Министерство Образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

А. В. Бузланов, В. С. Монахов, В. В. Подгорная,
И. Л. Сохор

ГЕОМЕТРИЯ И АЛГЕБРА.
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

ПРАКТИКУМ
в четырех частях
для студентов математических
специальностей вузов.
Часть 4

Гомель 2016

УДК
ББК
Б

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования "Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины"

Бузланов А. В.

Б Геометрия и алгебра. Линейная алгебра : практикум : в 4 ч. / А. В. Бузланов [и др.].; Мин-во обр. РБ, Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины. — Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины. — 2016. — Ч. 4. — 47 с.

Практикум включает разделы линейной алгебры. По каждой теме изложены элементы теории, приведены образцы решения типовых задач, предложены 15 вариантов индивидуальных заданий. Практикум адресован студентам математических специальностей вузов. Может быть использован студентами других специальностей, изучающими вопросы алгебры.

Четвертая часть практикума содержит разделы "Линейные операторы в евклидовом пространстве"; "Квадратичные формы".

УДК
ББК

7 ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

7.1 Элементы теории

7.1.1 Сопряженные линейные операторы

Пусть f — линейный оператор евклидова пространства V. Линейный оператор g евклидова пространства V называется *сопряженным* к оператору f, если для любых векторов $\bar{x}, \bar{y} \in V$ выполняется равенство

$$(f(\bar{x}), \bar{y}) = (\bar{x}, g(\bar{y})).$$

Оператор, сопряженный к оператору f, обозначается f^*.

Теорема 7.1. *Для любого линейного оператора f конечномерного евклидова пространства V существует единственный сопряженный оператор f^*. Если A — матрица оператора f в некотором ортонормированном базисе пространства V, то A^T — матрица оператора f^* в этом базисе.*

7.1.2 Ортогональные линейные операторы

Линейный оператор f евклидова пространства V называется *ортогональным*, если он сохраняет скалярное произведение векторов, т. е. выполняется равенство

$$(f(\bar{x}), f(\bar{y})) = (\bar{x}, \bar{y}).$$

для всех $\bar{x}, \bar{y} \in V$.

Следующие теоремы дают критерии ортогональности линейного оператора в евклидовом пространстве.

Теорема 7.2. *Линейный оператор f евклидова пространства V ортогонален тогда и только тогда, когда* *он сохраняет длины векторов, т. е. для всех $\bar{x} \in V$ выполняется равенство $\|f(\bar{x})\| = \|\bar{x}\|$.*

Теорема 7.3. *Линейный оператор f конечномерного евклидова пространства V является ортогональным тогда и только тогда, когда f переводит ортонормированный базис V в ортонормированный базис.*

Матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$ называется *ортогональной*, если

$$A^T A = AA^T = E.$$

Теорема 7.4. *Линейный оператор f конечномерного евклидова пространства V ортогонален тогда и только тогда, когда ортогональна матрица оператора f в ортонормированном базисе.*

7.1.3 Ортогональные матрицы

Свойства ортогональных матриц дает следующая

Лемма 7.5. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *если A — ортогональная матрица, то $|A| = \pm 1$;*

2) *произведение ортогональных матриц есть матрица ортогональная;*

3) *матрица, обратная ортогональной матрице, есть матрица ортогональная;*

4) *матрица перехода от одного ортонормированного базиса евклидова пространства к другому ортонормированному базису этого пространства является ортогональной.*

Следующая теорема дает критерий ортогональности матрицы.

Теорема 7.6. *Квадратная матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$ ортогональна тогда и только тогда, когда сумма квадратов* *элементов каждой из ее строк равна единице, а сумма попарных произведений соответствующих элементов ее различных строк равна нулю, т.е. для элементов a_{ij} матрицы A выполняются условия*

$$a_{i1} \cdot a_{j1} + a_{i2} \cdot a_{j2} + \ldots + a_{in} \cdot a_{jn} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases}$$

для $i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, n$.

7.1.4 Самосопряженные линейные операторы

Линейный оператор f евклидова пространства V называется *самосопряженным*, если он совпадает со своим сопряженным оператором f^*, т. е. для любых $\bar{x}$, $\bar{y} \in V$ верно равенство $(f(\bar{x}),\bar{y}) = (\bar{x},f(\bar{y}))$.

Квадратная матрица $A = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ называется *симметрической*, если $A^T = A$, т. е. $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для всех $i, j = 1, \ldots, n$.

Теорема 7.7. *Линейный оператор f конечномерного евклидова пространства V является самосопряженным тогда и только тогда, когда его матрица в ортонормированном базисе пространства V симметрическая.*

На важную роль ортогональных и самосопряженных операторов в общей теории линейных операторов евклидовых пространств указывает следующая теорема.

Теорема 7.8. *Любой линейный оператор f конечномерного евклидова пространства V можно представить в виде $f = hg$, где h — ортогональный линейный оператор, g — самосопряженный линейный оператор пространства V. Такое представление оператора f называется полярным разложением.*

Следствие 7.8.1. *Любую квадратную матрицу A из $M_n(\mathbb{R})$ можно представить в виде произведения ортогональной и симметрической матриц.*

Еще один критерий самосопряженности линейного оператора дает следующая теорема.

Теорема 7.9. *Линейный оператор f ненулевого конечномерного евклидова пространства V является самосопряженным тогда и только тогда, когда в пространстве V существует ортонормированный базис из собственных векторов оператора f.*

Вспоминая теорему 5.5 — критерий диагонализируемости линейного оператора, получаем

Следствие 7.9.1. *Самосопряженный линейный оператор конечномерного евклидова пространства является диагонализируемым.*

Следствие 7.9.2. *Для любой симметрической матрицы $A \in M_n(\mathbb{R})$ существует ортогональная матрица T такая, что $B = TAT^{-1}$ — диагональная матрица.*

7.1.5 Ортогональное дополнение подпространства

Ортогональным дополнением подпространства W евклидова пространства V называется множество $W^{\perp}$ всех векторов из V, каждый из которых ортогонален всем векторам из подпространства W:

$$W^{\perp} = \{\bar{x} \in V \mid \bar{x} \perp \bar{y} \text{ для любого } \bar{y} \in W\}.$$

Свойства ортогонального дополнения пространства дает следующая лемма.

Лемма 7.10. *Пусть W — подпространство евклидова пространства V. Справедливы следующие утверждения:*

1) *ортогональное дополнение* $W^{\perp}$ *является подпространством пространства* V*;*

2) *если* V *— конечномерное пространство, то*
$$V = W \oplus W^{\perp};$$
3) *если* V *— конечномерное пространство, то*
$$\dim V = \dim W + \dim W^{\perp}.$$

7.2 Примеры решения задач

Пример 7.1. Пусть $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ — ортонормированный базис евклидова пространства V. Дана матрица
$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$
линейного оператора f пространства V в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$. Найдите матрицу сопряженного оператора f^* в базисе $\bar{a}_1 = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2$, $\bar{a}_2 = 2\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2$.

☐ Так как векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ образуют ортонормированный базис пространства V, то сопряженный оператор f^* в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ имеет матрицу
$$A^T = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Если B — матрица оператора f^* в базисе $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, то
$$B = CA^TC^{-1},$$
где C — матрица перехода от базиса $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ к базису $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$. По условию
$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix},$$
тогда
$$C^{-1} = \frac{1}{|C|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

и искомая матрица

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -9 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -2 \\ 23 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -8 & -2 \\ 23 & 7 \end{pmatrix}$. ⊠

Пример 7.2. Пусть $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ — ортонормированный базис евклидова пространства V. Найдите матрицу сопряженного оператора f^* в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, если известно, что линейный оператор f пространства V переводит векторы $\bar{a}_1 = \bar{e}_2$, $\bar{a}_2 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$ в векторы $\bar{b}_1 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2$, $\bar{b}_2 = 3\bar{e}_1 + \bar{e}_2$, соответственно.

☐ Найдем матрицу оператора f в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$. По условию $f(\bar{a}_1) = \bar{b}_1$ и $f(\bar{a}_2) = \bar{b}_2$. Тогда

$$\begin{cases} f(\bar{e}_2) = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2, \\ f(\bar{e}_1 + \bar{e}_2) = 3\bar{e}_1 + \bar{e}_2. \end{cases}$$

Поскольку f — линейный оператор пространства V, то $f(\bar{e}_1 + \bar{e}_2) = f(\bar{e}_1) + f(\bar{e}_2)$. Решая систему

$$\begin{cases} f(\bar{e}_2) = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2, \\ f(\bar{e}_1) + f(\bar{e}_2) = 3\bar{e}_1 + \bar{e}_2 \end{cases}$$

относительно неизвестных $f(\bar{e}_1)$ и $f(\bar{e}_2)$, находим

$$\begin{cases} f(\bar{e}_1) = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2, \\ f(\bar{e}_2) = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2. \end{cases}$$

Тогда матрица оператора f в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ равна

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрица сопряженного оператора f^* в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ имеет вид

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. $\boxtimes$

Пример 7.3. Пусть $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ — ортонормированный базис евклидова пространства V. Линейный оператор φ пространства V действует на векторы этого базиса по формулам $\varphi(\bar{e}_1) = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$, $\varphi(\bar{e}_2) = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - 2\bar{e}_3$, $\varphi(\bar{e}_3) = 2\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3$. Определите, будет ли оператор φ: а) самосопряженным; б) ортогональным?

$\square$ По определению матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

является матрицей оператора φ в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$.

а) Так как матрица $A = A^T$, то она симметрическая и по теореме 7.7 оператор φ является самосопряженным.

б) Находим

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \neq E.$$

Следовательно, матрица A не ортогональна и по теореме 7.4 оператор φ не является ортогональным.

Ответ: а) да; б) нет. $\boxtimes$

Пример 7.4. Самосопряженный линейный оператор φ в ортонормированном базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ евклидова пространства V имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите базис из собственных векторов, в котором матрица оператора φ имеет диагональный вид. Укажите этот диагональный вид.

□ По теореме 7.9 в пространстве V существует базис из собственных векторов оператора φ. Найдем этот базис.

Составим характеристический многочлен матрицы A и найдем его корни.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = (1-\lambda)(3-\lambda).$$

Из уравнения $(1-\lambda)(3-\lambda) = 0$ находим $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$.

Найдем собственные векторы принадлежащие собственному значению $\lambda_1 = 1$. Пусть $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2$ есть искомый собственный вектор. Тогда

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда получаем $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 = -x_2$, x_2 — любое действительное число. Следовательно, искомое множество собственных векторов

$$H_1 = \{\bar{x} = -\alpha\bar{e}_1 + \alpha\bar{e}_2 \mid \alpha \in \mathbb{R}^*\}.$$

Выберем в H_1 один из векторов $\bar{a}_1 = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2$ при $\alpha = 1$.

Аналогично находим множество собственных векторов, принадлежащих собственному значению $\lambda_2 = 3$:

$$H_3 = \{\bar{x} = \alpha\bar{e}_1 + \alpha\bar{e}_2 \mid \alpha \in \mathbb{R}^*\},$$

и выбираем один из векторов $\bar{a}_2 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$ при $\alpha = 1$.

По теореме 5.6 собственные векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ линейно независимы и в двухмерном пространстве V образуют базис. Так как $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ являются собственными векторами оператора φ, то

$$\varphi(\bar{a}_1) = \lambda_1 \bar{a}_1 = \bar{a}_1 = 1 \cdot \bar{a}_1 + 0 \cdot \bar{a}_2,$$
$$\varphi(\bar{a}_2) = \lambda_2 \bar{a}_2 = 3\bar{a}_2 = 0 \cdot \bar{a}_1 + 3 \cdot \bar{a}_2.$$

Тогда матрица оператора φ в базисе $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\bar{a}_1 = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2$, $\bar{a}_2 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. ⊠

Пример 7.5. Для матрицы

$$C = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

найдите такую ортогональную матрицу T, чтобы матрица TCT^{-1} была диагональной.

□ Пусть V есть двухмерное евклидово пространство с ортонормированным базисом $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$. Обозначим через f тот линейный оператор пространства V, который в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ имеет матрицу C. Так как матрица C симметрическая, то по теореме 7.7 оператор φ является самосопряженным. По теореме 7.9 в пространстве V существует базис из собственных векторов оператора f. Найдем этот базис.

Находим собственные значения оператора f.

$$|C - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(1-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 4.$$

Из уравнения $\lambda^2 - 4 = 0$ находим $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$.

Найдем собственные векторы, принадлежащие собственному значению $\lambda_1 = -2$. Пусть $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2$ есть искомый собственный вектор. Тогда

$$(x_1 \quad x_2) \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} = (0 \quad 0),$$

откуда
$$\begin{cases} x_1 + \sqrt{3}x_2 = 0, \\ \sqrt{3}x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$$
Решая систему, получим $x_1 = -\sqrt{3}x_2$, x_2 — любое действительное число. Следовательно, искомое множество собственных векторов
$$H_{-2} = \{\bar{x} = -\sqrt{3}\alpha\bar{e}_1 + \alpha\bar{e}_2 \mid \alpha \in \mathbb{R}^*\}.$$
Выберем один из векторов $\bar{a}_1 = -\sqrt{3}\bar{e}_1 + \bar{e}_2$ при $\alpha = 1$.

Аналогично находим множество собственных векторов, принадлежащих собственному значению $\lambda_2 = 2$:
$$H_2 = \{\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}\alpha\bar{e}_1 + \alpha\bar{e}_2 \mid \alpha \in \mathbb{R}^*\},$$
и выбираем один из векторов $\bar{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{e}_1 + \bar{e}_2$ при $\alpha = 1$.

По теореме 5.6 собственные векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ линейно независимы и в двухмерном пространстве V они образуют базис. Так как
$$(\bar{a}_1, \bar{a}_2) = \left(-\sqrt{3}\bar{e}_1 + \bar{e}_2, \tfrac{1}{\sqrt{3}}\bar{e}_1 + \bar{e}_2\right) =$$
$$= \left(-\sqrt{3}\bar{e}_1, \tfrac{1}{\sqrt{3}}\bar{e}_1\right) + \left(-\sqrt{3}\bar{e}_1, \bar{e}_2\right) + \left(\bar{e}_2, \tfrac{1}{\sqrt{3}}\bar{e}_1\right) + (\bar{e}_2, \bar{e}_2) =$$
$$= -(\bar{e}_1, \bar{e}_1) - \sqrt{3}(\bar{e}_1, \bar{e}_2) + \tfrac{1}{\sqrt{3}}(\bar{e}_2, \bar{e}_1) + (\bar{e}_2, \bar{e}_2) =$$
$$= -1 - \sqrt{3} \cdot 0 + \tfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot 0 + 1 = 0,$$
то базис $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ ортогональный.

Нормируем векторы $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$:
$$\bar{b}_1 = \frac{\bar{a}_1}{\|\bar{a}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3+1}}\left(-\sqrt{3}\bar{e}_1 + \bar{e}_2\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{e}_1 + \frac{1}{2}\bar{e}_2,$$
$$\bar{b}_2 = \frac{\bar{a}_2}{\|\bar{a}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}+1}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{e}_1 + \bar{e}_2\right) = \frac{1}{2}\bar{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{e}_2.$$

Векторы $\bar{b}_1, \bar{b}_2$ образуют ортонормированный базис евклидова пространства V, состоящий из собственных векторов оператора f. Действительно,

$$f(\bar{b}_1) = f\left(\frac{\bar{a}_1}{\|\bar{a}_1\|}\right) = \frac{1}{\|\bar{a}_1\|}f(\bar{a}_1) = \\ = \frac{1}{\|\bar{a}_1\|}\lambda_1\bar{a}_1 = \lambda_1\frac{\bar{a}_1}{\|\bar{a}_1\|} = \lambda_1\bar{b}_1,$$

$$f(\bar{b}_2) = f\left(\frac{\bar{a}_2}{\|\bar{a}_2\|}\right) = \frac{1}{\|\bar{a}_2\|}f(\bar{a}_2) = \\ = \frac{1}{\|\bar{a}_2\|}\lambda_2\bar{a}_2 = \lambda_2\frac{\bar{a}_2}{\|\bar{a}_2\|} = \lambda_2\bar{b}_2.$$

В базисе $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$ оператор f имеет матрицу

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрица T перехода от базиса $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ к базису $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$ является искомой матрицей, так как по лемме 7.5 матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису является ортогональной. Следовательно,

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Выполним проверку.

1) Матрица T ортогональна:

$$T^T T = TT^T = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

2) Матрица TCT^{-1} диагональная:

$$TCT^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $T = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$. ⊠

Пример 7.6. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите базис ортогонального дополнения линейной оболочки системы векторов $\bar{a}_1 = (1,-1,1,-1)$, $\bar{a}_2 = (1,1,1,1)$, $\bar{a}_3 = (1,0,-1,0)$.

□ Пусть $W = L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3)$. Тогда любой вектор $\bar{y} \in W$ линейно выражается через векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$. Если вектор $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in W^\perp$, то $\bar{x} \perp \bar{y}$ тогда и только тогда, когда $\bar{x} \perp \bar{a}_1$, $\bar{x} \perp \bar{a}_2$, $\bar{x} \perp \bar{a}_3$. Следовательно, выполняются условия

$$\begin{cases} (\bar{x}, \bar{a}_1) = 0, \\ (\bar{x}, \bar{a}_2) = 0, \\ (\bar{x}, \bar{a}_3) = 0, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Решая систему методом Гаусса, получим $x_1 = 0$, $x_2 = -\alpha$, $x_3 = 0$, $x_4 = \alpha$, где α — любое действительное число. Таким образом,

$$W^\perp = \{\bar{x} = (0, -\alpha, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Следовательно, базис ортогонального дополнения $W^\perp$ состоит из одного вектора $\bar{e}_1 = (0,-1,0,1)$.

Ответ: $\bar{e}_1 = (0,-1,0,1)$. ⊠

7.3 Индивидуальные задания

1 Пусть $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ — ортонормированный базис евклидова пространства V, A — матрица линейного оператора f в базисе $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$. Найдите матрицу сопряженного оператора f^* в базисе $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.1 $\bar{a}_1 = \bar{e}_1$, $\bar{a}_2 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$.
1.2 $\bar{a}_1 = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2$, $\bar{a}_2 = -3\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2$.
1.3 $\bar{a}_1 = -2\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2$, $\bar{a}_2 = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2$.
1.4 $\bar{a}_1 = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2$, $\bar{a}_2 = \bar{e}_1 - 2\bar{e}_2$.
1.5 $\bar{a}_1 = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2$, $\bar{a}_2 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$.
1.6 $\bar{a}_1 = \bar{e}_1 + 3\bar{e}_2$, $\bar{a}_2 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2$.
1.7 $\bar{a}_1 = -3\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2$, $\bar{a}_2 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2$.
1.8 $\bar{a}_1 = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2$, $\bar{a}_2 = 2\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2$.
1.9 $\bar{a}_1 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2$, $\bar{a}_2 = -\bar{e}_2$.
1.10 $\bar{a}_1 = \bar{e}_1 - 2\bar{e}_2$, $\bar{a}_2 = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2$.
1.11 $\bar{a}_1 = \bar{e}_1 - 3\bar{e}_2$, $\bar{a}_2 = \bar{e}_1 - 2\bar{e}_2$.
1.12 $\bar{a}_1 = -2\bar{e}_1 - \bar{e}_2$, $\bar{a}_2 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$.
1.13 $\bar{a}_1 = -\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2$, $\bar{a}_2 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2$.
1.14 $\bar{a}_1 = 3\bar{e}_1 + \bar{e}_2$, $\bar{a}_2 = -2\bar{e}_1 - \bar{e}_2$.
1.15 $\bar{a}_1 = -\bar{e}_2$, $\bar{a}_2 = \bar{e}_1 - 3\bar{e}_2$.

2 Пусть $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ — ортонормированный базис евклидова пространства V. Линейный оператор f переводит векторы $\bar{a}_1 = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2$ и $\bar{a}_2 = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2$ в векторы $\bar{b}_1$ и $\bar{b}_2$ соответственно. Найдите матрицу сопряженного оператора f^* в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$.

2.1 $\bar{b}_1 = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2$, $\bar{b}_2 = 2\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2$.

2.2 $\bar{b}_1 = \bar{e}_1 - 2\bar{e}_2, \quad \bar{b}_2 = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2.$

2.3 $\bar{b}_1 = -2\bar{e}_1 - \bar{e}_2, \quad \bar{b}_2 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2.$

2.4 $\bar{b}_1 = 3\bar{e}_1 + \bar{e}_2, \quad \bar{b}_2 = -2\bar{e}_1 - \bar{e}_2.$

2.5 $\bar{b}_1 = \bar{e}_1, \quad \bar{b}_2 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2.$

2.6 $\bar{b}_1 = -2\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2, \quad \bar{b}_2 = \bar{e}_1 - 2\bar{e}_2.$

2.7 $\bar{b}_1 = 2\bar{e}_1 + 4\bar{e}_2, \quad \bar{b}_2 = 3\bar{e}_1 - \bar{e}_2.$

2.8 $\bar{b}_1 = -3\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2, \quad \bar{b}_2 = -5\bar{e}_1 - \bar{e}_2.$

2.9 $\bar{b}_1 = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2, \quad \bar{b}_2 = -3\bar{e}_2 + 2\bar{e}_2.$

2.10 $\bar{b}_1 = -4\bar{e}_1 + \bar{e}_2, \quad \bar{b}_2 = \bar{e}_1 - 3\bar{e}_2.$

2.11 $\bar{b}_1 = \bar{e}_1 + 3\bar{e}_2, \quad \bar{b}_2 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2.$

2.12 $\bar{b}_1 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2, \quad \bar{b}_2 = -5\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2.$

2.13 $\bar{b}_1 = \bar{e}_1 - 4\bar{e}_2, \quad \bar{b}_2 = 2\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2.$

2.14 $\bar{b}_1 = -\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2, \quad \bar{b}_2 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2.$

2.15 $\bar{b}_1 = -3\bar{e}_1 + 4\bar{e}_2, \quad \bar{b}_2 = -\bar{e}_2.$

3 Определите, является ли ортогональным линейный оператор φ евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, действующий на векторы ортонормированного базиса $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ по следующим формулам

3.1 $\varphi(\bar{e}_1) = \frac{2}{3}\bar{e}_1 + \frac{2}{3}\bar{e}_2 - \frac{1}{3}\bar{e}_3,$
$\varphi(\bar{e}_2) = \frac{2}{3}\bar{e}_1 - \frac{1}{3}\bar{e}_2 + \frac{2}{3}\bar{e}_3,$
$\varphi(\bar{e}_3) = -\frac{1}{3}\bar{e}_1 + \frac{2}{3}\bar{e}_2 + \frac{2}{3}\bar{e}_3.$

3.2 $\varphi(\bar{e}_1) = \frac{1}{2}\bar{e}_1 + \frac{1}{2}\bar{e}_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{e}_3,$
$\varphi(\bar{e}_2) = \frac{1}{2}\bar{e}_1 + \frac{1}{2}\bar{e}_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{e}_3,$
$\varphi(\bar{e}_3) = \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{e}_2.$

3.3 $\varphi(\bar{e}_1) = \frac{2}{3}\bar{e}_1 - \frac{1}{3}\bar{e}_2 + \frac{2}{3}\bar{e}_3,$
$\varphi(\bar{e}_2) = \frac{2}{3}\bar{e}_1 + \frac{2}{3}\bar{e}_2 - \frac{1}{3}\bar{e}_3,$
$\varphi(\bar{e}_3) = -\frac{1}{3}\bar{e}_1 + \frac{2}{3}\bar{e}_2 + \frac{2}{3}\bar{e}_3.$

3.4 $\varphi(\bar{e}_1) = \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{e}_3,$

$\varphi(\bar e_2) = \frac{1}{\sqrt3}\bar e_1 - \frac{1}{\sqrt2}\bar e_2 + \frac{1}{\sqrt6}\bar e_3,$
$\varphi(\bar e_3) = \frac{1}{\sqrt3}\bar e_1 - \frac{2}{\sqrt6}\bar e_3.$

3.5 $\varphi(\bar e_1) = \bar e_1,$
$\varphi(\bar e_2) = \frac{1}{2}\bar e_2 - \frac{\sqrt3}{2}\bar e_3,$
$\varphi(\bar e_3) = \frac{\sqrt3}{2}\bar e_2 - \frac{1}{2}\bar e_3.$

3.6 $\varphi(\bar e_1) = -\frac{1}{2}\bar e_1 + \frac{\sqrt2}{2}\bar e_2 + \frac{1}{2}\bar e_3,$
$\varphi(\bar e_2) = -\bar e_1 + \bar e_3,$
$\varphi(\bar e_3) = \frac{\sqrt2}{2}\bar e_1 - \frac{\sqrt2}{2}\bar e_3.$

3.7 $\varphi(\bar e_1) = \frac{\sqrt2}{2}\bar e_1 - \frac{\sqrt2}{2}\bar e_3,$
$\varphi(\bar e_2) = \frac{\sqrt2}{6}\bar e_1 + \frac{2\sqrt2}{3}\bar e_2 + \frac{\sqrt2}{6}\bar e_3,$
$\varphi(\bar e_3) = \frac{2}{3}\bar e_1 - \frac{1}{3}\bar e_2 + \frac{2}{3}\bar e_3.$

3.8 $\varphi(\bar e_1) = \frac{3}{4}\bar e_1 + \frac{1}{4}\bar e_2 - \frac{\sqrt6}{4}\bar e_3,$
$\varphi(\bar e_2) = \frac{1}{4}\bar e_1 + \frac{3}{4}\bar e_2 + \frac{\sqrt6}{4}\bar e_3,$
$\varphi(\bar e_3) = \frac{\sqrt6}{4}\bar e_1 - \frac{\sqrt6}{4}\bar e_2 + \frac{1}{2}\bar e_3.$

3.9 $\varphi(\bar e_1) = \frac{1}{\sqrt3}\bar e_1 - \frac{1}{\sqrt6}\bar e_2 + \frac{1}{\sqrt2}\bar e_3,$
$\varphi(\bar e_2) = \frac{1}{\sqrt2}\bar e_1 + \frac{1}{\sqrt3}\bar e_2 - \frac{1}{\sqrt6}\bar e_3,$
$\varphi(\bar e_3) = \frac{1}{\sqrt3}\bar e_2 + \frac{1}{\sqrt3}\bar e_3.$

3.10 $\varphi(\bar e_1) = -\frac{2}{3}\bar e_1 - \frac{2}{3}\bar e_2 + \frac{1}{3}\bar e_3,$
$\varphi(\bar e_2) = -\frac{1}{3}\bar e_1 + \frac{2}{3}\bar e_2 + \frac{2}{3}\bar e_3,$
$\varphi(\bar e_3) = -\frac{2}{3}\bar e_1 + \frac{1}{3}\bar e_2 - \frac{2}{3}\bar e_3.$

3.11 $\varphi(\bar e_1) = \frac{1}{\sqrt2}\bar e_1 + \frac{1}{\sqrt2}\bar e_3,$
$\varphi(\bar e_2) = \frac{1}{\sqrt3}\bar e_1 + \frac{1}{\sqrt3}\bar e_2 + \frac{1}{\sqrt3}\bar e_3,$
$\varphi(\bar e_3) = -\frac{2}{3}\bar e_1 - \frac{2}{3}\bar e_2 + \frac{1}{3}\bar e_3.$

3.12 $\varphi(\bar e_1) = \frac{1}{\sqrt6}\bar e_1 - \frac{2}{\sqrt6}\bar e_2 + \frac{1}{\sqrt6}\bar e_3,$
$\varphi(\bar e_2) = \frac{1}{\sqrt2}\bar e_1 - \frac{1}{\sqrt2}\bar e_3,$
$\varphi(\bar e_3) = \frac{2}{3}\bar e_1 + \frac{1}{3}\bar e_2 + \frac{2}{3}\bar e_3.$

3.13 $\varphi(\bar e_1) = \frac{1}{2}\bar e_2 - \frac{\sqrt3}{2}\bar e_3,$
$\varphi(\bar e_2) = \bar e_1,$

$\varphi(\bar{e}_3) = \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{e}_2 + \frac{1}{2}\bar{e}_3.$

3.14 $\varphi(\bar{e}_1) = \frac{2}{\sqrt{13}}\bar{e}_1 - \frac{3}{\sqrt{13}}\bar{e}_3,$

$\varphi(\bar{e}_2) = \bar{e}_2,$

$\varphi(\bar{e}_3) = \frac{3}{\sqrt{13}}\bar{e}_1 + \frac{2}{\sqrt{13}}\bar{e}_3.$

3.15 $\varphi(\bar{e}_1) = \frac{1}{2}\bar{e}_1 + \frac{1}{2}\bar{e}_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{e}_3,$

$\varphi(\bar{e}_2) = \frac{1}{2}\bar{e}_1 + \frac{1}{2}\bar{e}_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{e}_3,$

$\varphi(\bar{e}_3) = \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{e}_2.$

4 Линейный оператор φ в ортонормированном базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ евклидова пространства V имеет матрицу A.

1) Найдите базис из собственных векторов, в котором матрица оператора φ имеет диагональный вид, и укажите этот диагональный вид.

2) Найдите такую ортогональную матрицу T, что матрица TAT^{-1} является диагональной.

4.1 $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$. 4.2 $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

4.3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$. 4.4 $A = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$.

4.5 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. 4.6 $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$.

4.7 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. 4.8 $A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 4 \end{pmatrix}$.

4.9 $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$. 4.10 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4.11 $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$. 4.12 $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$.

4.13 $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. 4.14 $A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$.

4.15 $A = \begin{pmatrix} -2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -4 \end{pmatrix}$.

5 В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите базис ортогонального дополнения линейной оболочки системы векторов $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$.

5.1 $\bar{a}_1 = (1{,}0{,}2{,}1)$, $\bar{a}_2 = (2{,}1{,}2{,}3)$, $\bar{a}_3 = (0{,}1{,}-2{,}1)$.
5.2 $\bar{a}_1 = (1{,}1{,}1{,}1)$, $\bar{a}_2 = (1{,}2{,}2{,}-1)$, $\bar{a}_3 = (1{,}0{,}0{,}3)$.
5.3 $\bar{a}_1 = (1{,}1{,}3{,}0)$, $\bar{a}_2 = (2{,}1{,}1{,}-1)$, $\bar{a}_3 = (1{,}2{,}8{,}1)$.
5.4 $\bar{a}_1 = (2{,}0{,}2{,}1)$, $\bar{a}_2 = (1{,}-2{,}0{,}-1)$, $\bar{a}_3 = (1{,}2{,}2{,}2)$.
5.5 $\bar{a}_1 = (2{,}0{,}2{,}0)$, $\bar{a}_2 = (1{,}1{,}1{,}1)$, $\bar{a}_3 = (-1{,}1{,}1{,}-1)$.
5.6 $\bar{a}_1 = (0{,}-2{,}0{,}-1)$, $\bar{a}_2 = (1{,}1{,}1{,}0)$, $\bar{a}_3 = (1{,}-1{,}1{,}-1)$.
5.7 $\bar{a}_1 = (2{,}1{,}1{,}3)$, $\bar{a}_2 = (0{,}1{,}-1{,}0)$, $\bar{a}_3 = (1{,}-1{,}-1{,}1)$.
5.8 $\bar{a}_1 = (2{,}-1{,}1{,}0)$, $\bar{a}_2 = (0{,}1{,}-1{,}3)$, $\bar{a}_3 = (2{,}-2{,}2{,}-3)$.
5.9 $\bar{a}_1 = (0{,}2{,}-1{,}-1)$, $\bar{a}_2 = (1{,}-1{,}1{,}0)$, $\bar{a}_3 = (-1{,}-1{,}0{,}1)$.
5.10 $\bar{a}_1 = (-2{,}1{,}-3{,}-2)$, $\bar{a}_2 = (0{,}1{,}1{,}0)$, $\bar{a}_3 = (-1{,}2{,}0{,}-1)$.
5.11 $\bar{a}_1 = (1{,}2{,}1{,}-1)$, $\bar{a}_2 = (1{,}1{,}0{,}0)$, $\bar{a}_3 = (0{,}1{,}0{,}1)$.
5.12 $\bar{a}_1 = (-1{,}0{,}2{,}1)$, $\bar{a}_2 = (-4{,}-4{,}-2{,}-10)$, $\bar{a}_3 = (3{,}2{,}-1{,}4)$.

5.13 $\bar{a}_1 = (1,-2,3,1)$, $\bar{a}_2 = (-3,2,1,-3)$,
$\bar{a}_3 = (-1,0,2,-1)$.

5.14 $\bar{a}_1 = (-1,4,-3,2)$, $\bar{a}_2 = (4,-14,6,-2)$,
$\bar{a}_3 = (1,-3,0,1)$.

5.15 $\bar{a}_1 = (0,1,-4,3)$, $\bar{a}_2 = (1,-3,2,0)$,
$\bar{a}_3 = (-2,5,-1,2)$.

8 КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

8.1 Элементы теории

В этой теме под полем P будем понимать либо поле $\mathbb{R}$ всех действительных чисел, либо поле $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел.

8.1.1 Основные понятия

Квадратичной формой от переменных $x_1, \ldots, x_n$ *над полем* P называется многочлен $f(x_1, \ldots, x_n)$ над полем P, каждое слагаемое которого имеет вторую степень. Каждая квадратичная форма может быть записана в следующем *симметричном виде*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n +$$
$$+ a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + \ldots +$$
$$+ a_{2n}x_2x_n + \ldots + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2,$$

где для всех i и j коэффициенты $a_{ij} \in P$ удовлетворяют условию $a_{ij} = a_{ji}$. Если в первоначальной записи квадратичной формы коэффициенты при x_ix_j и x_jx_i различны, то можно сложить их и, разделив их сумму на два, получить равные.

Матрица $A = (a_{ij})$, составленная из коэффициентов квадратичной формы $f(x_1, \ldots, x_n)$, записанной в симметричном виде, называется *матрицей квадратичной формы* $f(x_1, \ldots, x_n)$. Ранг матрицы A называется *рангом квадратичной формы*. Очевидно, что матрица A квадратичной формы является симметрической квадратной матрицей порядка n.

Квадратичную форму удобно записывать в матричной форме. Если обозначим матрицу $(x_1 \quad x_2 \ldots x_n) = X$, то
$$f(x_1, \ldots, x_n) = XAX^T,$$
где A — матрица квадратичной формы, X^T — матрица, полученная из X транспонированием.

8.1.2 Линейное преобразование переменных

Линейным преобразованием переменных $x_1, \ \ldots, \ x_n$ *над полем* P называется переход от них к новым переменным $y_1, \ldots, y_n$, осуществляемый по формулам
$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \ldots + \alpha_{1n}y_n, \\ x_2 = \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \ldots + \alpha_{2n}y_n, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \alpha_{n1}y_1 + \alpha_{n2}y_2 + \ldots + \alpha_{nn}y_n, \end{cases} \tag{8.1}$$
где $\alpha_{ij} \in P$. Матрица $A = (\alpha_{ij})$ называется *матрицей* данного *линейного преобразования переменных*. Если определитель $|A| \neq 0$, то линейное преобразование переменных называется *невырожденным*.

Если $X = (x_1 \ x_2 \ldots x_n)$, $Y = (y_1 \ y_2 \ldots y_n)$, то равенства (8.1) можно записать в матричной форме
$$X^T = AY^T.$$
Если линейное преобразование переменных $x_1, \ldots, x_n$ невырожденное, то переменные $y_1, \ \ldots, y_n$ можно выразить через переменные $x_1, \ \ldots, \ x_n$ следующим образом:
$$Y^T = A^{-1}X^T.$$
Такое линейное преобразование переменных $y_1, \ldots, y_n$ называется *обратным* к преобразованию (8.1).

Под произведением двух линейных преобразований пе-

ременных понимается их последовательное выполнение.

Пусть линейное преобразование переменных $x_1, \ldots, x_n$ в переменные $y_1, \ldots, y_n$ задано равенством $X^T = AY^T$, а линейное преобразование переменных $y_1, \ldots, y_n$ в переменные $z_1, \ldots, z_n$ задано равенством $Y^T = BZ^T$. Тогда последовательное выполнение этих двух преобразований приводит к линейному преобразованию переменных $x_1, \ldots, x_n$ в переменные $z_1, \ldots, z_n$, заданному равенством $X^T = (AB)Z^T$.

8.1.3 Канонический вид квадратичной формы

Квадратичная форма называется *канонической*, если она не содержит произведений различный переменных, т.е. имеет вид $f(x_1, \ldots, x_n) = a_{11}{x_1}^2 + a_{22}{x_2}^2 + \ldots + a_{nn}{x_n}^2$. *Каноническим видом* квадратичной формы $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется любая каноническая квадратичная форма $g(y_1, \ldots, y_n)$, в которую переходит форма $f(x_1, \ldots, x_n)$ в результате применения некоторого невырожденного линейного преобразования переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Теорема 8.1. *Любую квадратичную форму над полем P с помощью некоторого невырожденного линейного преобразования переменных можно привести к каноническому виду.*

Важное свойство канонического вида квадратичной формы дает следующая теорема.

Теорема 8.2. *Число ненулевых коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы над полем P не зависит от способа приведения квадратичной формы к каноническому виду и равно рангу квадратичной формы.*

Теорема 8.2 позволяет ввести следующее понятие.

Индексом инерции квадратичной формы называется число ненулевых коэффициентов в каноническом виде этой квадратичной формы.

8.1.4 Способы приведения квадратичной формы к каноническому виду

Одним из наиболее простых способов приведения квадратичной формы к каноническому виду является *метод Лагранжа.*

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n + {} + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \ldots + 2a_{2n}x_2x_n + \ldots + a_{nn}x_n^2$ есть квадратичная форма над полем P, где хотя бы один из коэффициентов $a_{ij} \neq 0$. Для приведения ее к каноническому виду будем использовать следующие два действия.

(1) Если квадратичная форма содержит слагаемое вида $2a_{ij}x_ix_j$, где $i \neq j$, и слагаемое $a_{ii}x_i^2$, то мы можем избавиться от всех произведений x_ix_k, $k \neq i$, с помощью следующего невырожденного преобразования переменных:

$$\begin{cases} y_i = a_{ii}x_i + a_{ii+1}x_{i+1} + \ldots + a_{in}x_n, \\ y_j = x_j, \text{ если } j \neq i. \end{cases}$$

Используем обратное преобразование переменных:

$$\begin{cases} x_i = \frac{1}{a_{ii}}y_i - \frac{a_{ii+1}}{a_{ii}}y_{i+1} - \ldots - \frac{a_{in}}{a_{ii}}y_n, \\ x_j = y_j, \text{ если } j \neq i. \end{cases}$$

Подставляя эти равенства в $f(x_1, \ldots, x_n)$, получим квадратичную форму $g(y_1, \ldots, y_n)$, в которой нет произведений разных переменных, содержащих y_i.

(2) Если квадратичная форма содержит слагаемое вида $2a_{ij}x_ix_j$, где $i \neq j$, и нет слагаемых $a_{ii}x_i^2$ и $a_{jj}x_j^2$, то де-

лаем невырожденное линейное преобразование переменных по формулам

$$\begin{cases} x_i = y_i - y_j, \\ x_j = y_i + y_j, \\ x_k = y_k, \text{ если } k \neq i \text{ и } k \neq j. \end{cases}$$

Это преобразование переводит квадратичную форму $f(x_1, \ldots, x_n)$ в квадратичную форму $g(y_1, \ldots, y_n)$, в которой появится слагаемое $c_{ii}y_i^2$ и можно будет выполнить действие (1).

Используя действия (1) и (2), через конечное число шагов ненулевую квадратичную форму $f(x_1, \ldots, x_n)$ можно преобразовать к каноническому виду $h(z_1, \ldots, z_n) = c_{11}{z_1}^2 + \ldots + c_{nn}{z_n}^2$. Если при этом мы последовательно выполнили k невырожденных линейных преобразований переменных $X^T = A_1Y^T, Y^T = A_2H^T, \ldots, F^T = A_kZ^T$, то равенство $X^T = (A_1 \ldots A_k)Z^T$ и матрица $B = A_1 \ldots A_k$ дают невырожденное линейное преобразование переменных $x_1, \ldots, x_n$, которое переводит квадратичную форму $f(x_1, \ldots, x_n)$ в канонический вид $h(z_1, \ldots, z_n)$.

Второй способ приведения квадратичной формы к каноническому виду применяется только для *действительных квадратичных форм*, т.е. квадратичных форм над полем $\mathbb{R}$. Он тесно связан с теорией самосопряженных линейных операторов конечномерного евклидова пространства и основан на следующей теореме.

Теорема 8.3. *Для любой действительной квадратичной формы $f(x_1, \ldots, x_n)$ существует линейное преобразование переменных $x_1, \ldots, x_n$ с ортогональной матрицей, приводящее эту квадратичную форму к каноническому* *виду. При этом коэффициентами при квадратах переменных в каноническом виде будут корни характеристического многочлена матрицы квадратичной формы.*

8.1.5 Нормальный вид квадратичной формы

Нормальным видом комплексной квадратичной формы, т.е. квадратичной формы над полем $\mathbb{C}$, называется такой ее канонический вид, в котором все ненулевые коэффициенты равны 1.

Теорема 8.4. *Всякая комплексная квадратичная форма с помощью некоторого невырожденного линейного преобразования переменных может быть приведена к нормальному виду.*

Если комплексная квадратичная форма $f(x_1, \ldots, x_n)$ приведена к каноническому виду

$$g(y_1, \ldots, y_n) = c_{11}y_1^2 + c_{22}y_2^2 + \ldots + c_{nn}y_n^2,$$

то делаем следующее невырожденное линейное преобразование переменных:

$$\begin{cases} y_i = \frac{1}{\sqrt{c_{ii}}} z_i, \text{ если } c_{ii} \neq 0, \\ y_j = z_j, \text{ если } c_{jj} = 0. \end{cases}$$

Такое преобразование переменных приведет квадратичную форму $g(y_1, \ldots, y_n)$ к нормальному виду квадратичной формы $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Нормальным видом действительной квадратичной формы называется такой ее канонический вид, в котором все ненулевые коэффициенты равны либо 1, либо -1.

Теорема 8.5. *Всякую действительную квадратичную форму можно привести к нормальному виду с помощью невырожденного линейного преобразования переменных.*

Если действительная квадратичная форма $f(x_1, \dots, x_n)$ приведена к каноническому виду

$$g(y_1, \dots, y_n) = \pm c_{11}y_1^2 \pm c_{22}y_2^2 \pm \dots \pm c_{nn}y_n^2,$$

где $c_{ii} \geq 0$, то делаем следующее невырожденное линейное преобразование переменных

$$\begin{cases} y_i = \frac{1}{\sqrt{c_{ii}}} z_i, \text{ если } c_{ii} \neq 0, \\ y_j = z_j, \text{ если } c_{jj} = 0. \end{cases}$$

Такое преобразование переменных приведет квадратичную форму $g(y_1, \dots, y_n)$ к нормальному виду квадратичной формы $f(x_1, \dots, x_n)$.

Следующая теорема дает важное свойство нормального вида действительной квадратичной формы.

Теорема 8.6. *Число положительных и число отрицательных коэффициентов в нормальном виде действительной квадратичной формы не зависит от выбора невырожденного линейного преобразования переменных, которое приводит эту форму к нормальному виду.*

Теорема 8.6 позволяет ввести следующие понятия. *Положительным индексом инерции* действительной квадратичной формы называется число положительных коэффициентов в нормальном виде этой квадратичной формы, а число отрицательных коэффициентов в нормальном виде действительной квадратичной формы называется *отрицательным индексом инерции.*

8.1.6 Знакоопределенные квадратичные формы

Действительная квадратичная форма $f(x_1, \dots, x_n)$ называется *положительно определенной*, если для любых действительных чисел $a_1, \dots, a_n$, одновременно не равных нулю, выполняется неравенство $f(a_1, \ldots, a_n) > 0$. Действительная квадратичная форма $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *отрицательно определенной*, если для любых действительных чисел $a_1, \ldots, a_n$, одновременно не равных нулю, выполняется неравенство $f(a_1, \ldots, a_n) < 0$. Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы называются *знакоопределенными*.

Лемма 8.7. *Если к переменным положительно (отрицательно) определенной квадратичной формы применить невырожденное линейное преобразование, то полученная квадратичная форма также будет положительно (отрицательно) определенной.*

Лемма 8.7 лежит в основе следующего способа распознавания знакоопределенных квадратичных форм.

Теорема 8.8. *Действительная квадратичная форма* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *является положительно (отрицательно) определенной тогда и только тогда, когда положительный (отрицательный) индекс инерции этой квадратичной формы равен* n.

Другой способ распознавания знакоопределенных квадратичных форм называется *критерием Сильвестра* и связан понятием главных миноров матрицы.

Главными минорами квадратной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называются миноры Δ_1, Δ_2, …, Δ_n, где

$$\Delta_1 = |a_{11}|, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots,$$

$$\Delta_n = |A|,$$

т. е. миноры всех порядков от 1 до n, расположенные в левом верхнем углу матрицы A.

Теорема 8.9 (**Критерий Сильвестра**). *Действительная квадратичная форма является положительно определенной тогда и только тогда, когда все главные миноры матрицы квадратичной формы положительны. Действительная квадратичная форма является отрицательно определенной тогда и только тогда, когда все главные миноры нечетного порядка матрицы квадратичной формы отрицательны, а все главные миноры четного порядка положительны.*

8.2 Примеры решения задач

Пример 8.1. Найдите ранг квадратичной формы

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_3x_1 - 3x_2x_3 + 4x_1x_3.$$

$\square$ В результате приведения подобных слагаемых квадратичная форма примет вид:

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 - 3x_2x_3.$$

Запишем ее в симметричном виде

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_2x_1 + x_2^2 - \\ -\frac{3}{2}x_2x_3 + x_3x_1 - \frac{3}{2}x_3x_2 + 0 \cdot x_3^2.$$

Матрицей квадратичной формы $f(x_1,x_2,x_3)$ будет

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем ранг матрицы A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[III+I\cdot(-1)]{II+I\cdot(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -\frac{7}{2} \\ 0 & -\frac{7}{2} & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{III\cdot(-3)+II\cdot\frac{7}{2}}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{37}{4} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $r(A) = 3$ и поэтому ранг квадратичной формы $f(x_1,x_2,x_3)$ равен 3.

Ответ: 3. ⊠

Пример 8.2. Используя метод Лагранжа, найдите канонический вид квадратичной формы

$$g(x_1,x_2,x_3) = -2x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Укажите невырожденное линейное преобразование переменных, приводящее к каноническому виду. Сделайте проверку.

□ Так как в квадратичной форме есть x_1^2, то мы можем избавиться от произведений различных переменных, содержащих x_1. Для этого выполним следующее преобразование переменных

$$y_1 = -2x_1 - x_3,\ y_2 = x_2,\ y_3 = x_3.$$

Находим обратное преобразование переменных

$$x_1 = -\frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_3,\ x_2 = y_2,\ x_3 = y_3$$

с матрицей линейного преобразования переменных

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подставляя выражения для x_1, x_2, x_3 в квадратичную форму $g(x_1,x_2,x_3)$, получим квадратичную форму

$$g_1(y_1,y_2,y_3) = -2\left(-\frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_3\right)^2 + 3y_2^2 -$$

$$-2\left(-\frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_3\right)y_3 + 4y_2y_3 = -\frac{1}{2}y_1^2 - y_1y_3 - \frac{1}{2}y_3^2 +$$

$$+3y_2^2 + y_1y_3 + y_3^2 + 4y_2y_3 = -\frac{1}{2}y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{1}{2}y_3^2 + 4y_2y_3.$$

Так как в квадратичной форме есть y_2^2, то мы можем избавиться от произведений различных переменных, содержащих y_2. Для этого сделаем следующее линейное преобразование переменных:

$$z_1 = y_1,\ z_2 = 3y_2 + 2y_3,\ z_3 = y_3.$$

Находим обратное преобразование переменных

$$y_1 = z_1,\ y_2 = \frac{1}{3}z_2 - \frac{2}{3}z_3, y_3 = z_3$$

с матрицей линейного преобразования

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подставляя выражения для y_1, y_2, y_3 в квадратичную форму $g_1(y_1,y_2,y_3)$, получим квадратичную форму

$$g_2(z_1,z_2,z_3) = -\frac{1}{2}z_1^2 + 3\left(\frac{1}{3}z_2 - \frac{2}{3}z_3\right)^2 + \frac{1}{2}z_3^2 +$$

$$+4\left(\frac{1}{3}z_2 - \frac{2}{3}z_3\right)z_3 = -\frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{3}z_2^2 - \frac{4}{3}z_2z_3 + \frac{4}{3}z_3^2 +$$

$$+\frac{1}{2}z_3^2+\frac{4}{3}z_2z_3-\frac{8}{3}z_3^2=-\frac{1}{2}z_1^2+\frac{1}{3}z_2^2-\frac{5}{6}z_3^2.$$

Таким образом, квадратичная форма

$$g_2(z_1,z_2,z_3)=-\frac{1}{2}z_1^2+\frac{1}{3}z_2^2-\frac{5}{6}z_3^2$$

является каноническим видом квадратичной формы $g(x_1,x_2,x_3)$.

Найдем матрицу линейного преобразования переменных, приводящего квадратичную форму $g(x_1,x_2,x_3)$ к каноническому виду

$$T=A_1\cdot A_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Теперь запишем невырожденное линейное преобразование переменных, приводящее к каноническому виду квадратичную форму $g(x_1,x_2,x_3)$.

$$x_1=-\frac{1}{2}z_1-\frac{1}{2}z_3,\ x_2=\frac{1}{3}z_2-\frac{2}{3}z_3,\ x_3=z_3.$$

Выполним проверку.

$$g(x_1,x_2,x_3)=-2x_1^2+3x_2^2-2x_1x_3+4x_2x_3=$$

$$=-2\left(-\frac{1}{2}z_1-\frac{1}{2}z_3\right)^2+3\left(\frac{1}{3}z_2-\frac{2}{3}z_3\right)^2-$$

$$-2\left(-\frac{1}{2}z_1-\frac{1}{2}z_3\right)z_3+4\left(\frac{1}{3}z_2-\frac{2}{3}z_3\right)z_3=-\frac{1}{2}z_1^2-z_1z_3-$$

$$-\frac{1}{2}z_3^2+\frac{1}{3}z_2^2-\frac{4}{3}z_2z_3+\frac{4}{3}z_3^2+z_1z_3+z_3^2+\frac{4}{3}z_2z_3-\frac{8}{3}z_3^2=$$

$$=-\frac{1}{2}z_1^2+\frac{1}{3}z_2^2-\frac{5}{6}z_3^2.$$

Ответ: $g_2(z_1,z_2,z_3)=-\frac{1}{2}z_1^2+\frac{1}{3}z_2^2-\frac{5}{6}z_3^2$; $x_1=-\frac{1}{2}z_1-\frac{1}{2}z_3$, $x_2=\frac{1}{3}z_2-\frac{2}{3}z_3$, $x_3=z_3$. ⊠

Пример 8.3. Используя метод Лагранжа, приведите квадратичную форму $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1x_2 - 4x_2x_3$ к нормальному виду над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. Укажите линейное преобразование переменных, приводящее к этому виду.

$\square$ Приведем квадратичную форму к каноническому виду. Так как в данной квадратичной форме нет квадратов переменных, то получим их, выполняя следующее линейное преобразование переменных

$$x_1 = y_1 - y_2,\ x_2 = y_1 + y_2,\ x_3 = y_3$$

с матрицей

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подставляя эти выражения в квадратичную форму $f(x_1,x_2,x_3)$, получим

$$\begin{aligned} f_1(y_1,y_2,y_3) &= 2(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) - 4(y_1 + y_2)y_3 = \\ &= 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 - 4y_2y_3. \end{aligned}$$

Поскольку теперь в квадратичной форме есть y_1^2, то избавимся от произведений различных переменных, содержащих y_1. Для этого сделаем следующее линейное преобразование переменных

$$z_1 = 2y_1 - 2y_3,\ z_2 = y_2,\ z_3 = y_3.$$

Находим обратное преобразование переменных

$$y_1 = \frac{1}{2}z_1 + z_3,\ y_2 = z_2,\ y_3 = z_3$$

с матрицей

$$A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подставляя найденные y_1, y_2, y_3 в квадратичную форму $f(y_1,y_2,y_3)$, получим

$$f_2(z_1,z_2,z_3) = 2\left(\frac{1}{2}z_1 + z_3\right)^2 - 2z_2^2 - 4\left(\frac{1}{2}z_1 + z_3\right)z_3 -$$

$$-4z_2z_3 = \frac{1}{2}z_1^2 + 2z_1z_3 + 2z_3^2 - 2z_2^2 - 2z_1z_3 - 4z_3^2 -$$

$$-4z_2z_3 = \frac{1}{2}z_1^2 - 2z_2^2 - 2z_3^2 - 4z_2z_3.$$

Теперь избавимся от произведений различных переменных, содержащих z_2:

$$t_1 = z_1,\ t_2 = -2z_2 - 2z_3,\ t_3 = z_3,$$

откуда получаем линейное преобразование

$$z_1 = t_1,\ z_2 = -\frac{1}{2}t_2 - t_3, z_3 = t_3$$

с матрицей

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подставляя выражения для z_1, z_2, z_3 в квадратичную форму $f_2(z_1,z_2,z_3)$, получим

$$f_3(t_1,t_2,t_3) = \frac{1}{2}t_1^2 - 2\left(-\frac{1}{2}t_2 - t_3\right)^2 - 2t_3^2 -$$

$$-4\left(-\frac{1}{2}t_2 - t_3\right)t_3 = \frac{1}{2}t_1^2 - \frac{1}{2}t_2^2 - 2t_2t_3 -$$

$$-2t_3^2 - 2t_3^2 + 2t_2t_3 + 4t_3^2 = \frac{1}{2}t_1^2 - \frac{1}{2}t_2^2.$$

Полученная квадратичная форма $f_3(t_1,t_2,t_3)$ является каноническим видом квадратичной формы $f(x_1,x_2,x_3)$.

(1) Найдем нормальный вид $f(x_1,x_2,x_3)$ над полем $\mathbb{R}$. Для этого сделаем замену переменных

$$u_1 = (1/\sqrt{2})t_1,\ u_2 = (1/\sqrt{2})t_2,\ u_3 = t_3.$$

Находим обратное линейное преобразование переменных

$$t_1 = \sqrt{2}u_1,\ t_2 = \sqrt{2}u_2,\ t_3 = u_3$$

с матрицей

$$A_4 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подставляя t_1, t_2, t_3 в квадратичную форму $f_3(t_1,t_2,t_3)$, получим

$$f_4(u_1,u_2,u_3) = u_1^2 - u_2^2.$$

Эта квадратная форма будет нормальным видом квадратичной формы $f(x_1,x_2,x_3)$ над $\mathbb{R}$. Матрицей линейного преобразования переменных будет матрица

$$T = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Невырожденное линейное преобразование переменных, приводящее $f(x_1,x_2,x_3)$ к нормальному виду над полем $\mathbb{R}$ имеет вид:

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}u_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}u_2 + 2u_3,\ x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}u_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}u_2,\ x_3 = u_3.$$

(2) Для нахождения нормального вида квадратичной формы $f(x_1,x_2,x_3)$ над полем $\mathbb{C}$, сделаем следующую замену переменных:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}t_1,\ u_2 = \frac{1}{\sqrt{-2}}t_2, u_3 = t_3,$$

откуда получим линейное преобразование переменных

$$t_1 = \sqrt{2}u_1,\ t_2 = \sqrt{-2}u_2 = i\sqrt{2}u_2, t_3 = u_3$$

с матрицей

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подставляя t_1, t_2, t_3 в квадратичную форму $f_3(t_1,t_2,t_3)$, получим квадратичную форму

$$f_4(u_1,u_2,u_3) = u_1^2 + u_2^2,$$

которая и является нормальным видом $f(x_1,x_2,x_3)$ над полем $\mathbb{C}$. Матрица

$$T_1 = A_1A_2A_3B = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & i\frac{2}{\sqrt{2}} & 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -i\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

дает линейное преобразование переменных

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}u_1 + i\frac{\sqrt{2}}{2}u_2 + 2u_3,\ x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}u_1 - i\frac{\sqrt{2}}{2}u_2,\ x_3 = u_3,$$

которое приводит квадратичную форму $f(x_1,x_2,x_3)$ к нормальному виду над полем $\mathbb{C}$.

Ответ: $\mathbb{R} : f_4(u_1,u_2,u_3) = u_1^2 - u_2^2$,

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}u_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}u_2 + 2u_3,\ x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}u_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}u_2,\ x_3 = u_3.$$

$$\mathbb{C} : f_4(u_1,u_2,u_3) = u_1^2 + u_2^2,$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}u_1 + i\frac{\sqrt{2}}{2}u_2 + 2u_3,\ x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}u_1 - i\frac{\sqrt{2}}{2}u_2,\ x_3 = u_3.$$

$\boxtimes$

Пример 8.4. Найдите линейное преобразование переменных с ортогональной матрицей, которое квадратичную форму $f(x_1, x_2) = -2x_1^2 - 4x_2^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2$ приводит к каноническому виду. Сделайте проверку.

□ Запишем матрицу квадратичной формы
$$A = \begin{pmatrix} -2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -4 \end{pmatrix}.$$

Пусть V есть двухмерное евклидово пространство с ортонормированным базисом $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$. Обозначим через f тот линейный оператор пространства V, который в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ имеет матрицу A. Так как матрица A симметрическая, то оператор f является самосопряженным и в пространстве V существует базис из собственных векторов оператора f. Матрица перехода от базиса $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ к ортонормированному базису из собственных векторов оператора f будет матрицей искомого линейного преобразования переменных.

Найдем собственные значения оператора f.
$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -4-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (-2-\lambda)(-4-\lambda) - 3 = \lambda^2 + 6\lambda + 5.$$
Из уравнения $\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0$, находим собственные значения $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -5$.

Найдем собственные векторы, принадлежащие собственному значению $\lambda_1 = -1$. Пусть $\bar{x} = \alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2$ такой вектор. Тогда
$$(\alpha_1\ \alpha_2)(A - \lambda_1 E) = (0\ 0),$$
$$(\alpha_1\ \alpha_2)\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 \end{pmatrix} = (0\ 0),$$
откуда
$$\begin{cases} -\alpha_1 + \sqrt{3}\alpha_2 = 0, \\ \sqrt{3}\alpha_1 - 3\alpha_2 = 0. \end{cases}$$
Решая систему, найдем $\alpha_1 = \sqrt{3}\alpha_2$, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$. Следова-

тельно, множество собственных векторов, принадлежащих собственному значению $\lambda_1 = -1$ есть

$$H_{-1} = \{\bar{x} = \sqrt{3}\alpha_2\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 | \alpha_2 \in \mathbb{R}^*\}.$$

Выберем один из векторов $\bar{a}_1 = \sqrt{3}\bar{e}_1 + \bar{e}_2$ при $\alpha_2 = 1$.

Аналогично находим множество собственных векторов, принадлежащих собственному значению $\lambda_2 = -5$

$$H_{-5} = \{\bar{x} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\alpha_2\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 | \alpha_2 \in \mathbb{R}^*\},$$

и выбираем один из векторов $\bar{a}_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{e}_1 + \bar{e}_2$ при $\alpha_2 = 1$.

Так как собственные векторы $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ принадлежат разным собственным значениям, то они линейно независимы и в двухмерном пространстве V образуют базис. Так как

$$(\bar{a}_1, \bar{a}_2) = \left(\sqrt{3}\bar{e}_1 + \bar{e}_2, -\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{e}_1 + \bar{e}_2\right) =$$

$$= \left(\sqrt{3}\bar{e}_1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{e}_1\right) + \left(\bar{e}_2, -\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{e}_1\right) + \left(\sqrt{3}\bar{e}_1, \bar{e}_2\right) +$$

$$+ (\bar{e}_2, \bar{e}_2) = -(\bar{e}_1, \bar{e}_1) - \frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{e}_2, \bar{e}_1) + \sqrt{3}(\bar{e}_1, \bar{e}_2) +$$

$$+(\bar{e}_2, \bar{e}_2) = -1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 0 + \sqrt{3} \cdot 0 + 1 = 0,$$

то базис $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ ортогональный.

Нормируем векторы $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$:

$$\bar{b}_1 = \frac{\bar{a}_1}{\|\bar{a}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3+1}}\left(\sqrt{3}\bar{e}_1 + \bar{e}_2\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{e}_1 + \frac{1}{2}\bar{e}_2,$$

$$\bar{b}_2 = \frac{\bar{a}_2}{\|\bar{a}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}+1}}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{e}_1 + \bar{e}_2\right) = -\frac{1}{2}\bar{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{e}_2.$$

Векторы $\bar{b}_1$ и $\bar{b}_2$ образуют ортонормированный базис евклидова пространства V, состоящий из собственных векторов оператора f.

Матрица перехода от базиса $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ к базису $\bar{b}_1, \bar{b}_2$

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

будет ортогональной. Действительно,

$$T \cdot T^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Линейное преобразование переменных с матрицей T

$$y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2, \ y_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2$$

является искомым.

Проверка. Линейное преобразование переменных, обратное найденному, будет иметь матрицу

$$T^{-1} = T^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix},$$

откуда

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2, \ x_2 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_2.$$

Тогда

$$f(x_1, x_2) = -2x_1^2 - 4x_2^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 =$$

$$= -2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2\right)^2 - 4\left(\frac{1}{2}y_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_2\right)^2 +$$

$$+2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2\right)\left(\frac{1}{2}y_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_2\right) =$$

$$= -2\left(\frac{3}{4}y_1^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}y_1y_2 + \frac{1}{4}y_2^2\right) - 4\left(\frac{1}{4}y_1^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_1y_2 + \frac{3}{4}y_2^2\right) +$$

$$+2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}y_1^2 - \frac{1}{4}y_1y_2 + \frac{3}{4}y_1y_2 - \frac{\sqrt{3}}{4}y_2^2\right) =$$

$$= -\frac{3}{2}y_1^2 + \sqrt{3}y_1y_2 - \frac{1}{2}y_2^2 - y_1^2 - 2\sqrt{3}y_1y_2 - 3y_2^2 +$$
$$+\frac{3}{2}y_1^2 + \sqrt{3}y_1y_2 - \frac{3}{2}y_2^2 = -y_1^2 - 5y_2^2.$$

Ответ: $y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2,\ y_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2.$ ⊠

Пример 8.5. Укажите множество значений λ, при которых действительная квадратичная форма

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + \lambda x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3$$

является: а) положительно определенной; б) отрицательно определенной.

☐ Составим матрицу квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ \lambda & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица A имеет три главных минора

$$\Delta_1 = |1| = 1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - \lambda^2,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ \lambda & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \lambda - \lambda - \lambda^2 = -\lambda^2.$$

а) По критерию Сильвестра квадратичная форма является положительно определенной, если все главные миноры матрицы квадратичной формы положительны

$$\begin{cases} \Delta_1 > 0, \\ \Delta_2 > 0, \\ \Delta_3 > 0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} 1 > 0, \\ \lambda - \lambda^2 > 0, \\ -\lambda^2 > 0. \end{cases}$$

Решая систему неравенств, получим $\lambda \in \emptyset$.

б) По критерию Сильвестра квадратичная форма является отрицательно определенной, если все главные миноры нечетного порядка отрицательны, а все миноры четного порядка положительны.

$$\begin{cases} \Delta_1 < 0, \\ \Delta_2 > 0, \\ \Delta_3 < 0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} 1 < 0, \\ \lambda - \lambda^2 > 0, \\ -\lambda^2 < 0. \end{cases}$$

Так как первое неравенство системы не выполняется при любом $\lambda \in \mathbb{R}$, то система решений не имеет: $\lambda \in \emptyset$.

Ответ: а) $\emptyset$; б) $\emptyset$. ⊠

8.3 Индивидуальные задания

1 Найдите ранг квадратичной формы $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$.

1.1 $x_1^2 + 2x_1x_2 - x_3^2 - 4x_3x_4$.
1.2 $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4$.
1.3 $x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + x_2^2 + 2x_2x_3$.
1.4 $x_1^2 + x_1x_2 + x_3x_4$.
1.5 $2x_1^2 + 4x_1x_2 - x_3^2 + x_1x_3 + x_4^2 - x_2x_4$.
1.6 $x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_3x_4 + x_4^2$.
1.7 $2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$.
1.8 $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_3x_4 - 2x_4^2$.
1.9 $-x_1^2 + 5x_3^2 + 8x_4^2 + 8x_2x_3 - 4x_2x_4$.
1.10 $x_1^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_3 - 4x_1x_4 + 2x_2x_4$.
1.11 $x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 - x_1x_4 + 2x_3x_4$.
1.12 $x_1^2 + x_3^2 - 2x_4^2 + x_1x_2 - 2x_2x_3$.
1.13 $-2x_1^2 + x_3^2 - x_4^2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_4 + 8x_3x_4$.
1.14 $x_1^2 - 3x_2^2 - 4x_4^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_4 + x_3x_4$.
1.15 $-x_1^2 + x_3^2 - x_4^2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3 + 6x_3x_4$.

2 Используя метод Лагранжа, найдите канонический

вид квадратичной формы $f(x_1,x_2,x_3)$. Укажите невырожденное линейное преобразование переменных, приводящее к каноническому виду. Сделайте проверку.

2.1 $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.
2.2 $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$.
2.3 $x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.
2.4 $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_3 - 4x_1x_2$.
2.5 $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$.
2.6 $2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3$.
2.7 $2x_1^2 + 6x_2^2 - 4x_3^2 - 2x_1x_3 + 4x_1x_2 - 8x_2x_3$.
2.8 $2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$.
2.9 $3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.
2.10 $5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_1x_2 - 3x_3^2 - 2x_2x_3$.
2.11 $3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$.
2.12 $-2x_3^2 + x_1^2 + 2x_1x_3 - 6x_1x_2$.
2.13 $x_1^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3$.
2.14 $2x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.
2.15 $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

3 Используя метод Лагранжа, приведите квадратичную форму $f(x_1,x_2,x_3)$ к нормальному виду над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. Укажите линейное преобразование переменных, приводящее к этому виду.

3.1 $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.
3.2 $2x_1x_3 - 4x_2x_3$.
3.3 $2x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3$.
3.4 $-4x_1x_2 + 2x_1x_3$.
3.5 $x_1x_2 - 4x_2x_3 + 6x_1x_3$.
3.6 $x_1x_2 + x_1x_3 + 4x_2x_3$.
3.7 $-2x_1x_3 + x_2x_3$.

3.8 $x_1x_3 - 2x_2x_3$.
3.9 $2x_1x_3 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3$.
3.10 $-x_1x_2 + 6x_2x_3$.
3.11 $x_1x_2 + x_2x_3$.
3.12 $-4x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_2x_3$.
3.13 $-x_1x_2 + 4x_2x_3$.
3.14 $2x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3$.
3.15 $4x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2x_3$.

4 Найдите линейное преобразование переменных с ортогональной матрицей, приводящее к каноническому виду квадратичную форму $f(x_1, x_2)$. Сделайте проверку.

4.1 $5x_1^2 + 8x_2^2 + 4x_1x_2$.
4.2 $3x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2$.
4.3 $4x_2^2 + 2\sqrt{5}x_1x_2$.
4.4 $5x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2$.
4.5 $2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2$.
4.6 $x_1^2 + 2\sqrt{2}x_1x_2$.
4.7 $x_1^2 - x_2^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2$.
4.8 $-3x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_1x_2$.
4.9 $2x_1^2 + 3x_2^2 + 2\sqrt{2}x_1x_2$.
4.10 $10x_1x_2$.
4.11 $4x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2$.
4.12 $x_1^2 + 3x_2^2 + 4\sqrt{2}x_1x_2$.
4.13 $-2\sqrt{2}x_1x_2$.
4.14 $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$.
4.15 $-x_1^2 + x_2^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2$.

5 Укажите множество значений λ, при которых действительная квадратичная форма $f(x_1,x_2,x_3)$ является:

а) положительно определенной; б) отрицательно определенной.

5.1 $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2\lambda x_1x_3 - 2x_2x_3.$

5.2 $2x_1^2 + \lambda x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3.$

5.3 $\lambda x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$

5.4 $\lambda x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4\lambda x_1x_3 + 6x_2x_3.$

5.5 $x_1^2 - \lambda x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2\lambda x_2x_3.$

5.6 $\lambda x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2\lambda x_1x_3 - 2x_2x_3.$

5.7 $2\lambda x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2\lambda x_2x_3.$

5.8 $2x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$

5.9 $4x_1^2 + \lambda x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3.$

5.10 $\lambda x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2\lambda x_1x_3 + 4x_2x_3.$

5.11 $\lambda x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4\lambda x_2x_3.$

5.12 $x_1^2 + \lambda x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2\lambda x_1x_3.$

5.13 $-\lambda x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 4\lambda x_1x_2 + 6x_2x_3.$

5.14 $-2\lambda x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2\lambda x_1x_3 + 4x_2x_3.$

5.15 $2x_1^2 - \lambda x_2^2 + x_3^2 - 6\lambda x_1x_2 + 2x_2x_3.$

Литература

1. *Беняш-Кривец, В. В.* Лекции по алгебре: группы, кольца, поля: учебное пособие для студентов математических специальностей / В. В. Беняш-Кривец, О. В. Мельников. — Минск: БГУ, 2008.
2. *Бузланов, А. В.* Алгебра и теория чисел. Линейная алгебра : практическое пособие по выполнению лабораторных работ для студентов математических специальностей вузов / А. В. Бузланов, С. Ф. Каморников, В. С. Монахов. — Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2008.
3. *Бурдун, А. А.* Сборник задач по алгебре и геометрии / А. А. Бурдун, Е. А. Мурашко, М. М. Толкачев, А. С. Феденко. — Минск: Университетское, 1999.
4. *Кострикин, А. И.* Введение в алгебру: в 3 ч. / А. И. Кострикин. — М.: Физматлит, 2004.
5. *Милованов, М. В.* Алгебра и аналитическая геометрия / М. В. Милованов, Р. И. Тышкевич, А. С. Феденко. — Минск: Амалфея, 2001.
6. *Монахов, В. С.* Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. — Минск: Вышэйш. шк., 2006.
7. *Монахов, В. С.* Алгебра и теория чисел: практикум: учеб. пособие. В 2 ч. Ч. 1 / В. С. Монахов, А. В. Бузланов. — Минск: Изд. центр БГУ, 2007.
8. Сборник задач по алгебре / под ред. Кострикина А.И. — М.: Физматлит., 2001.
9. *Шнеперман, Л. Б.* Курс алгебры и теории чисел в задачах и упражнениях: в 2 ч. / Л. Б. Шнеперман. — Минск: Вышэйш. шк., 1986–1987.
10. *Шнеперман, Л. Б.* Сборник задач по алгебре и теории чисел / Л. Б. Шнеперман. — Минск: Вышэйш. шк., 2008.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Бузланов Александр Васильевич
Монахов Виктор Степанович
Подгорная Виктория Валерьевна
Сохор Ирина Леонидовна

ГЕОМЕТРИЯ И АЛГЕБРА. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

ПРАКТИКУМ

в четырех частях
для студентов математических
специальностей вузов.
Часть 4

В авторской редакции

Отпечатано с оригинала-макета на ризографе
учреждения образования
"Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины"
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104