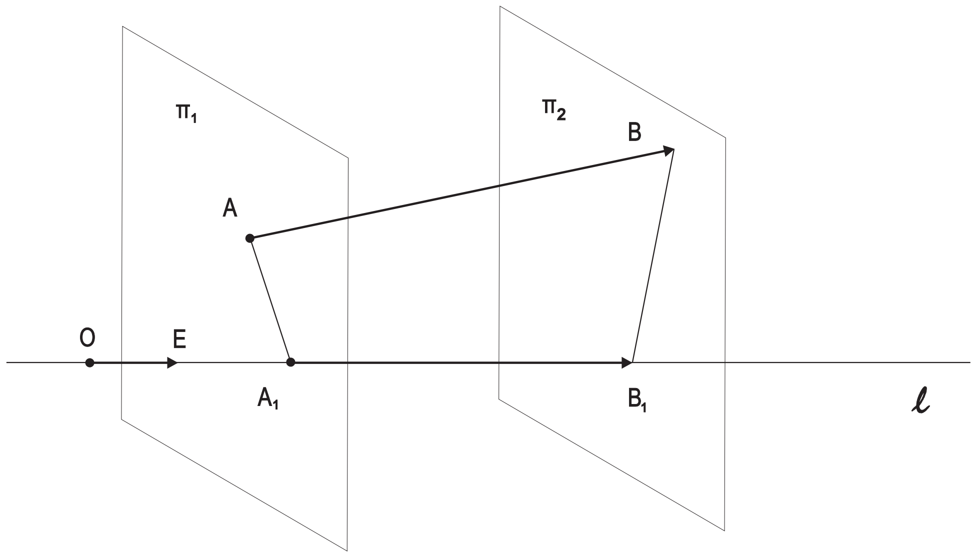

Рис. 1:

Векторной проекцией вектора $\vec{a}$ на ось l называется вектор $\overrightarrow{CD}$, начало и конец которого являются соответственно проекциями в обычном смысле на прямую l начала и конца некоторого представителя $\overrightarrow{AB}$ вектора $\vec{a}$.

Пусть $\vec{b}$ — векторная проекция вектора $\vec{a}$ на ось l. *Проекцией* вектора $\vec{a}$ на ось l называется число p такое, что $p = |\vec{b}|$, если направление вектора $\vec{b}$ совпадает с направлением оси l и $p = -|\vec{b}|$ в противном случае. Обозначается проекция вектора $\vec{a}$ на ось l следующим образом: $Pr_l\vec{a}$.

Проекция вектора на ось обладает следующими свойствами:

1)$Pr_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a}, l})$;
2) $Pr_l(\lambda\vec{a}) = \lambda Pr_l\vec{a}$ для любого действительного числа λ;
3) $Pr_l(\vec{a}+\vec{b}) = Pr_l\vec{a} + Pr_l\vec{b}$.

Задача 1. Точки A, B, C, D — вершины параллелограмма, O — его центр. Найдите разложение векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AO}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BO}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CO}$, $\vec{d} = \overrightarrow{DO}$.

Решение. Построим параллелограмм $ABCD$ (рис. 2). Вначале заметим, что, поскольку диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам, то $\vec{a} = -\vec{c}$, $\vec{b} = -\vec{d}$.

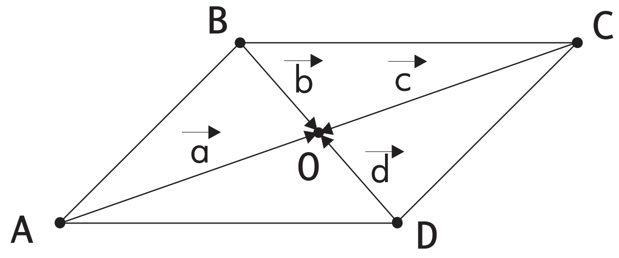

Рис. 2:

Поскольку $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$, то получим $\overrightarrow{AB} = \vec{a} - \vec{b}$. Теперь, используя замеченное выше, можно получить еще три разложения для вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = -\vec{c} - \vec{b} = -\vec{c} + \vec{d} = \vec{a} + \vec{d}.$$

Аналогично получим разложения для остальных векторов:

$$\overrightarrow{BC} = \vec{b} - \vec{c} = -\vec{d} - \vec{c} = -\vec{d} + \vec{a} = \vec{b} + \vec{a}.$$

$$\overrightarrow{CD} = \vec{c} - \vec{d} = -\vec{a} - \vec{d} = -\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{b}.$$

$$\overrightarrow{DA} = \vec{d} - \vec{a} = -\vec{b} - \vec{a} = -\vec{b} + \vec{c} = \vec{d} + \vec{c}.$$

Задача 2. Дан тетраэдр $ABCD$. Найдите суммы векторов:

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$;

2) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC}$;

3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$;

4) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DB}$.

Задача 3. Найдите разложение вектора $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

1) $\vec{a}(4, -2); \vec{b}(3, 5); \vec{c}(1, -7)$;

2) $\vec{a}(5, 4); \vec{b}(-3, 0); \vec{c}(19, 8)$;

3) $\vec{a}(-6,2); \vec{b}(4,7); \vec{c}(9,-3)$;

4) $\vec{a}(-4,5); \vec{b}(5,-7); \vec{c}(-4,5)$;

5) $\vec{a}(-11,9); \vec{b}(7,3); \vec{c}(6,-2)$.

Решение. 5).

$$\vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}; \quad (-11,9) = \alpha(7,3) + \beta(6,-2).$$

Приравняв соответствующие координаты, получим:

$$\begin{cases} -11 = 7\alpha + 6\beta; \\ \;\;9 = 3\alpha - 2\beta. \end{cases}$$

Умножив второе уравнение на 3 и сложив оба уравнения, получим:

$$-11 + 27 = 7\alpha + 9\alpha + 6\beta - 6\beta;$$

$$16 = 16\alpha; \quad \alpha = 1.$$

Из второго уравнения получим:

$$2\beta = 3\alpha - 9; \quad 2\beta = -6; \quad \beta = -3.$$

Ответ: $\vec{a} = \vec{b} - 3\vec{c}$.

Задача 4. Вектор $\vec{a}$ образует с вектором $\vec{i}$ угол α. Вычислите прямоугольные координаты вектора $\vec{a}$ на плоскости:

1) $\alpha = -90^\circ;\ |\vec{a}| = \dfrac{1}{2}$;

2) $\alpha = 45^\circ;\ |\vec{a}| = 1$;

3) $\alpha = 60^\circ;\ |\vec{a}| = 2$;

4) $\alpha = -120^\circ;\ |\vec{a}| = 5$;

5) $\alpha = -30^\circ;\ |\vec{a}| = 4$.

Решение. 1). Если β — угол между вектором $\vec{a}$ и вектором $\vec{j}$, то $\beta = 0^\circ$. Координаты вектора это его проекции на координатные оси. Следовательно,

$$x = Pr_{OX}\vec{a} = |\vec{a}|\cos(-90^\circ) = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0;$$

$$y = Pr_{OY}\vec{a} = |\vec{a}|\cos 0^\circ = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $(0, \dfrac{1}{2})$.

Задача 5. Найдите прямоугольные координаты вектора $\vec{a}$, если известны углы $\alpha = (\widehat{\vec{a}, \vec{i}}),\ \beta = (\widehat{\vec{a}, \vec{j}}),\ \gamma = (\widehat{\vec{a}, \vec{k}})$ и $|\vec{a}|$:

1) $\alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 60^\circ, |\vec{a}| = 4$;

2) $\alpha = 135^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 60^\circ, |\vec{a}| = 8$;

3) $\alpha = 120^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 120^\circ, |\vec{a}| = 2$;

4) $\alpha = 120^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 45^\circ, |\vec{a}| = 6$.

1.2 Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — это число, которое обозначается $\vec{a}\vec{b}$ и вычисляется по формуле: $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$.

Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

1) $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$;
2) $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$;
3) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a}\vec{b})$;
4) $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$.
5) $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$
6) $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|Pr_{\vec{a}}\vec{b}$.
7) для того, чтобы ненулевые векторы были перпендикулярны (ортогональны), необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение было равно нулю.

Пусть векторы $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ заданы своими прямоугольными координатами, тогда их скалярное произведение находится по формуле

$$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$$

модуль вектора, заданного прямоугольными координатами —

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, что выполняются следующие условия:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$;
2) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;
3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют правую тройку.

Обозначается векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ через $\vec{a} \times \vec{b}$.

Векторное произведение обладает следующими свойствами:

1) модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на представителях этих векторов;
2) для того, чтобы ненулевые векторы были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение было равно нулю;

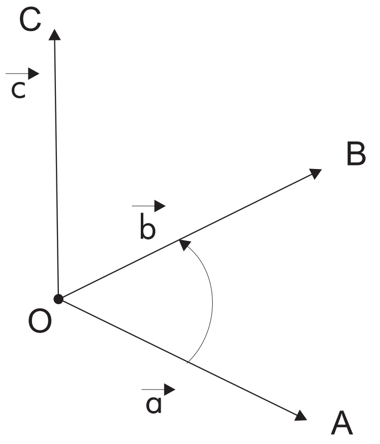

Рис. 3:

3) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ (антикоммутативность);
4) $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$ (линейность);
5) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ (дистрибутивность).

Пусть векторы $\vec{a}(x_1,y_1,z_1)$ и $\vec{b}(x_2,y_2,z_2)$ заданы своими прямоугольными координатами, тогда их векторное произведение находится по формуле

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=(y_1z_2-y_2z_1)\vec{i}+(x_2z_1-x_1z_2)\vec{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\vec{k}.$$

Смешанным произведением трёх ненулевых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется скалярное произведение векторного произведения первых двух векторов на третий вектор. Обозначается смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Смешанное произведение обладает следующими свойствами:
1) модуль смешанного произведения равен объёму параллелепипеда, построенного на представителях векторов-сомножителей;
2) если смешанное произведение положительно, то векторы образуют правую тройку, если смешанное произведение отрицательно, то тройка левая;
3) для того, чтобы три вектора были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение было равно нулю;
4) $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})$;
5) $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}=-\vec{a}\vec{c}\vec{b}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c}=-\vec{c}\vec{b}\vec{a}$;
6) $(\vec{a_1}+\vec{a_2})\vec{b}\vec{c}=\vec{a_1}\vec{b}\vec{c}+\vec{a_2}\vec{b}\vec{c}$;

Пусть векторы $\vec{a}(x_1, x_2, x_3)$, $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ и $\vec{c}(x_3, y_3, z_3)$ заданы своими прямоугольными координатами, тогда их смешанное произведение находится по формуле

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1y_2z_3 + x_3y_1z_2 + x_2y_3z_1 - x_3y_2z_1 - x_2y_1z_3 - x_1y_3z_2.$$

Всюду далее если векторы заданы в координатной форме, то речь идет о прямоугольном базисе, состоящем из единичных векторов.

Если $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, то это означает, что вектор $\vec{a}$ имеет координаты (x, y, z).

Задача 6. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

$1)|\vec{a}| = 8, |\vec{b}| = 5, (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60°;$

$2)|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 135°;$

$3)|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 1, \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b};$

$4)|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 1, \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}.$

Задача 7. Вычислите скалярное произведение векторов:

1) $\vec{a}(1, 2, 4)$; $\vec{b}(3, -4, 5)$;

2) $\vec{a}(1, 3, -5)$; $\vec{b}(5, 0, 1)$;

3) $\vec{a}(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$; $\vec{b}(0,2,\ 0,15,\ 0,1)$;

4) $\vec{a}(1, 2\sin 15°, \cos 15°)$; $\vec{b}(0, \sin 15°, 2\cos 15°)$;

5) $\vec{a}(\cos 30°, 2, \sin 30°)$; $\vec{b}(\cos 30°, -1, 3\sin 30°)$.

Решение. 4). $\vec{a}\vec{b} = 1 \cdot 0 + 2\sin 15° \sin 15° + 2\cos 15° \cos 15° = 2(\sin^2 15° + \cos^2 15°) = 2.$

Ответ: 2.

Задача 8. Найдите углы между векторами:

1) $\vec{a}(3,3,4)$, $\vec{b}(3,0,2)$;

2) $\vec{a}(1,-1,-1), \vec{b}(2,0,2)$;

3) $\vec{p}(2,\cos 10^\circ, -\sin 10^\circ)$, $\vec{q}(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \sin 10^\circ, \cos 10^\circ)$;

4) $\vec{p}(\cos 3^\circ, \sin 3^\circ, 0)$, $\vec{q}(1,0,0)$.

Задача 9. Найдите $\vec{a} \times \vec{b}$, если:

1) $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$;

2) $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = 7\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$;

3) $\vec{a}(0,1,2)$; $\vec{b}(2,0,3)$;

4) $\vec{a}(8,6,4)$; $\vec{b}(1,2,-2)$.

Задача 10. Вычислите смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и укажите какой тройкой (правой или левой) является тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

1) $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = 8\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k}$;

2) $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$;

3) $\vec{a}(13,12,11)$, $\vec{b}(24,23,22)$, $\vec{c}(35,34,33)$;

4) $\vec{a}(1,3,5)$, $\vec{b}(2,4,6)$, $\vec{c}(8,9,7)$.

1.3 Множество точек. Системы координат

Если по геометрическим свойствам плоской линии l удается найти в некоторой ПДСК-2 такое уравнение

$$F(x, y) = 0, \tag{$*$}$$

что координаты любой точки линии l в этой ПДСК-2 определяют некоторое решение уравнения (*) и, с другой стороны, всякое решение этого уравнения определяет некоторую точку данной линии, то говорят, что (*) — *уравнение линии* l.

Если по геометрическим свойствам поверхности s удается найти в некоторой ПДСК-3 такое уравнение

$$F(x, y, z) = 0, \tag{$**$}$$

что координаты любой точки поверхности s в этой ПДСК-3 определяют некоторое решение уравнения (**) и, с другой стороны, всякое решение этого уравнения определяет некоторую точку данной поверхности, то говорят, что (**) — *уравнение поверхности* s.

Пусть $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ — две различные точки, данные в некоторой ПДСК-3. Тогда $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$. Поскольку расстояние между точками A и B равно модулю связанного вектора $\overrightarrow{AB}$, то получим *формулу расстояния между точками:*

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Пусть нужно найти такую точку C, которая лежит на отрезке AB и делит его в заданном соотношении λ. Пусть $C(x, y, z)$. Тогда *формулы деления отрезка в данном соотношении* имеют вид

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda};\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda};\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Если точка C — середина отрезка AB, то $\lambda = 1$ и тогда получаем *формулы середины отрезка:*

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; y = \frac{y_1 + y_2}{2}; z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Если точки A и B даны в некоторой ПДСК-2, т. е. $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, то в формулах деления отрезка в данном соотношении и формулах середины отрезка, аппликата не используется.

Формулы перехода от полярных координат к прямоугольным —

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

от прямоугольных координат к полярным —

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Формулы перехода от сферических координат к прямоугольным —

$$x = r\ cos\psi \cos\varphi, \quad y = r\cos\psi\sin\varphi, \quad z = \sin\psi,$$

от прямоугольных координат к сферическим —

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$
$$\sin\psi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos\psi = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$
$$\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Задача 11. Найдите координаты концов отрезка, который точками $C(7, 0, 3)$ и $D(-5, 0, 0)$ разделен на три равные части.

Решение: Пусть $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ — концы этого отрезка. Тогда точка C является серединой отрезка AD. Применим формулы середины отрезка:

$$7 = \frac{x_1 - 5}{2}; \quad 0 = \frac{y_1 + 0}{2}; \quad 3 = \frac{z_1 + 0}{2}.$$

Из этих формул в результате вычислений, получим координаты точки: $A(19, 0, 6)$. Аналогично, точка D является серединой отрезка CB. Следовательно,

$$-5 = \frac{7 + x_2}{2}; \quad 0 = \frac{0 + y_2}{2}; \quad 0 = \frac{3 + z_2}{2}.$$

Поэтому $B(-17, 0, -3)$.

Ответ: $A(19, 0, 6)$, $B(-17, 0, -3)$.

Задача 12. Отрезок, ограниченный точками A и B разделен точками C, D, E на четыре равные части. Найдите координаты этих точек.

1) $A(-2, 5, 13)$; $B(6, 17, -7)$;

2) $A(4, 2, 8)$ и $B(8, 18, -4)$.

Задача 13. Дан треугольник с вершинами $A(7, 5, -4)$, $B(4, 9, 1)$ и $C(6, -3, -7)$. Вычислите длину медианы, проведенной из вершины A.

Задача 14. Даны две вершины $A(1, 3, 5)$ и $B(-1, 2, 1)$ параллелограмма $ABCD$ и точка пересечения его диагоналей $E(1, 0, 1)$. Найдите две другие вершины параллелограмма.

Задача 15. Найдите полярные координаты точек, заданных координатами в соответствующей прямоугольной системе координат:

1) $A(0, \frac{1}{2})$, $B(1, 1)$,

2) $C(\sqrt{3}, 1)$, $D(-3, 3)$.

Задача 16. Зная полярные координаты точек, найдите их координаты в соответствующей прямоугольной системе координат:

1) $A(2, \frac{\pi}{3})$, $B(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$,

2) $C(5, \frac{\pi}{2})$, $D(3, \frac{\pi}{6})$.

Задача 17. Найдите сферические координаты точек, заданных прямоугольными координатами:

1) $A(-8, -4, 1)$, $B(-2, -2, -1)$,

2) $C(0, -4, 3)$, $D(1, -1, -1)$.

2 ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

2.1 Прямая на плоскости

Всякий ненулевой вектор, параллельный некоторой прямой называется, *направляющим вектором* этой прямой.

Всякий ненулевой вектор плоскости, перпендикулярный некоторой прямой из этой плоскости, называется *нормальным вектором* этой прямой.

Всякая прямая в некоторой ПДСК-2 определяется уравнением первой степени
$$Ax + By + C = 0,$$
где $A,\ B,\ C$ — некоторые действительные числа, удовлетворяющие условию $A^2 + B^2 \neq 0$.

Всякому уравнению первой степени
$$Ax + By + C = 0,$$
где $A,\ B,\ C$ — некоторые действительные числа, удовлетворяющие условию $A^2 + B^2 \neq 0$ в некоторой ПДСК-2 соответствует некоторая прямая.

Это уравнение первой степени называется общим уравнением прямой на плоскости.

Если в общем уравнении прямой отсутствует коэффициент C, то прямая походит через начало координат. Если в общем уравнении равен нулю коэффициент при переменной x, то прямая параллельна оси OX, если при переменной y, то прямая параллельна оси OY.

Пусть в некоторой ПДСК-2 некоторая прямая задана своим общим уравнением $Ax + By + C = 0$. Все точки плоскости, для которых
$$Ax + By + C > 0,$$
лежат в одной полуплоскости относительно данной прямой, а все точки плоскости для которых
$$Ax + By + C < 0,$$
лежат в другой полуплоскости.

Если прямая не параллельна оси ординат, то она определяется уравнением
$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

где $k = \operatorname{tg}\alpha$ и α — угол между этой прямой и положительным направлением оси OX, а $M(x_0, y_0)$ — некоторая фиксированная точка этой прямой. Это уравнение называется *уравнением прямой по угловому коэффициенту и точке.*

Если $B(0, b)$ — точка пересечения прямой a с осью OY, то прямая определяется уравнением

$$y = kx + b,$$

которое называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом.*

Если прямая параллельна оси Oy, то у нее углового коэффициента не существует. Если прямая параллельна оси Ox, то ее угловой коэффициент равен 1.

Если прямая a проходит через две различные точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, то она определяется уравнением

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

которое называется *уравнением прямой по двум точкам.*

Если $A(a, 0)$ — точка пересечения прямой a с осью OX, а $B(0, b)$ — точка пересечения с осью OY, то прямая определяется уравнением

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

которое называется *уравнением прямой в отрезках по осям.*

Если $\vec{a}(a_1, a_2)$ — направляющий вектор прямой a, а $M_0(x_0, y_0)$ — некоторая её фиксированная точка, то прямая определяется уравнением

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2},$$

которое называется *каноническим уравнением прямой на плоскости.* Используя тот же вектор и ту же точку, прямую можно определить также двумя уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t; \\ y = y_0 + a_2 t, \end{cases}$$

которые называются *параметрическими уравнениями прямой на плоскости.* Число t называется *параметром.*

Пусть α — угол между нормальным вектором прямой a и положительным направлением оси OX, p — расстояние от прямой до начала координат. Тогда прямая определяется уравнением

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0,$$

которое называется *нормальным уравнением прямой.* Для того, чтобы получить из общего уравнения прямой её нормальное уравнение, необходимо это общее уравнение умножить на множитель

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

который называется нормирующим множителем. Знак этого множителя выбирается противоположным знаку C из общего уравнения.

Пусть две прямые — a_1 и a_2 заданы своими общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ соответственно. Тогда

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

— *условие параллельности*,

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

— *условие перпендикулярности.*

Углом φ между прямыми a_1 и a_2 называется наименьший угол поворота на который нужно повернуть прямую a_1 вокруг некоторой её точки так, чтобы прямая a_1 совпала с прямой a_2 или стала ей параллельной. Этот угол считается положительным, если поворот происходит против часовой стрелке и отрицательным в противном случае.

Если k_1 и k_2 — угловые коэффициенты прямых a_1 и a_2, то *формула угла между прямыми* —

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.$$

$$k_1 = k_2$$

—*условие параллельности*,

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}$$

—*условие перпендикулярности.* Если прямая параллельна оси Ox, то ее угловой коэффициент равен 0, если прямая параллельна оси Oy, то у нее углового коэффициента не существует.

Пусть в некоторой ПДСК-2 дана некоторая точка $M(x_1, y_1)$ и задана некоторая прямая a своим общим уравнением $Ax + By + C = 0$. Тогда расстояние от точки M до прямой a находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Пучком прямых называется совокупность всех прямых, проходящих через некоторую точку S, которая называется *центром пучка.*

Для задания пучка достаточно задать его центр или любые две прямые пучка.

Пусть в ПДСК-2 две непараллельные прямые, заданы своими общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Тогда пучок прямых, проходящих через точку пересечения данных прямых задаётся уравнением

$$A_1x + B_1y + C_1 + t(A_2x + B_2y + C_2) = 0,$$

где t — некоторое число.

Условие принадлежности прямой, заданной уравнением $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ пучку прямых, заданному уравнениями двух прямых — $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Если вектор $\vec{n}(x_1, y_1)$ является нормальным вектором прямой, то вектор $\vec{a}(-y_1, x_1)$ является направляющим вектором этой прямой. Направляющим вектором этой прямой будет так же и вектор $\vec{a}(y_1, -x_1)$.

При решении задач на прямую, необходимо сначала определиться какой вид уравнения прямой следует искать. Так же важно освоить приемы перехода от одного вида уравнения прямой к другому.

Задача 18. Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через:

1) точку $M_0(1, 2)$ параллельно вектору $\vec{a}(3, -1)$;

2) начало координат параллельно вектору $\vec{b}(3, 4)$;

3) точку $A(1, 7)$ параллельно оси OY;

Решение. 1). Поскольку M_0 — фиксированная точка, то для параметрических уравнений прямой получаем: $x_0 = 1,\ y_0 = 2$. Поскольку вектор $\vec{a}$ параллелен прямой, то его можно выбрать в качестве направляющего. Следовательно, $a_1 = 3,\ a_2 = -1$. Теперь осталось подставить найденные коэффициенты в параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x = 1 + 3t; \\ y = 2 - 1t. \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = 1 + 3t; \\ y = 2 - 1t. \end{cases}$$

Задача 19. Прямая задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = 1 - 4t; \\ y = 3 + t. \end{cases}$$

Найдите:

1) направляющий вектор данной прямой;

2) координаты точек для которых $t_1 = 3, \quad t_2 = -1, \quad t_3 = 0, \quad t_4 = 2, \quad t_5 = 10$;

3) значения параметра для точек пересечения прямой с осями координат;

4) среди точек $A(-3, 4);\ B(1, 1);\ C(9, 1);\ D(3, 8)$ точки, принадлежащие данной прямой.

Решение: 1). Координаты направляющего вектора — это коэффициенты при параметре t в параметрических уравнениях, т.е. $\vec{a}(-4, 1)$.

Ответ: $\vec{a}(-4, 1)$.

2). Для того, чтобы найти координаты этих точек, нужно подставить каждое из значений параметра t в оба параметрические уравнения. Тогда первое уравнение даст первую координату, второе — вторую. Таким образом, получаем, например, точку $A(1 - 4t_1, 3 + t_1) = A(1 - 4 \cdot 3, 3 + 3) = A(-11, 6)$. Аналогично, получим: $B(5, 2);\ C(1, 3);\ D(-7, 5);\ K(-39, 13)$.

Ответ: $A(-11, 6);\ B(5, 2);\ C(1, 3);\ D(-7, 5);\ K(-39, 13)$.

3). Если $A(x_1, y_1)$ — точка пересечения данной прямой с осью OX, то $y_1 = 0$, следовательно, подставив во второе параметрическое уравнени, получим: $0 = 3 + t$. Значит, для точки A, $t = -3$. Аналогично, для того, чтобы найти значение параметра для точки пересечения с координатной осью OY, воспользуемся первым параметрическим уравнением: $0 = 1-4t$ или $t = \dfrac{1}{4}$.

Ответ: $-3,\ \dfrac{1}{4}$.

4). Для того, чтобы выяснить, принадлежит ли точка A данной прямой, подставим ее координаты в параметрические уравнения:

$$\begin{cases} -3 = 1 - 4t; \\ 4 = 3 + t. \end{cases}$$

Тогда из первого уравнения получим $t = 1$, из второго, $t = 1$. Поскольку полученные значения для параметра совпадают, то точка A принадлежит данной прямой. Подставив координаты точки B в параметрические уравнения, получим:

$$\begin{cases} 1 = 1 - 4t; \\ 1 = 3 + t. \end{cases}$$

Тогда из первого уравнения $t = 0$, а из второго $t = -2$. Следовательно, нельзя указать такое значение параметра, чтобы оба уравнения обращались в верное равенство. Поэтому точка B не принадлежит данной прямой. Аналогично рассуждая, получим, что точка C принадлежит прямой, а точка D не принадлежит.

Ответ: A и C.

Задача 20. Напишите уравнение прямой:

1) имеющей угловой коэффициент $k = -5$ и проходящей через точку $A(1, -2)$;

2) имеющей угловой коэффициент $k = 8$ и отсекающей на оси OY отрезок длины два;

3) проходящей через две точки $A(1, 5)$ и $B(2, 3)$;

4) проходящей через точку $A(-2, 3)$ и составляющей с осью OX угол 60°;

5) проходящей через точку $B(1, 7)$ ортогонально вектору $\vec{n}(4, 3)$.

6) проходящей через точки $A(3, 4)$ и $B(-2, 1)$.

Решение. 4). Поскольку угловой коэффициент прямой — это тангенс угла наклона, то $k = tg 60^\circ = \sqrt{3}$. Следовательно, остается воспользоваться уравнением прямой по угловому коэффициенту и точке, т.е.

уравнением $y - y_0 = k(x - x_0)$, подставив в него найденное значение углового коэффициента и координаты данной точки: $y - 3 = \sqrt{3}(x + 2)$.

Ответ: $y - 3 = \sqrt{3}(x + 2)$.

5). Поскольку вектор $\vec{n}$ ортогонален прямой, то его можно выбрать в качестве нормального вектора этой прямой. Следовательно, общее уравнение прямой имеет вид $4x + 3y + D = 0$. Для того, чтобы найти коэффициент D, нужно подставить в это уравнение координаты точки B :

$$4 \cdot 1 + 3 \cdot 7 + D = 0;$$

$$25 + D = 0.$$

Отсюда $D = -25$ и тогда уравнение прямой имеет вид

$$4x + 3y - 25 = 0.$$

Ответ: $4x + 3y - 25 = 0$.

Задача 21. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2, 5)$ и отсекающей на координатных осях отрезки равной длины.

Решение: Будем искать уравнение прямой в отрезках по осям. Пусть это уравнение имеет вид:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Подставим в него координаты точки A :

$$\frac{-2}{a} + \frac{5}{b} = 1.$$

Поскольку на осях отсекаются одинаковые по длине отрезки, то $|a| = |b|$. Следовательно, полученное уравнение будет равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{-2}{a} + \dfrac{5}{b} = 1; \\ a = b; \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{-2}{a} + \dfrac{5}{b} = 1; \\ a = -b, \end{cases} \end{array}\right.$$

из которой получим совокупность

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{-2}{a} + \dfrac{5}{a} = 1; \\ \dfrac{-2}{a} + \dfrac{5}{-a} = 1. \end{array}\right.$$

Из первого уравнения совокупности получим: $a_1 = 3$ и тогда $b_1 = 3$. Из второго уравнения получим: $a_2 = -7$ и тогда $b_2 = 7$. Следовательно, через точку A, отсекая на координатных осях отрезки равной длины, проходит прямая

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1,$$

общее уравнение которой $x + y - 3 = 0$ и прямая

$$\frac{x}{-7} + \frac{y}{7} = 1,$$

общее уравнение которой $x - y + 7 = 0$.

Ответ: $x + y - 3 = 0$ и $x - y + 7 = 0$.

Задача 22. Вычислите площадь треугольника, заключенного между координатными осями и прямой $2x - 3y - 12 = 0$.

Задача 23. Установить, какие из следующих пар прямых совпадают, параллельны, пересекаются. В случае пересечения, найти общую точку.

1) $2x + 3y = 0$ и $\begin{cases} x = 3 + t, \\ y = 2 - t; \end{cases}$

2) $x + 2y - 15 = 0$ и $\begin{cases} x = 5 + 4t, \\ y = -2 - 2t; \end{cases}$

3) $3x + 4y - 20 = 0$ и $\begin{cases} x = 4 - 8t, \\ y = 2 + 6t; \end{cases}$

4) $x - 2y + 4 = 0$ и $-3x + 6y - 12 = 0$;

5) $\begin{cases} x = -2 + 2t, \\ y = -9 + 5t \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 9 - 5t', \\ y = 4 + 2t'. \end{cases}$

Указание. Для решения этих задач в каждом конкретном случае нужно искать координаты общей точки, которые будут решением как уравнения первой прямой, так и уравнения второй.

Если обе прямые заданы общими уравнениями, то нужно объединить их в систему и искать для этой системы решение. Если одна прямая задана параметрическими уравнениями,а вторая — общим, то достаточно подставить x и y из параметрических уравнений в общее уравнение. Если обе прямые заданы параметрическими уравнениями, то приравняв x и y из уравнений первой прямой соответственно к x и y из уравнений второй, мы получим систему относительно двух неизвестных — параметра первой прямой и параметра второй.

В любом случае, если решение единственно, то прямые пересекаются и найденное решение определяет координаты точки пересечения. Если решений бесконечное множество, то прямые совпадают. Если же решений нет, то прямые параллельны.

Решение. 5).

$$\begin{cases} -2 + 2t = 9 - 5t'; \\ -9 + 5t = 4 + 2t'. \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем:

$$t = \frac{11 - 5t'}{2},$$

а из второго:

$$t = \frac{13 + 2t'}{5}.$$

Поскольку левые части полученных соотношений равны, то равны и правые. Поэтому получаем:

$$\frac{11 - 5t'}{2} = \frac{13 + 2t'}{5}.$$

Отсюда, по свойствам пропорций, получаем: $55 - 25t' = 26 + 4t'$, откуда $t' = 1$. Получено единственное решение. Следовательно, прямые пересекаются. Для того, чтобы найти точку пересечения, нужно подставить полученное значение параметра t' в параметрические уравнения второй прямой:

$$x = 9 - 5 = 4, \quad y = 4 + 2 = 6.$$

Если по составленной выше системе найти значение параметра для первой прямой, то по параметрическим уравнениям этой прямой будет найдена точка с такими же координатами. (Можно проделать эти действия в качестве самопроверки).

Ответ: прямые пересекаются в точке $A(4, 6)$.

Задача 24. Найти угловой коэффициент прямой:

1) $\begin{cases} x = 3 + t, \\ y = 2 - t; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 3t, \\ y = -2t; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = 3, \\ y = 1 + t; \end{cases}$

4) $3x + 4y + 5 = 0;$

5) $2x - 5y - 35 = 0;$

6) $-\dfrac{x}{-2} + \dfrac{y}{1} = 1;$

Указание. Для нахождения углового коэффициента необходимо сначала получить общее уравнение прямой. Затем нужно в этом уравнении выразить явно y. Тогда коэффициент при x и будет угловым коэффициентом.

Решение. 3). Поскольку в одном из уравнений отсутствует параметр, то данная прямая параллельна одной из координатных осей. В данном случае, для всех точек прямой $x = 3$. Следовательно, прямая параллельна оси Oy и поэтому угловой коэффициент у нее не существует.

Ответ: угловой коэффициент не существует.

6). Перенесем все в левую часть и приведем к общему знаменателю:

$$\frac{x - 2y + 2}{-2} = 0;$$

$$x - 2y + 2 = 0.$$

Отсюда выражаем явно $y : y = \dfrac{1}{2}x + 1$. Следовательно, угловой коэффициент данной прямой равен $\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

2.2 Плоскость в пространстве

Всякий ненулевой вектор, перпендикулярный некоторой плоскости, называется *нормальным вектором* этой плоскости.

Любые два неколлинеарные вектора, параллельные некоторой плоскости, называются *направляющими векторами* этой плоскости.

Всякая плоскость в некоторой ПДСК-3 определяется уравнением первой степени

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где A, B, C, D — некоторые действительные числа, удовлетворяющие условию $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Всякому уравнению первой степени

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где A, B, C, D — некоторые действительные числа, удовлетворяющие условию $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ в некоторой ПДСК-3 соответствует некоторая плоскость.

Это уравнение называется *общим уравнением плоскости.*

В общем уравнении плоскости геометрический смысл знака выражения $Ax + By + Cz + D$ такой же как и геометрический смысл знака трёхчлена $Ax + By + C$ в уравнении прямой.

Пусть в некоторой ПДСК-3 некоторая плоскость задана своим общим уравнением $Ax+By+Cz+D = 0$. Все точки пространства, для которых $Ax + By + Cz + D > 0$ лежат в одном полупространстве относительно данной плоскости, а все точки пространства для которых $Ax+By+Cz+ + D < 0$ лежат в другом полупространстве.

Если $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ — три различные точки, не лежащие на одной прямой, то плоскость α, проходящая через эти точки, определяется уравнением

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

которое называется *уравнением плоскости по трём точкам.*

Если плоскость α проходит через точки $A(a, 0, 0)$; $B(0, b, 0)$; $C(0, 0, c)$, то эта плоскость определяется уравнением

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

которое называется *уравнением плоскости в отрезках по осям.*

Пусть α, β, γ — направляющие косинусы нормального вектора плоскости α, p — расстояние от плоскости до начала координат. Тогда плоскость определяется уравнением

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0,$$

которое называется *нормальным уравнением плоскости.* Для того, чтобы получить из общего уравнения плоскости её нормальное уравнение, необходимо это общее уравнение умножить на множитель

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

который называется *нормирующим множителем.* Знак этого множителя выбирается противоположным знаку D из общего уравнения.

Пусть $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ — направляющие векторы некоторой плоскости α и пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — некоторая фиксированная точка этой плоскости. Тогда плоскость определяется уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1t + b_1k; \\ y = y_0 + a_2t + b_2k; \\ z = z_0 + a_3t + b_3k, \end{cases}$$

которые называются *параметрическими уравнениями плоскости.* Числа t и k — параметры.

Пусть плоскости α_1 и α_2 заданы своими общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ соответственно. Тогда

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

— *условие параллельности,*

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

— *условие перпендикулярности.*

Углом φ между плоскостями α_1 и α_2 называется угол между их нормальными векторами.

Угол между плоскостями таким образом вычисляется по формуле угла между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Пусть дана некоторая точка $M(x_1, y_1, z_1)$ и задана некоторая плоскость α своим общим уравнением $Ax+By+Cz+D = 0$. Тогда расстояние от точки M до плоскости α находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Пучком плоскостей называется совокупность всех плоскостей, проходящих через некоторую прямую a.

Для задания пучка достаточно задать любые две плоскости пучка.

Пусть две непараллельные плоскости заданы своими общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Тогда пучок плоскостей, проходящих через линию пересечения данных плоскостей задаётся уравнением

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + t(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$$

При решении задач на плоскость, необходимо сначала определиться какой вид уравнения плоскости следует искать. Так же важно освоить приемы перехода от одного вида уравнения плоскости к другому.

Задача 25. Составьте параметрические уравнения плоскости, которая проходит через:

1) точку $M_0(1, 0, 2)$ параллельно векторам $\vec{a}_1(1, 2, 3)$ и $\vec{a}_2(0, 3, 1)$;

2) точку $A(1, 2, 1)$ параллельно векторам $\vec{i},\ \vec{j}$;

3) точку $A(1, 7, 1)$ параллельно плоскости OXZ;

4) точки $M_1(5, 3, 2),\ M_2(1, 0, 1)$ параллельно вектору $\vec{a}(1, 3, -3)$;

5) точку $A(1, 5, 7)$ и ось OX;

6) начало координат и точки $M_1(1, 0, 1),\ M_2(-2, -3, 1)$;

Решение. 1). Поскольку плоскость проходит параллельно данным векторам, то эти векторы можно выбрать в качестве направляющих. Следовательно, параметрические уравнения плоскости будут иметь вид:

$$\begin{cases} x = 1 + u; \\ y = 2u + 3v; \\ z = 2 + 3u + v. \end{cases}$$

6). Данная плоскость будет параллельна векторам $\overrightarrow{OM_1}(1, 0, 1)$ и $\overrightarrow{OM_2}(-2, -3, 1)$. Следовательно, эти векторы можно выбрать в качестве направляющих векторов плоскости. В качестве же фиксированной точки плоскости лучше всего взять конечно начало координат. Следовательно, параметрические уравнения плоскости будут иметь вид:

$$\begin{cases} x = u - 2v; \\ y = -3v; \\ z = u + v. \end{cases}$$

Задача 26. Составить общее уравнение плоскости, которая проходит через:

1) точку $M_0(1, 1, 1)$ параллельно векторам $\vec{a}_1(1, 2, 0),\ \vec{a}_2(0, 1, 3)$;

2) точку $M_0(31, 0, 1)$ и ось OX;

3) точку $C(1, 2, 2)$ параллельно плоскости OXZ;

4) начало координат и точки $M_1(1, 0, 2),\ M_2(0, 0, 3)$;

5) точки $M_1(1, 0, 1),\ M_2(0, 2, 3),\ M_3(0, 2, 1)$.

Решение. 1). Нормальным вектором плоскости будет вектор, который перпендикулярен направляющим векторам. Следовательно, в качестве нормального вектора плоскости можно взять векторное произведение его направляющих векторов:

$$\vec{n} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 3\vec{j} + 1\vec{k}.$$

Следовательно, общее уравнение данной плоскости будет иметь вид:

$$6x - 3y + z + D = 0.$$

Отсюда, подставив координаты точки M_0, получим: $D = -6x + 3y - z = -4$. Следовательно, общее уравнение плоскости имеет вид: $6x - 3y + z - 4 = 0$.

Ответ: $6x - 3y + z - 4 = 0$.

Задача 27. Найти величины отрезков, которые отсекает на координатных осях плоскость:

1) $2x + 3y - 9z + 18 = 0$;

2) $x - 2y + 5z - 20 = 0$;

3) $\begin{cases} x = 1 + u + v, \\ y = 2 + u, \\ z = 3 + u - v; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = 3 + 2u, \\ y = 2 - 2u + 4v, \\ z = 1 + u + 3v. \end{cases}$

Указание. Для решения этой задачи нужно получить уравнение плоскости в отрезках по осям. Тогда модули знаменателей и будут равны длинам этих отрезков.

Задача 28. Установить, какие из следующих пар плоскостей пересекаются, параллельны, совпадают:

1) $x - y + 3z + 1 = 0$ и $2x - y + 5z - 2 = 0$;

2) $2x + y + 2z + 4 = 0$ и $4x + 2y + 4z + 8 = 0$;

3) $3x + 2y - z + 2 = 0$ и $6x + 4y - 2z + 1 = 0$;

4) $\begin{cases} x = 1 + u + v, \\ y = 2 + u, \\ z = 3 + u - v \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 3 + 2u', \\ y = 2 - 2u' + 4v', \\ z = 1 + u' + 3v'; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = u + 2v, \\ y = 1 + v, \\ z = u - v \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 2 + 3u' + v', \\ y = 1 + u' + v', \\ z = 2 - 2v'; \end{cases}$

Решение. 1). Выпишем нормальные векторы плоскостей: $\vec{n}_1(1, -1, 3)$ и $\vec{n}_2(2, -1, 5)$. Поскольку векторы неколлинеарны, то плоскости пересекаются.

Ответ: плоскости пересекаются.

2.3 Прямая и плоскость в пространстве

В пространстве мы будем рассматривать прямую как линию пересечения двух плоскостей.

Пусть даны две различные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Прямая, проходящая через эти точки, задаётся уравнениями

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

которые называются *уравнениями прямой по двум точкам в пространстве.*

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — некоторая фиксированная точка прямой a, а $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ — её направляющий вектор. Тогда прямая a может быть задана уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t, \end{cases}$$

которые называются *параметрическими уравнениями прямой в пространстве* и уравнениями

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3},$$

которые называются *каноническими уравнениями прямой в пространстве.*

Если некоторая прямая a является линией пересечения двух плоскостей α_1 и α_2, заданных соответственно своими общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, то она может быть задана системой уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Иногда эти уравнения называют *общими уравнениями прямой в пространстве.*

Допустим, что некоторая прямая a задана как линия пресечения двух плоскостей, т.е. системой

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Пусть (x_0, y_0, z_0) — одно из решений этой системы Тогда точка $M(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит указанной прямой. В качестве же направляющего вектора прямой a можно взять векторное произведение нормальных векторов $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$. Тогда канонические уравнения прямой a можно записать в виде:

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Пусть две прямые — a_1 и a_2 имеют направляющие векторы соответственно $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$. Тогда угол между прямыми равен углу между их направляющими векторами:

$$\cos\alpha = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

— *условие параллельности;*

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0.$$

— *условие перпендикулярности.*

Пусть $\vec{n}(A, B, C)$ — нормальный вектор некоторой плоскости, а вектор $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ — направляющий вектор некоторой прямой. Если эти плоскость и прямая параллельны, то указанные векторы перпендикулярны, т.е. условие параллельности прямой и плоскости в пространстве:

$$Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0;$$

если же плоскость и прямая перпендикулярны, то указанные векторы коллинеарны, т.е. условие перпендикулярности прямой и плоскости в пространстве:

$$\frac{A}{a_1} = \frac{B}{a_2} = \frac{C}{a_3}.$$

Если β — угол между нормальным вектором плоскости и направляющим вектором прямой, то $\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \beta$ — угол между прямой и плоскостью. Следовательно, угол между прямой и плоскостью вычисляется по формуле:

$$\sin\varphi = \frac{Aa_1 + Ba_2 + Ca_3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

Пусть некоторая прямая a задана своими каноническими уравнениями: $\dfrac{x-x_0}{a_1}=\dfrac{y-y_0}{a_2}=\dfrac{z-z_0}{a_3}$ и пусть дана некоторая точка $M(x_1,y_1,z_1)$. Тогда расстояние от точки M до прямой a находится по формуле:

$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_1-z_0 & x_1-x_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}.$$

Пусть кроме заданной выше прямой a, ещё одна прямая b задана своими каноническими уравнениями: $\dfrac{x-x_1}{b_1}=\dfrac{y-y_1}{b_2}=\dfrac{z-z_1}{b_3}$. Тогда расстояние между этими прямыми находится по формуле:

$$d=\frac{mod\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}}.$$

Задача 29. Дана прямая

$$\begin{cases} x=2+t; \\ y=1+3t; \\ z=5+2t. \end{cases}$$

Какие из точек ей принадлежат:

1) $M_1(3,4,7),\ M_2(2,0,4)$;

2) $M_3(0,-5,1),\ M_4(-1,3,-2)$.

Задача 30. Доказать, что прямые параллельны и найти расстояние между ними:

1) $\begin{cases} x = 1 - 2t; \\ y = 3t; \\ z = -2 + t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 7 + 4t'; \\ y = 5 - 6t'; \\ z = 4 - 2t'. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 2t; \\ y = 0; \\ z = -2t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y + z - 3 = 0; \\ x - y + z - 1 = 0. \end{cases}$

Указание. Для решения этой задачи необходимо выполнить следующие действия. Вначале нужно установить, что направляющие векторы коллинеарны. Затем нужно взять некоторую точку принадлежащую одной прямой и показать, что она не принадлежит второй прямой. Таким образом мы покажем, что прямые не имеют общих точек, т.е. параллельны. Наконец, нужно найти между прямыми расстояние, воспользовавшись соответствующей формулой.

Задача 31. Доказать, что прямые совпадают:

1) $\begin{cases} x = 8 + 3t; \\ y = 7 - 2t; \\ z = 11 + t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 5 - 6t'; \\ y = 9 + 4t'; \\ z = 10 - 2t'. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x + y - 2z - 6 = 0; \\ 41x - 19y + 52z - 68 = 0. \end{cases}$ и $\begin{cases} x - 2y + 5z - 1 = 0; \\ 33x + 4y - 5z - 63 = 0. \end{cases}$

Указание. Так же как и в предыдущей задаче нужно сначала показать, что направляющие векторы прямых коллинеарны. Но затем, взяв точку на одной из прямых, нужно показать, что она принадлежит второй прямой. Таким образом будет доказано совпадение прямых.

Задача 32. Доказать, что прямые пересекаются и найти координаты точек пересечения:

1) $\begin{cases} x = -3t; \\ y = 2 + 3t; \\ z = 1. \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 1 + 5t'; \\ y = 1 + 13t'; \\ z = 1 + 10t'. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = -2 + 3t; \\ y = -1; \\ z = 4 - t. \end{cases}$ и $\begin{cases} 2y - z + 2 = 0; \\ x - 7y + 3z - 17 = 0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + z - 1 = 0; \\ 3x + y - z + 13 = 0. \end{cases}$ и $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0; \\ y + 2z - 8 = 0. \end{cases}$

Указание. Для нахождения точки пересечения нужно объединить все уравнения в одну систему и найти для нее решения.

Решение. 2). Для нахождения точки пересечения достаточно подставить x, y, z из параметрических уравнений в уравнения плоскостей:

$$\begin{cases} 2 \cdot (-1) - (4 - t) + 2 = 0; \\ -2 + 3t - 7 \cdot (-1) + 3 \cdot (4 - t) - 17 = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем $t = 4$, а из второго $0 = 0$. Поскольку уравнения не противоречат друг другу, то существует значение параметра, которое определяет точку пересечения. Подставив полученное значение параметра в параметрические уравнения, получим координаты этой точки: $A(10, -1, 0)$.

Ответ: $A(10, -1, 0)$.

Задача 33. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми:

1) $\begin{cases} x = 3 + t; \\ y = 1 - t; \\ z = 2 + 2t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x = -t'; \\ y = 2 + 3t'; \\ z = 3t'. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0; \\ 2x - 3y + z - 4 = 0. \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y + z - 9 = 0; \\ 2x - y - z = 0. \end{cases}$

Указание. Нужно воспользоваться формулой расстояния между скрещивающимися прямыми.

Задача 34. Установить, лежит ли данная прямая в данной плоскости, не имеет с плоскостью общих точек или пересекает плоскость в некоторой точке. В последнем случае найти точку пересечения:

1) $\begin{cases} x = 2 + 4t, \\ y = -1 + t, \\ z = 2 - t \end{cases}$ и $4x + y - z + 13 = 0$;

2) $\begin{cases} x = 2 - 3t, \\ y = -1 + t, \\ z = -2t \end{cases}$ и $x + y - z + 3 = 0$;

3) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z+2}{5}$ и $4x + 3y - z + 3 = 0$;

4) $\begin{cases} 2x - y + 3z + 4 = 0, \\ x - 2y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$ и $4x - 5y - z + 8 = 0$;

5) $\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0, \\ x - 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$ и $x - 2y + z - 1 = 0$;

Указание. Для решения этой задачи, необходимо объединить все уравнения в систему и решить ее.

Решение. 3). Из канонических уравнений прямой получим ее параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t; \\ y = -3 - t; \\ z = -2 + 5t. \end{cases}$$

Теперь подставим выражения для переменных в уравнение плоскости:

$$4 \cdot (1 + 2t) + 3 \cdot (-3 - t) - (-2 + 5t) + 3 = 0.$$

Отсюда получаем равенство $0 = 0$. Это означает, что для любого значения параметра точка прямой, определяемая этим значением, принадлежит данной плоскости. Следовательно, прямая лежит в плоскости.

Ответ: прямая лежит в плоскости.

3 ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

3.1 Окружность. Эллипс

Окружность радиуса r с центром в точке $M(a, b)$ может быть задана уравнением
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Эллипсом называется множество точек плоскости для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек, называемых *фокусами* есть величина постоянная, большая чем расстояние между фокусами.

Эллипс можно рассматривать как результат сжатия окружности к её диаметру.

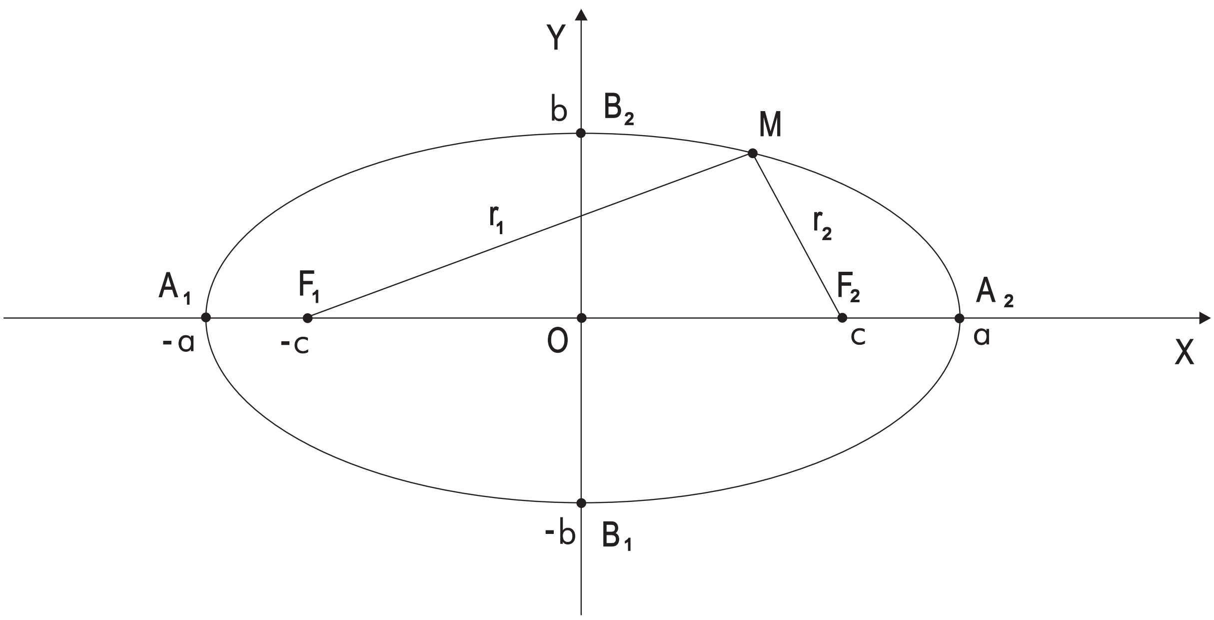

Рис. 4:

Постоянную величину, входящую в определение эллипса, обозначим через $2a$, расстояние между фокусами — через $2c$. Если систему координат выбрать таким образом, чтобы фокусы эллипса располагались на оси абсцисс, а начало координат находилось посередине между фокусами, то фокусы будут иметь координаты $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$. В случае такого выбора системы координат, для эллипса справедливы следующие свойства.

Для того, чтобы точка $M(x, y)$ принадлежала эллипсу, необходимо и достаточно, чтобы её координаты удовлетворяли уравнению
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b^2 = a^2 - c^2$. Это уравнение называется *каноническим уравнением эллипса.*

Координатные оси являются осями симметрии эллипса. Начало координат является центром симметрии эллипса.

Эллипс пересекает координатные оси в точках $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$.

Для любой точки эллипса $M(x, y)$ выполняются соотношения:

$$-a \leqslant x \leqslant a, \quad -b \leqslant y \leqslant b.$$

Для любых точек эллипса, расположенных в первой координатной четверти, с возрастанием их абсциссы, их ордината убывает.

Отрезок A_1A_2 и его длина $2a$ называются *большей осью,* а отрезок OA_2 и его длина a называются *большей полуосью.*

Отрезок B_1B_2 и его длина $2b$ называются *меньшей осью,* а отрезок OB_2 и его длина b называются *меньшей полуосью.*

Отрезок F_1F_2 и его длина $2c$ называются *фокусным расстоянием.*

Точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$ называются *вершинами эллипса.*

Отношение фокусного расстояния эллипса к длине его большей оси называется *эксцентриситетом* эллипса и обозначается через ε:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Фокальными радиусами точки $M(x, y)$ эллипса называются величины $r_1 = F_1M$ и $r_2 = F_2M$.

Фокальные радиусы для эллипса могут быть вычислены через эксцентриситет:

$$r_1 = a + \varepsilon x_1, \quad r_2 = a - \varepsilon x_1.$$

Эллипс может быть задан уравнениями

$$x = a\cos t; \quad y = b\sin t,$$

которые называются *параметрическими уравнениями эллипса.*

Прямые, параллельные оси ординат и имеющие уравнения

$$x = -\frac{a}{\varepsilon} \quad \text{и} \quad x = \frac{a}{\varepsilon},$$

называются *директрисами эллипса.*

Поскольку для эллипса $\varepsilon < 1$, то директрисы эллипса эллипс не пересекают

Отношение расстояния от любой точки эллипса до фокуса к расстоянию от этой точки до соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету.

Задача 35. Какие фигуры задаются уравнениями:

1) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$;

2) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$;

3) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 6 = 0$;

4) $3x^2 + 3y^2 + 6x - 18y - 48 = 0$;

5) $3x^2 + 3y^2 + 6x - 18y + 50 = 0$;

6) $3x^2 + 3y^2 + 6x - 18y + 30 = 0$.

Решение. 5). Выделим полные квадраты относительно обеих переменных:

$$3x^2 + 3y^2 + 6x - 18y + 50 = 0;$$

$$3(x^2 + 2x + 1) + 3(y^2 - 6y + 9) - 3 - 27 + 50 = 0;$$

$$3(x + 1)^2 + 3(y - 3)^2 + 20 = 0.$$

Получаем, что ни одна точка не может удовлетворять этому уравнению.

Ответ: пустое множество.

Задача 36. Составить уравнение эллипса, фокусы которого принадлежат оси ординат и симметричны относительно начала координат, если:

1) полуоси его соответственно равны трем и пяти;

2) расстояние между фокусами равно 6 и большая ось равна 10;

3) большая ось равна 26 и эксцентриситет $\epsilon = \dfrac{12}{13}$.

4) большая ось равна 50 и эксцентриситет $\epsilon = \dfrac{24}{25}$.

Задача 37. Найти полуоси, фокусы, эксцентриситет и уравнения директрис для эллипсов:

1) $25x^2 + 9y^2 = 225$;

2) $9x^2 + 25y^2 = 225$;

3) $36x^2 + 16y^2 = 576$;

4) $16x^2 + 36^2 = 576$.

3.2 Гипербола

Гиперболой называется множество точек плоскости для каждой из которых абсолютная величина разности расстояний до двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, меньшая чем расстояние между фокусами.

Постоянную величину, входящую в определение гиперболы, обозначим через $2a$, расстояние между фокусами — через $2c$. Если систему координат выбрать таким образом, чтобы фокусы гиперболы располагались на оси абсцисс, а начало координат находилось посередине между фокусами, то фокусы будут иметь координаты $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$. В случае такого выбора системы координат, для гиперболы справедливы следующие свойства.

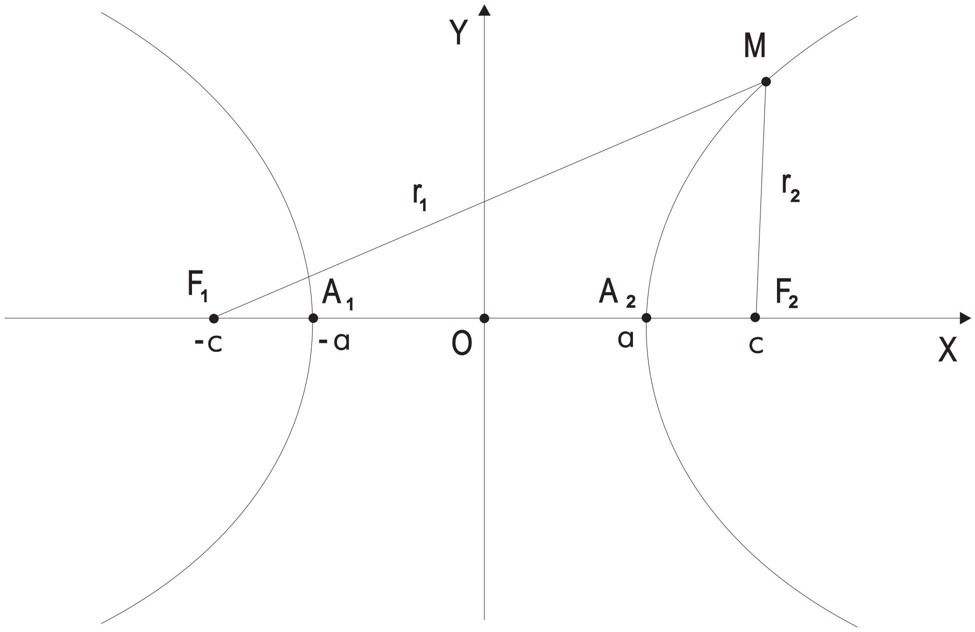

Рис. 5:

Для того, чтобы точка $M(x, y)$ принадлежала гиперболе, необходимо и достаточно, чтобы её координаты удовлетворяли уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b^2 = c^2 - a^2$. Это уравнение называется каноническим уравнением гиперболы.

Координатные оси являются осями симметрии гиперболы. Начало координат является центром симметрии гиперболы.

Гипербола пересекает координатную ось OX в точках $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ и не пересекает ось OY.

Для любой точки гиперболы $M(x, y)$ выполняется: $|x| \geqslant a$.

Для любых точек гиперболы, расположенных в первой координатной четверти, с возрастанием их абсциссы, их ордината возрастает.

Отрезок A_1A_2 и его длина $2a$ называются *действительной осью,* а отрезок OA_2 и его длина a называются *действительной полуосью.*

Отрезок B_1B_2 и его длина $2b$ называются *мнимой осью,* а отрезок OB_2 и его длина b называются *мнимой полуосью.*

Отрезок F_1F_2 и его длина $2c$ называются *фокусным расстоянием.*

Точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ называются *вершинами гиперболы.*

Прямые, проходящие через начало координат и имеющие угловые коэффициенты $\dfrac{b}{a}$ и $-\dfrac{b}{a}$ называются *асимптотами гиперболы.*

Точки гиперболы неограниченно приближаются к асимптотам, но не пересекают их.

Отношение фокусного расстояния гиперболы к длине ее действительной оси называется *эксцентриситетом гиперболы* и обозначается через ε:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Фокальными радиусами точки $M(x, y)$ гиперболы называются величины $r_1 = F_1M$ и $r_2 = F_2M$.

Прямые, параллельные оси ординат и имеющие уравнения

$$x = -\frac{a}{\varepsilon} \quad \text{и} \quad x = \frac{a}{\varepsilon},$$

называются *директрисами гиперболы.*

Поскольку для гиперболы $\varepsilon > 1$, то директрисы гиперболы гиперболу не пересекают

Отношение расстояния от любой точки гиперболы до фокуса к расстоянию от этой точки до соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету.

Гипербола называется *равносторонней (равнобочной),* если ее полуоси равны. Уравнение равносторонней гиперболы имеет вид:

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

У равносторонней гиперболы асимптоты перпендикулярны.

Если фокусы гиперболы лежат на оси абсцисс и гипербола симметрична относительно начала координат, то ее уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

если же фокусы гиперболы лежат на оси ординат и гипербола симметрична относительно начала координат, то ее уравнение имеет вид

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Задача 38. Найти полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения асимптот, уравнения директрис для гиперболы:

1)$\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{144}=1;$
2)$\dfrac{x^2}{225}-\dfrac{y^2}{64}=1;$
3)$\dfrac{x^2}{144}-\dfrac{y^2}{25}=1;$
4)$\dfrac{x^2}{144}-\dfrac{y^2}{225}=1.$

Задача 39. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой принадлежат оси ординат и симметричны относительно начала координат, если расстояние между фокусами равно 12 и эксцентриситет $\varepsilon=\dfrac{6}{5}$.

Задача 40. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой принадлежат оси абсцисс и симметричны относительно начала координат, если расстояние между фокусами равно 12 и эксцентриситет $\varepsilon=\dfrac{6}{5}$.

Задача 41. Для гиперболы $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ найти фокальные радиусы точки:

1)$M(-5,\dfrac{9}{4});$

2)$M(5,\dfrac{9}{4});$

3)$M(-5,-\dfrac{9}{4});$

4)$M(5,-\dfrac{9}{4}).$

Задача 42. Какие фигуры задаются следующими уравнениями и неравенствами:

1) $5x^2 - 9y^2 - 30x + 18y - 9 = 0$;

2) $16x^2 - 25y^2 + 32x - 100y + 84 = 0$;

3) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1; \\ -2 \leqslant y \leqslant 2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} \leqslant 1; \\ -\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \leqslant 1. \end{cases}$

3.3 Парабола. Линии второго порядка в полярных координатах

Параболой называется множество точек плоскости для каждой из которых расстояние до данной точки, называемой *фокусом* равно расстоянию до данной прямой, называемой *директрисой*.

Постоянную величину, входящую в определение параболы обозначим через p. Если систему координат выбрать таким образом, чтобы директриса была параллельна оси ординат, фокус располагался на оси абсцисс и начало координат находилось посередине между фокусом и директрисой, то парабола будет обладать следующими свойствами.

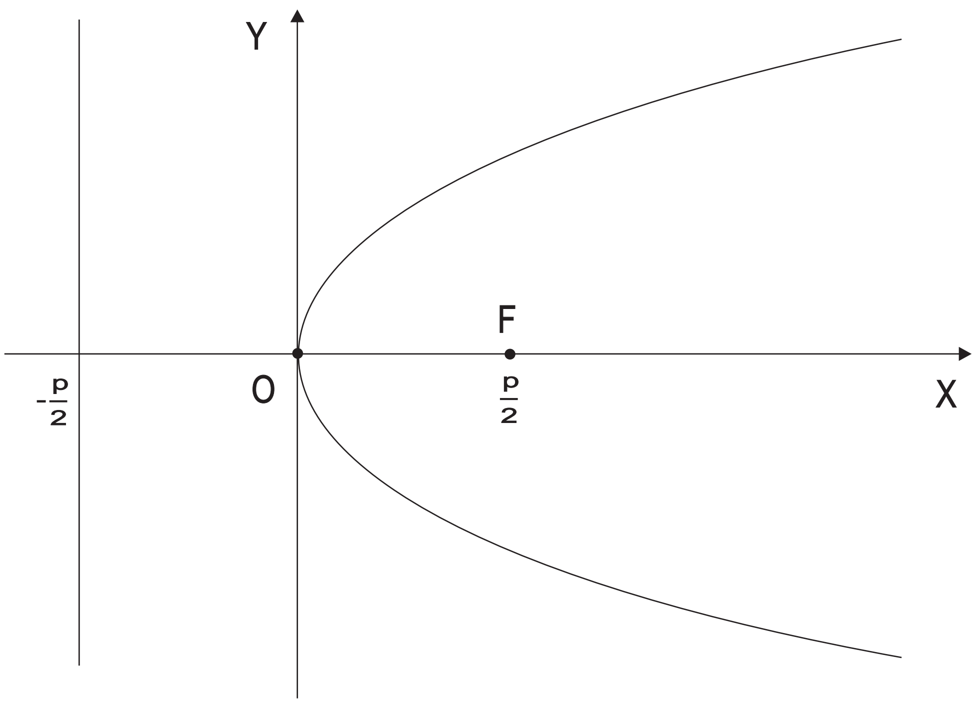

Рис. 6:

Фокус параболы $F(\dfrac{p}{2}, 0)$, а директриса имеет уравнение $x = -\dfrac{p}{2}$.

Для того, чтобы точка M принадлежала параболе, необходимо и достаточно, чтобы её координаты удовлетворяли уравнению

$$y^2 = 2px,$$

где p — некоторое действительное положительное число. Это уравнение называется *каноническим уравнением* параболы.

Абсцисса любой точки параболы неотрицательна.
Парабола проходит через начало координат.
Парабола симметрична относительно оси абсцисс.

При неограниченном возрастании абсциссы параболы, ее ордината возрастает по абсолютной величине.

Отрезок FM называется *фокальным радиусом,* а величина p — *параметром параболы.*

Ось абсцисс называется *осью симметрии параболы,* а точка пересечения параболы с осью абсцисс, которая совпадает с началом координат — *вершиной параболы.*

Эллипс, парабола и правая часть гиперболы могут быть заданы в полярных координатах уравнением

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos\varphi}.$$

Уравнение левой ветви гиперболы имеет вид:

$$\rho = \frac{-p}{1 - \varepsilon \cos\varphi.}$$

Параметр p для параболы равен параметру параболы, для эллипса и гиперболы он находится по формуле $p = \dfrac{b^2}{a}$.

Задача 43. На каком расстоянии от вершины находится фокус параболического рефлектора, если его диаметр 20 см, а глубина равна 10 см.

Решение. Речь идет о зеркале телескопа, которое в поперечном разрезе имеет форму параболы. Выберем систему координат так, чтобы вершина параболы находилась в начале координат, а фокус находился на положительной части оси абсцисс (рис. 7). Уравнение параболы в этой системе координат имеет вид $y^2 = 2px$. Точка B, находящаяся на краю рефлектора в этом случае будет иметь координаты $(10, 10)$. Подставив ее координаты в уравнение параболы, получим, что

$$p = \frac{y^2}{2x} = \frac{100}{20} = 5.$$

Поскольку фокус параболы в выбранной системе координат имеет координаты $(\dfrac{p}{2}, 0)$, то расстояние от фокуса до вершины будет равно $\dfrac{p}{2} = \dfrac{5}{2} =$ $= 2,5$.

Ответ: $2,5$ см.

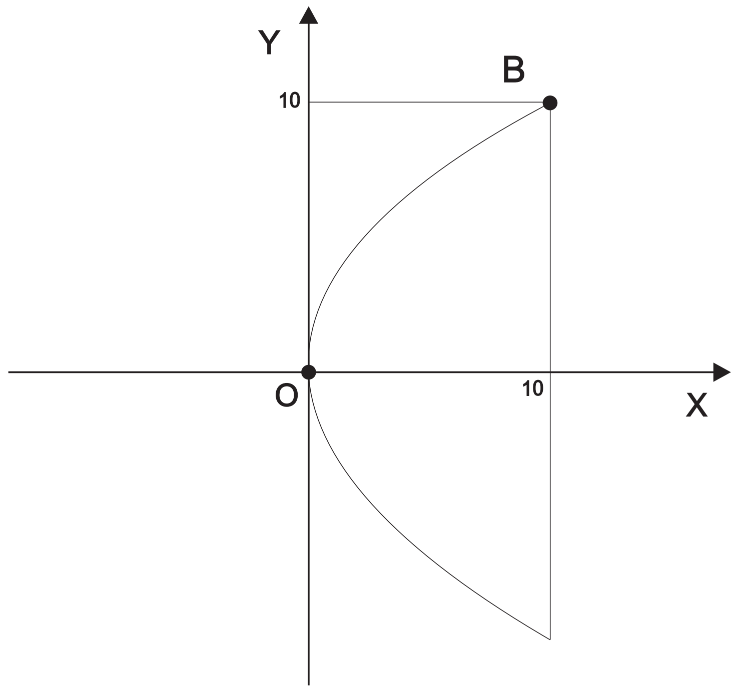

Рис. 7:

Задача 44. Струя воды фонтана, имеющая форму параболы, достигает наибольшей высоты 4 м на расстоянии 0,5 м от вертикали, проходящей через точку O выхода струи. Найти высоту струи над горизонталью Ox на расстоянии 0,75 м от точки O.

Задача 45. Под острым углом к горизонту брошен камень. Двигаясь по параболе, он падает на расстояние 24 м от начального положения. Вычислите параметр параболы, если наибольшая высота, достигнутая камнем, равна 6 м.

Задача 46. Составьте уравнение параболы, если даны ее фокус $F(-2, 1)$ и директриса $x + y - 1 = 0$.

Решение. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка параболы. По определению параболы, расстояние от этой точки до фокуса равно расстоянию до директрисы. Следовательно, достаточно применить формулу расстояния между точками и формулу расстояния от точки до прямой:

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} = \frac{|x + y - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}};$$

$$2((x+2)^2 + (y-1)^2) = (x + y - 1)^2;$$

$$2(x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1) = x^2 + y^2 + 1 + 2xy - 2x - 2y;$$

$$x^2 - 2xy + y^2 + 12x - 2y + 9 = 0.$$

Ответ: $x^2 - 2xy + y^2 + 12x - 2y + 9 = 0$.

Задача 47. Составить уравнение параболы, если известны ее фокус и директриса:

1)$F(1, 2)$; $x + y = 0$; 2)$F(2, 1)$; $x + y - 1 = 0$;

3)$F(-1, 2)$; $x - y = 0$; $F(2, -1)$; $x - y + 1 = 0$.

Задача 48. Установить, какие фигуры заданы уравнениями в полярных координатах:

1) $\rho = \dfrac{15}{3 - 7\cos\varphi}$;

2) $\rho = \dfrac{7}{5 - 2\cos\varphi}$;

3) $\rho = \dfrac{3}{4 - 4\cos\varphi}$;

4) $\rho = \dfrac{6}{2 - \cos\varphi}$.

Литература

1. Цубербиллер, О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии: учеб. пособие для втузов / О.Н. Цубербиллер. — М.: Наука, 1968. — 336 с.

2. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии: учеб. пособие для вузов / А.А.Бурдун [и др.]. — Мн.: "Университетское 1989. — 286 с.

3. Моденов, П.Р. Сборник задач по аналитической геометрии: учеб. пособие для вузов / П.Р. Моденов, А.С. Пархоменко — М.: Наука, 1976. — 384 с.

4. Александров, П.С. Лекции по аналитической геометрии: учеб. пособие для вузов / П.С.Александров — М.: Наука, 1968. — 911 с.

5. Милованов, М.В. Алгебра и аналитическая геометрия. Часть 1.: учеб. пособие для вузов / М.В. Милованов, Р.И. Тышкевич, А.С. Феденко — Мн.: Вышэйшая школа, 1984. — 302 с.

6. Милованов М.В., Алгебра и аналитическая геометрия. Часть 2. : учеб. пособие для вузов / М.В. Милованов [и др.] — Мн.: Вышэйшая школа, 1987. — 269 с.

4 Распределение задач по вариантам

№	1 вар.	2 вар.	3 вар.	4 вар.	5 вар.	6 вар.	7 вар.	8 вар.
1	2-1)	2-2)	2-3)	2-4)	3-1)	3-2)	3-3)	3-4)
2	4-2)	4-3)	4-4)	4-5)	5-1)	5-2)	5-3)	5-4)
3	6-1),3)	6-2),4)	6-1),3)	6-2),4)	6-1),3)	6-2),4)	6-1),3)	6-2),4)
4	7-1)	7-2)	7-3)	7-5)	8-3)	8-4)	8-1)	8-2)
5	9-1)	9-2)	9-3)	9-4)	10-3)	10-4)	10-1)	10-2)
6	12-1)	12-2)	13	14	15-1)	16-1)	15-2)	16-2)
7	17-1)	17-2)	17-1)	17-2)	18-2)	18-3)	18-2)	18-3)
8	20-1)	20-2)	20-3)	20-6)	22	22	22	22
9	23-1)	23-2)	23-3)	23-5)	24-1)	24-2)	24-4)	24-5)
10	26-2)	26-3)	26-4)	26-5)	27-1)	27-2)	27-3)	27-4)

Учебное издание

Аниськов Валерий Валерьевич

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ПРАКТИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

для студентов 1 курса
заочного факультета
специальности 1–31 03 01–02 — “Математика (научно-педагогическая деятельность)”

В авторской редакции

Подписано в печать 00.00.07 г. (00) Формат 60 × 84 1/16. Бумага писчая № 1. Гарнитура “таймс”. Усл. п. л. 00,00 Уч.-изд. л. 00,00. Тираж 25 экз.

Отпечатано с оригинала-макета на ризографе
учреждения образования
“Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины”
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104