Министерство Образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

А. В. Бузланов, В. С. Монахов, В. В. Подгорная,
И. Л. Сохор

ГЕОМЕТРИЯ И АЛГЕБРА. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

ПРАКТИКУМ
в четырех частях
для студентов математических
специальностей вузов.
Часть 3

Гомель 2016

УДК
ББК
Б

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования "Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины"

Бузланов А. В.

Б Геометрия и алгебра. Линейная алгебра : практикум : в 4 ч. / А. В. Бузланов [и др.].; Мин-во обр. РБ, Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины. — Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины. — 2016. — Ч. 3. — 46 с.

Практикум включает разделы линейной алгебры. По каждой теме изложены элементы теории, приведены образцы решения типовых задач, предложены 15 вариантов индивидуальных заданий. Практикум адресован студентам математических специальностей вузов. Может быть использован студентами других специальностей, изучающими вопросы алгебры.

Третья часть практикума содержит разделы "Строение матрицы линейного оператора"; "Евклидовы пространства".

УДК
ББК

© А. В. Бузланов, В. С. Монахов, В. В. Подгорная, И. Л. Сохор, 2016
© УО "ГГУ им. Ф. Скорины", 2016

5 СТРОЕНИЕ МАТРИЦЫ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

5.1 Элементы теории

5.1.1 Подобие матриц линейного оператора

Матрицы A и B, принадлежащие линейному пространству $M_n(P)$, называются *подобными*, если существует невырожденная матрица $T \in M_n(P)$ такая, что

$$B = TAT^{-1}.$$

Из теоремы 4.5 следует, что матрицы линейного оператора n-мерного линейного пространства V над полем P в разных базисах подобны, причем матрица T в этом случае совпадает с матрицей перехода от одного базиса к другому. Таким образом, каждому линейному оператору линейного пространства V соответствует класс подобных матриц, которые представляют линейный оператор в различных базисах.

Следующие три леммы дают необходимые признаки подобия матриц.

Лемма 5.1. *Если матрицы A, $B \in M_n(P)$ подобны, то их определители равны.*

Сумма всех элементов главной диагонали квадратной матрицы A называется *следом матрицы*. След матрицы A обозначается $tr\ A$.

Лемма 5.2. *Если матрицы A, $B \in M_n(P)$ подобны, то $tr\ A = tr\ B$.*

Пусть матрица $A = (a_{ij}) \in M_n(P)$, λ — некоторая переменная. *Характеристическим многочленом матрицы A*

ГГУ им. Ф. Скорины

называется определитель

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}.$$

Лемма 5.3. *Характеристические многочлены подобных матриц равны.*

5.1.2 Собственные векторы линейного оператора

Так как линейный оператор представлен в разных базисах линейного пространства разными матрицами, то возникает задача отыскания такого базиса, в котором матрица линейного оператора имеет наиболее простой вид. Решение этой задачи тесно связано с понятием собственного вектора линейного оператора.

Пусть f — линейный оператор линейного пространства V над полем P. Ненулевой вектор $\bar{x} \in V$ называется *собственным вектором линейного оператора* f, если $f(\bar{x}) = \lambda\bar{x}$ для некоторого элемента $\lambda \in P$. Элемент λ называется в этом случае *собственным значением оператора* f. Способ нахождения собственных значений линейного оператора дает следующая теорема.

Теорема 5.4. *Собственными значениями линейного оператора f конечномерного линейного пространства V над полем P являются все, принадлежащие полю P, корни характеристического многочлена матрицы оператора f и только они.*

Пусть $\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \dots,\ \bar{e}_n$ есть базис линейного пространства V над полем P, $A \in M_n(P)$ есть матрица линейного

ПГУ им. Ф. Скорины

оператора f в этом базисе и $\lambda \in P$ — собственное значение оператора f. Если $\bar{x} = \alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + \ldots + \alpha_n\bar{e}_n$ есть собственный вектор, принадлежащий собственному значению λ, то

$$(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)(A - \lambda E) = (0\,0\ldots 0).$$

Переходя от этого матричного уравнения к системе уравнений относительно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и решая ее, можем найти все собственные векторы, принадлежащие собственному значению λ.

5.1.3 Диагонализируемость линейного оператора

Линейный оператор f n-мерного линейного пространства V называется *диагонализируемым*, если в некотором базисе пространства V матрица оператора f имеет диагональный вид

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Следующая теорема является основной при исследовании вопроса о диагонализируемости линейного оператора.

Теорема 5.5. *Пусть f есть линейный оператор конечномерного линейного пространства V над полем P. Оператор f диагонализируем тогда и только тогда, когда в пространстве V существует базис из собственных векторов оператора f.*

Если $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ есть базис из собственных векторов пространства V, принадлежащих собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, соответственно, то матрица линейного

ГГУ им. Ф. Скорины

оператора f в этом базисе имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

причем среди собственных значений λ_1, λ_2, $\dots$, λ_n могут быть одинаковые. Очевидно также, что если хотя бы один из корней характеристического многочлена линейного оператора не принадлежит полю P, то оператор f не диагонализируем.

При построении базиса из собственных векторов полезна следующая теорема.

Теорема 5.6. *Собственные векторы линейного оператора, принадлежащие различным собственным значениям, линейно независимы.*

Следствие 5.6.1. *Пусть f — линейный оператор линейного пространства V над полем P. Если все корни характеристического многочлена оператора f принадлежат полю P и различны, то оператор f диагонализируем.*

5.1.4 Жорданова нормальная форма матрицы

Однако не всегда матрицу линейного оператора можно привести к диагональному виду. В таком случае наиболее простым видом матрицы линейного оператора является ее жорданова нормальная форма.

Пусть P — поле, $a \in P$. *Клеткой Жордана порядка k для элемента $a \in P$* называется квадратная матрица порядка k следующего вида

$$J_k(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Жордановой матрицей или *матрицей Жордана* называется клеточно-диагональная квадратная матрица B порядка n с клетками Жордана на главной диагонали

$$B = \begin{pmatrix} J_{k_1}(a) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(b) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & J_{k_t}(c) \end{pmatrix},$$

где $k_1 + k_2 + \ldots + k_t = n$.

Если A есть произвольная квадратная матрица над полем P и B — подобная ей матрица Жордана над полем P, то матрицу B называют *жордановой нормальной формой матрицы* A.

Условия существования жордановой нормальной формы дает следующая теорема.

Теорема 5.7. *Для существования жордановой нормальной формы квадратной матрицы порядка n над полем P необходимо и достаточно, чтобы характеристический многочлен этой матрицы имел в поле P n корней с учетом их кратности.*

ПГУ им. Ф. Скорины

5.1.5 Приведение матрицы к жордановой нормальной форме

Пусть A — квадратная матрица порядка n над полем P. При нахождении жордановой нормальной формы матрицы A будем руководствоваться следующими правилами.

1 Если хотя бы один из корней характеристического многочлена матрицы A не принадлежит полю P, то по теореме 5.7 матрица A жордановой нормальной формы не имеет.

2 Если $a \in P$ является корнем кратности 1 характеристического многочлена матрицы A, то в жордановой нормальной форме ему соответствует только одна клетка Жордана порядка 1 вида $J_1(a) = (a)$.

3 Если $a \in P$ является корнем кратности $k > 1$ характеристического многочлена матрицы A, то в жордановой нормальной форме ему соответствует одна или несколько клеток Жордана, сумма порядков которых равна кратности k. Общее число клеток Жордана для элемента a можно определить с помощью формулы $l(a) = n - r(A - aE)$, где n — порядок матрицы A, $r(A - aE)$ — ранг матрицы $(A - aE)$.

4 Если информации об общем числе $l(a)$ клеток Жордана для корня a недостаточно для составления жордановой нормальной формы, можно определить число клеток Жордана порядка t для элемента a с помощью формулы $l_t(a) = r(A - aE)^{t+1} - 2r(A - aE)^t + r(A - aE)^{t-1}$, считая, что $(A - aE)^0 = E$.

5 Порядок расстановки клеток Жордана в жордановой нормальной форме значения не имеет.

ГГУ им. Ф. Скорины

5.2 Примеры решения задач

Пример 5.1. Найдите собственные векторы линейного оператора f, заданного в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ комплексного линейного пространства V матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$ Составим характеристический многочлен матрицы A

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2.$$

Находим корни характеристического многочлена в поле комплексных чисел.

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0,$$

$$D = 4 - 4 \cdot 2 = -4, \quad \sqrt{D} = \sqrt{-4} = \pm 2i.$$

$$\lambda_1 = \frac{2-2i}{2} = 1 - i, \quad \lambda_2 = \frac{2+2i}{2} = 1 + i.$$

Найденные числа λ_1 и λ_2 являются собственными значениями линейного оператора f в поле $\mathbb{C}$.

Найдем собственные векторы линейного оператора f, принадлежащие собственному значению $\lambda_1 = 1 - i$. Пусть $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2$ есть искомый собственный вектор. Тогда

$$(x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} 1-(1-i) & -1 \\ 1 & 1-(1-i) \end{pmatrix} = (0 \quad 0),$$

$$(x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} = (0 \quad 0),$$

откуда получаем систему

$$\begin{cases} ix_1 + x_2 = 0, \\ -x_1 + ix_2 = 0. \end{cases}$$

ГГУ имени Ф. Скорины

Решаем систему методом Гаусса
$$\left(\begin{array}{cc|c} i & 1 & 0 \\ -1 & i & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{II+I\cdot(-i)} \left(\begin{array}{cc|c} i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$
Соответствующая ступенчатая система $ix_1+x_2=0$ имеет бесконечно много решений: $x_1=ix_2$ и $x_2\in\mathbb{C}$.

Таким образом, множество собственных векторов, принадлежащих собственному значению $\lambda_1=1-i$, имеет вид
$$H_{1-i}=\{\bar{x}=i\alpha\bar{e}_1+\alpha\bar{e}_2|\alpha\in\mathbb{C}^*\}, \text{где } \mathbb{C}^*=\mathbb{C}\setminus\{0\}.$$
Аналогично находим множество собственных векторов, принадлежащих собственному значению $\lambda_2=1+i$.
$$H_{1+i}=\{\bar{x}=-i\alpha\bar{e}_1+\alpha\bar{e}_2|\alpha\in\mathbb{C}^*\}.$$
Ответ:
$$H_{1-i}=\{\bar{x}=i\alpha\bar{e}_1+\alpha\bar{e}_2|\alpha\in\mathbb{C}^*\},$$
$$H_{1+i}=\{\bar{x}=-i\alpha\bar{e}_1+\alpha\bar{e}_2|\alpha\in\mathbb{C}^*\}.$$

⊠

Пример 5.2. Найдите собственные векторы линейного оператора f, заданного в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ действительного линейного пространства V матрицей
$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
□ Составим характеристический многочлен матрицы A и найдем его действительные корни.
$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ -2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}=$$
$$=(2-\lambda)\lambda(1+\lambda)+2+4-4\lambda-2(2-\lambda)-(1+\lambda)=$$
$$=(2-\lambda)(\lambda+\lambda^2)+6-4\lambda-4+2\lambda-1-\lambda=$$
$$=2\lambda-\lambda^2+2\lambda^2-\lambda^3+1-3\lambda=-\lambda^3+\lambda^2-\lambda+1=$$

ГГУ им. Ф. Скорины

$$= -\lambda^2(\lambda - 1) - (\lambda - 1) = (\lambda - 1)(-\lambda^2 - 1).$$

Из уравнения $(\lambda - 1)(-\lambda^2 - 1) = 0$ находим только один корень $\lambda_1 = 1$, принадлежащий полю $\mathbb{R}$. Следовательно, линейный оператор f имеет над полем $\mathbb{R}$ одно собственное значение $\lambda = 1$.

Пусть $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3$ есть собственный вектор, принадлежащий собственному значению $\lambda = 1$. Тогда

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Решаем систему методом Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[III + I\cdot(-2)]{II+I)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{III+II\cdot 2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Соответствующая ступенчатая система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ -x_3 = 0 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений: $x_1 = -x_2$, x_2 — любое действительное число, $x_3 = 0$.

Таким образом, множество всех собственных векторов, принадлежащих собственному значению $\lambda = 1$, имеет вид

$$H_1 = \{\bar{x} = -\alpha\bar{e}_1 + \alpha\bar{e}_2 | \alpha \in \mathbb{R}^*\}.$$

ГГУ им. Ф. Скорины

Ответ: $H_1 = \{\bar{x} = -\alpha\bar{e}_1 + \alpha\bar{e}_2 | \alpha \in \mathbb{R}^*\}$. ⊠

Пример 5.3. Докажите, что оператор f действительного линейного пространства V, имеющий в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$$

диагонализируем. Найдите базис пространства V, в котором матрица оператора f имеет диагональный вид. Укажите этот вид.

□ Составим характеристический многочлен матрицы A и найдем его корни.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4.$$

Из уравнения $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$ находим $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$. Так как все корни характеристического многочлена принадлежат полю $\mathbb{R}$ и различны, то по следствию 5.6.1 оператор f диагонализируем над полем $\mathbb{R}$. Базис, в котором матрица линейного оператора имеет диагональный вид, состоит из собственных векторов оператора f.

Найдем собственные векторы $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2$, принадлежащие собственному значению $\lambda_1 = 1$.

$$(x_1 \quad x_2) \begin{pmatrix} 3-1 & -1 \\ -2 & 2-1 \end{pmatrix} = (0 \quad 0),$$

откуда

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 0, \\ -x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

Решая систему методом Гаусса, найдем $x_1 = x_2$, $x_2 \in \mathbb{R}$.

Таким образом,

$$H_1 = \{\bar{x} = x_2\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 | x_2 \in \mathbb{R}^*\}.$$

ГГУ им. Ф. Скорины

Выберем один из собственных векторов. Например, при $x_2 = 1$ получим $\bar{a}_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$.

Аналогично находим множество собственных векторов, принадлежащих собственному значению $\lambda_2 = 4$,
$$H_4 = \{\bar{x} = -2x_2\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 | x_2 \in \mathbb{R}^*\}.$$
Выбираем один из собственных векторов $\bar{a}_2 = -2\bar{e}_1 + \bar{e}_2$.

По теореме 5.6 собственные векторы $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ линейно независимы. Поскольку $\dim V = 2$, то векторы $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ образуют базис пространства V.

Находим матрицу оператора f в базисе $\bar{a}_1, \bar{a}_2$. Так как
$$f(\bar{a}_1) = \lambda_1\bar{a}_1 = 1 \cdot \bar{a}_1 + 0 \cdot \bar{a}_2,$$
$$f(\bar{a}_2) = \lambda_2\bar{a}_2 = 0 \cdot \bar{a}_1 + 4 \cdot \bar{a}_2,$$
то в базисе $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ линейный оператор f имеет матрицу
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$
Ответ: $\bar{a}_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$, $\bar{a}_2 = -2\bar{e}_1 + \bar{e}_2$ — базис, в котором матрица оператора f имеет вид
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$
⊠

Пример 5.4. Можно ли матрицу A линейного оператора f векторного пространства V над полем $\mathbb{R}$ привести к диагональному виду путем перехода к новому базису? Найдите этот базис и соответствующую диагональную матрицу.
$$1\ A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}; \quad 2\ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$
☐ 1 Составим характеристический многочлен матрицы A

ГГУ им. Ф. Скорины

и найдем его корни.

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (4-\lambda)(-2-\lambda)+9 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2.$$

Из уравнения $(\lambda-1)^2 = 0$ находим $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Выясним, можно ли составить базис пространства V из собственных векторов. Для этого найдем множество собственных векторов $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2$, принадлежащих собственному значению $\lambda = 1$.

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4-1 & -3 \\ 3 & -2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = 0, \\ -3x_1 - 3x_2 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, находим $x_1 = -x_2$, $x_2 \in \mathbb{R}$.

Таким образом, искомое множество собственных векторов

$$H_1 = \{\bar{x} = -\alpha\bar{e}_1 + \alpha\bar{e}_2 | \alpha \in \mathbb{R}^*\}.$$

Так как каждый из собственных вектор $\bar{x} = \alpha(-\bar{e}_1 + \bar{e}_2)$ линейно выражается через вектор $\bar{a}_1 = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2$, то любые два собственных вектора линейно зависимы по теореме 1.1. Поэтому в пространстве V размерности 2 нельзя найти два линейно независимых собственных вектора. Следовательно, в пространстве V нет базиса из собственных векторов и, по теореме 5.5, матрица A не приводится к диагональному виду.

ГГУ имени Ф. Скорины

2 Составим характеристический многочлен матрицы A

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 11\lambda + 5.$$

Решая уравнение

$$-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 11\lambda + 5 = 0,$$

находим корни характеристического многочлена $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Находим собственные векторы $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3$, принадлежащие собственному значению $\lambda_1 = 5$.

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ -x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{I \leftrightarrow III} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[III+I\cdot 3]{II+I}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[II\cdot(-\frac{1}{4})]{III+II\cdot(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Пусть x_1 и x_2 — главные неизвестные, x_3 — свободная неизвестная. Тогда $x_1 = x_3$, $x_2 = -x_3$, x_3 — любое действительное число. Множество всех собственных векто-

ГГУ им. Ф. Скорины

ров, принадлежащих собственному значению $\lambda_1 = 5$, имеет вид $H_5 = \{\bar{x} = x_3\bar{e}_1 - x_3\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3 | x_3 \in \mathbb{R}^*\}$. Выберем один из собственных векторов. При $x_3 = 1$ получим $\bar{a}_1 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_3$.

Находим собственные векторы $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3$, принадлежащие собственному значению $\lambda_2 = 1$.

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что система равносильна уравнению

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0.$$

Пусть x_1 — главная неизвестная, x_2 и x_3 — свободные неизвестные. Тогда $x_1 = x_2 - 2x_3$, x_2 и x_3 — любые действительные числа и $H_1 = \{\bar{x} = (x_2 - 2x_3)\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + + x_3\bar{e}_3 | x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ и ${x_2}^2 + {x_3}^2 \neq 0\}$. Преобразование

$$\bar{x} = (x_2 - 2x_3)\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3 = (x_2\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2) + \\ +(-2x_3\bar{e}_1 + x_3\bar{e}_3) = x_2(\bar{e}_1 + \bar{e}_2) + x_3(-2\bar{e}_1 + \bar{e}_3)$$

показывает, что любой собственный вектор линейно выражается через векторы $\bar{a}_2 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$ и $\bar{a}_3 = -2\bar{e}_1 + \bar{e}_3$.

Найдем базис подпространства $L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3)$. Для этого найдем ранг матрицы, составленной из координат векторов $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[III+I\cdot 2]{II+I\cdot(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{III+II} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

ГГУ им. Ф. Скорины

Таким образом, $\dim L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) = 3$ и $L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) = V$, причем $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ — базис линейного пространства V. По теореме 5.5 линейный оператор f диагонализируем над полем P, а значит, при переходе к базису $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ матрица линейного оператора f примет диагональный вид

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: 1) нет; 2) да, базис $\bar{a}_1 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_3$, $\bar{a}_2 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$, $\bar{a}_3 = -2\bar{e}_1 + \bar{e}_3$ и диагональная матрица

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxtimes$

Пример 5.5. Над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ найдите жорданову нормальную форму матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\square$ В примере 5.2 для матрицы A составлен характеристический многочлен $|A - \lambda E| = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$. В поле действительных чисел этот многочлен имеет только один корень $\lambda = 1$ и по теореме 5.7 матрица A не имеет жордановой нормальной формы над полем $\mathbb{R}$.

Ответ: жордановой нормальной формы нет. $\boxtimes$

Пример 5.6. Над полем действительных чисел найдите жорданову нормальную форму матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

ГГУ им. Ф. Скорины

□ Составим характеристический многочлен матрицы A

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda) - 20 =$$
$$= 6 - 2\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 20 = \lambda^2 - 5\lambda - 14.$$

Находим корни характеристического многочлена в поле действительных чисел:

$$\lambda^2 - 5\lambda - 14 = 0,$$
$$D = 25 - 4 \cdot (-14) = 25 + 56 = 81, \ \lambda_1 = 7, \ \lambda_2 = -2.$$

По теореме 5.7 жорданова нормальная форма матрицы A над полем $\mathbb{R}$ существует. Так как корни характеристического многочлена имеют кратность 1, то в жордановой нормальной форме им соответствуют клетки Жордана порядка 1, а сама жорданова нормальная форма имеет следующий вид

$$B = \begin{pmatrix} J_1(7) & 0 \\ 0 & J_1(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. ⊠

Пример 5.7. Найдите нормальную жорданову форму матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 16 & -6 \\ 2 & 10 & -3 \\ 11 & 38 & -13 \end{pmatrix}$$

над полем действительных чисел.

□ Составим характеристический многочлен матрицы A

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 16 & -6 \\ 2 & 10-\lambda & -3 \\ 11 & 38 & -13-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (6-\lambda)(10-\lambda)(-13-\lambda) - 76 \cdot 6 - 33 \cdot 16 + 66(10-\lambda) +$$

ГГУ им. Ф. Скорины

$$+114(6-\lambda)+32(13+\lambda)=(60-16\lambda+\lambda^2)(-13-\lambda)-984+$$
$$+660-66\lambda+684-114\lambda+416+32\lambda=-\lambda^3+3\lambda^2-4.$$

Находим корни характеристического многочлена:

$$-\lambda^3+3\lambda^2-4=0,$$
$$\lambda_1=-1, \lambda_2=\lambda_3=2.$$

Так как все корни характеристического многочлена принадлежат полю $\mathbb{R}$, то искомая жорданова нормальная форма существует. Корню $\lambda_1=-1$ соответствует только одна клетка Жордана порядка 1. Для корня $\lambda_2=2$ ввиду его кратности 2 возможны два случая: либо две клетки Жордана порядка 1, либо одна клетка Жордана порядка 2. Число клеток Жордана для $\lambda_2=2$ вычислим по формуле $l(2)=n-r(A-2E)$, где $n=3$ — порядок матрицы A, $r(A-2E)$ — ранг матрицы $(A-2E)$.

$$A-2E=\begin{pmatrix}4 & 16 & -6\\ 2 & 8 & -3\\ 11 & 38 & -15\end{pmatrix}\xrightarrow[II\leftrightarrow III]{I\cdot(-\frac{1}{2})}\begin{pmatrix}-2 & -8 & 3\\ 11 & 38 & -15\\ 2 & 8 & -3\end{pmatrix}\longrightarrow$$

$$\xrightarrow[III+I]{II\cdot 2+III\cdot 11}\begin{pmatrix}-2 & -8 & 3\\ 0 & -12 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, r(A-2E)=2.$$

Отсюда $l(2)=3-2=1$, т. е. в жордановой нормальной форме матрицы A корню $\lambda_2=2$ соответствует одна клетка Жордана порядка 2.

Таким образом, искомая жорданова нормальная форма имеет вид

$$B=\begin{pmatrix}J_1(-1) & 0\\ 0 & J_2(2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

ГГУ им. Ф. Скорины

Ответ: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. $\boxtimes$

Пример 5.8. Над полем действительных чисел найдите жорданову нормальную форму матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

$\square$ Составим характеристический многочлен матрицы A

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6-\lambda & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1-\lambda & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8-\lambda \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по элементам третьего столбца

$$|A - \lambda E| = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ -2 & -6-\lambda & 13 \\ -1 & -4 & 8-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)((1-\lambda)(-6-\lambda)(8-\lambda) + 24 + 39 +$$

$$+3(-6-\lambda) + 52(1-\lambda) - 6(8-\lambda)) =$$

$$= (1-\lambda)((1-\lambda)(-48 - 2\lambda + \lambda^2) - 49\lambda + 49) =$$

$$= (1-\lambda)((1-\lambda)(-48 - 2\lambda + \lambda^2) + 49(1-\lambda)) =$$

$$= (1-\lambda)^2(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = (1-\lambda)^2(\lambda - 1)^2 = (\lambda - 1)^4.$$

Таким образом, $\lambda = 1$ является корнем кратности 4 для характеристического многочлена матрицы A.

Определим число клеток Жордана для $\lambda = 1$ по формуле $l(1) = n - r(A - 1E)$. Порядок матрицы A есть $n = 4$.

ГГУ ИМ. Ф. СКОРИНЫ

Вычислим $r(A-E)$.

$$A-E=\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[I\leftrightarrow IV]{III+I\cdot(-1)} \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 & 7 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{II+I\cdot(-2)} \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV+II\cdot 3} \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $r(A-E)=2$ и $l(1)=4-2=2$, т. е. жорданова нормальная форма матрицы A содержит 2 клетки Жордана. Однако, в такой ситуации остаются два возможных случая: либо обе эти клетки имеют порядок 2, либо одна клетка имеет порядок 1, а вторая порядок 3. Определим число клеток Жордана порядка 1 по формуле $l_1(1)=r(A-1\cdot E)^2-2r(A-1\cdot E)+r(A-1\cdot E)^0$. Так как $(A-1\cdot E)^0=E$ — единичная матрица порядка 4, то $r(A-1\cdot E)^0=r(E)=4$. Как показано выше, $r(A-1\cdot E)=2$. Вычислим $r(A-1\cdot E)^2$.

$$(A-1\cdot E)^2=\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \\ 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{IV+II\cdot(-1)\\ I\leftrightarrow II}]{III+I\cdot(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -6 \\ 3 & 9 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

ГГУ им. Ф. Скорины

$$\xrightarrow{II+I\cdot(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $r(A-1\cdot E)^2 = 1$ и $l_1(1) = 1-2\cdot 2+4 = 1$, т. е. жорданова нормальная форма содержит одну клетку Жордана порядка 1, а следовательно, вторая клетка Жордана имеет порядок 3. Итак, жорданова нормальная форма матрицы A имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} J_1(1) & 0 \\ 0 & J_3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ⊠

5.3 Индивидуальные задания

1 Даны матрицы A и B. Укажите, могут ли матрицы A и B быть подобными,:

1.1 – 1.5 используя определители матриц:

1.1 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1.2 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

ГГУ им. Ф. Скорины

1.3 $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

1.4 $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$

1.5 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$

1.6 – 1.10 используя след матрицы:

1.6 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -5 & 2 & 6 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$

1.7 $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -6 & 4 & 5 \\ 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 0 & 3 & 7 \\ 6 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$

1.8 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -6 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 6 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

1.9 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 6 & 3 & 8 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -7 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$

1.10 $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \\ 3 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$

1.11 – 1.15 используя характеристический многочлен матрицы:

ГГУ им. Ф. Скорины

1.11 $A=\begin{pmatrix}1&4\\2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1\\9&2\end{pmatrix}$.

1.12 $A=\begin{pmatrix}2&-3\\1&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-4\\5&2\end{pmatrix}$.

1.13 $A=\begin{pmatrix}-1&4\\1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&2\\2&4\end{pmatrix}$.

1.14 $A=\begin{pmatrix}6&-1\\29&-4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&2\\-4&3\end{pmatrix}$.

1.15 $A=\begin{pmatrix}-3&3\\4&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-5&1\\-2&4\end{pmatrix}$.

2 Найдите собственные векторы линейного оператора f, заданного в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ комплексного линейного пространства V матрицей A.

2.1 $A=\begin{pmatrix}1&-2\\2&-3\end{pmatrix}$. 2.2 $A=\begin{pmatrix}3&-2\\4&-1\end{pmatrix}$.

2.3 $A=\begin{pmatrix}0&-1\\2&0\end{pmatrix}$. 2.4 $A=\begin{pmatrix}1&-1\\-4&4\end{pmatrix}$.

2.5 $A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}$. 2.6 $A=\begin{pmatrix}4&-1\\1&2\end{pmatrix}$.

2.7 $A=\begin{pmatrix}-1&-2\\-1&0\end{pmatrix}$. 2.8 $A=\begin{pmatrix}-4&-5\\4&4\end{pmatrix}$.

2.9 $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$. 2.10 $A=\begin{pmatrix}1&1\\-2&3\end{pmatrix}$.

2.11 $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$. 2.12 $A=\begin{pmatrix}0&-1\\3&-2\end{pmatrix}$.

2.13 $A=\begin{pmatrix}3&2\\-2&-1\end{pmatrix}$. 2.14 $A=\begin{pmatrix}-1&4\\-2&3\end{pmatrix}$.

2.15 $A=\begin{pmatrix}0&1\\-2&-3\end{pmatrix}$.

ГГУ им. Ф. Скорины

3 Можно ли матрицу A линейного оператора f векторного пространства V над полем $\mathbb{C}$ из задания 2 привести к диагональному виду путем перехода к новому базису? В случае положительного ответа найдите этот базис и соответствующую диагональную матрицу.

4 Можно ли матрицу B линейного оператора φ действительного векторного пространства V привести к диагональному виду путем перехода к новому базису? Найдите этот базис и соответствующую диагональную матрицу.

4.1 $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. 4.2 $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

4.3 $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -12 & 5 & 12 \\ 10 & -3 & -9 \end{pmatrix}$. 4.4 $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

4.5 $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 4.6 $B = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 10 & 1 \end{pmatrix}$.

4.7 $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$. 4.8 $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4.9 $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 4.10 $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

4.11 $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$. 4.12 $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

4.13 $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. 4.14 $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

ГГУ им. Ф. Скорины

4.15 $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

5 Над полем действительных чисел найдите жорданову нормальную форму матриц A и B.

5.1 $$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

5.2 $$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -12 & 5 & 12 \\ 10 & -3 & -9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

5.3 $$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

5.4 $$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.5 $$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ГГУ им. Ф. Скорины

5.6 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$

5.7 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

5.8 $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

5.9 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

5.10 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

5.11 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

5.12 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

ГГУ им. Ф. Скорины

5.13 $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 1 \\ -1 & 0 & -17 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$

5.14 $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 & -7 \\ -3 & 0 & 3 & -7 \\ 3 & 1 & -2 & 7 \\ 3 & 1 & -3 & 8 \end{pmatrix}.$

5.15 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$

ГГУ им. Ф. Скорины

6 ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

6.1 Элементы теории

6.1.1 Определение евклидова пространства

Пусть V — действительное линейное пространство. Говорят, что на V задано *скалярное произведение*, если каждой паре векторов $\bar{a}$, $\bar{b} \in V$ поставлено в соответствие действительное число $(\bar{a}, \bar{b})$, причем выполняются следующие условия:

1) $(\bar{a},\bar{b}) = (\bar{b},\bar{a})$ для любых $\bar{a},\bar{b} \in V$;

2) $(\bar{a} + \bar{b},\bar{c}) = (\bar{a},\bar{c}) + (\bar{b},\bar{c})$ для любых $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in V$;

3) $(\lambda\bar{a}, \bar{b}) = \lambda(\bar{a},\bar{b})$ для любых $\bar{a}, \bar{b} \in V$ и любого $\lambda \in \mathbb{R}$;

4) $(\bar{a},\bar{a}) > 0$ для любого ненулевого вектора $\bar{a} \in V$.

Действительное линейное пространство с заданным на нем скалярным произведением называется *евклидовым пространством.*

Приведем примеры евклидовых пространств.

1 В действительном векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ для любого натурального n скалярное произведение вектора $\bar{x} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и вектора $\bar{y} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ задается равенством

$$(\bar{x}, \bar{y}) = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n.$$

С таким скалярным произведением $\mathbb{R}^n$ является евклидовым пространством.

2 Действительное линейное пространство $C_{[a,b]}$ всех непрерывных на $[a,b]$ функций становится евклидовым пространством, если скалярное произведение определить

ГГУ им. Ф. Скорины

равенством

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

для любых функций $f(x), g(x) \in C_{[a,b]}$.

3 Если $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, ..., $\bar{e}_n$ — базис действительного линейного пространства V, то на нем можно задать скалярное произведение, если любым двум векторам $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \ldots + x_n\bar{e}_n$ и $\bar{y} = y_1\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + \ldots + y_n\bar{e}_n$ из V поставить в соответствие действительное число

$$(\bar{x}, \bar{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$

Таким образом, любое конечномерное действительное линейное пространство можно превратить в евклидово пространство.

6.1.2 Длина вектора в евклидовом пространстве

Длиной вектора $\bar{x}$ в евклидовом пространстве V называют число

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{(\bar{x},\bar{x})}.$$

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ длина вектора $\bar{x} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ вычисляется по формуле

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}.$$

В евклидовом пространстве $C_{[a,b]}$ длина вектора $f(x)$ называется также *нормой функции* $f(x)$ и вычисляется по формуле

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}.$$

Вектор, длина которого равна единице, называется *нормированным.* Умножение вектора на число, обратное

ПГУ им. Ф. Скорины

его длине, называется *нормированием вектора.*

Теорема 6.1 (Неравенство Коши-Буняковского). *Для любых двух векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ евклидова пространства выполняется неравенство*

$$|\,(\bar{a},\bar{b})\,| \leq \ \|\bar{a}\| \cdot \|\bar{b}\|.$$

Из неравенства Коши-Буняковского следует, что для любых ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ евклидова пространства

$$-1 \leq \frac{(\bar{a},\bar{b})}{\|\bar{a}\| \cdot \|\bar{b}\|} \leq 1.$$

Поэтому существует единственный угол $\varphi \in [0; \pi]$ такой, что

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{a},\bar{b})}{\|\bar{a}\| \cdot \|\bar{b}\|}.$$

Этот угол φ называют *углом между векторами* $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Теорема 6.2. *В евклидовом пространстве для любых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ справедливы следующие утверждения:*

1) $\|\bar{a} + \bar{b}\|^2 = \|\bar{a}\|^2 + \|\bar{b}\|^2 + 2\|\bar{a}\| \cdot \|\bar{b}\| \cdot \cos(\widehat{\bar{a}\,\bar{b}})$*;*

2) $\|\bar{a} + \bar{b}\| \ \leq \ \|\bar{a}\| + \|\bar{b}\|$.

Первое утверждение теоремы 6.1 называется *теоремой косинусов*, второе — *неравенством треугольника.*

6.1.3 Ортогональная система векторов

Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ евклидова пространства V называются *ортогональными*, если скалярное произведение $(\bar{a},\bar{b}) = 0$. В этом случае пишут $\bar{a} \perp \bar{b}$. Система векторов $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, …, $\bar{x}_n$ евклидова пространства V называется *ортогональной*, если любая пара векторов этой системы ортогональна, т. е. $\bar{x}_i \perp \bar{x}_j$ для всех $i \neq j$. Система из одного вектора считается ортогональной. Ортогональная система нормированных векторов евклидова пространства называется *ортонормированной.*

Значение ортогональных систем векторов в евклидовых пространствах определяется следующей теоремой.

Теорема 6.3. *Ортогональная система ненулевых векторов евклидова пространства линейно независима.*

Процесс перехода от линейно независимой системы векторов евклидова пространства V к ортогональной системе векторов называется *процессом ортогонализации.*

Пусть $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ..., $\bar{a}_k$ — некоторая линейно независимая система векторов евклидова пространства V. Векторы $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$, ..., $\bar{b}_k$, последовательно построенные по формулам

$$\bar{b}_l = \bar{a}_l + \alpha_1 \bar{b}_1 + \ldots + \alpha_{l-1} \bar{b}_{l-1},$$

$$\alpha_1 = -\frac{(\bar{b}_1, \bar{a}_l)}{(\bar{b}_1, \bar{b}_1)}, \ \alpha_2 = -\frac{(\bar{b}_2, \bar{a}_l)}{(\bar{b}_2, \bar{b}_2)}, \ldots, \ \alpha_{l-1} = -\frac{(\bar{b}_{l-1}, \bar{a}_l)}{(\bar{b}_{l-1}, \bar{b}_{l-1})}$$

для $l = 1, 2, \ldots, k$, образуют ортогональную систему ненулевых векторов. Этот процесс ортогонализации называют *процессом ортогонализации Грама-Шмидта.*

Применяя процесс ортогонализации к произвольному базису евклидова пространства, можно построить *ортогональный базис* этого пространства, т. е. базис, являющийся ортогональной системой векторов. Нормируя каждый вектор ортогонального базиса, получим базис, который называют *ортонормированным.* Таким образом, в любом ненулевом конечномерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

ГГУ им. Ф. Скорины

6.1.4 Изоморфизм евклидовых пространств

Евклидовы пространства V и W называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение $f : V \to W$, для которого выполняются следующие условия:

1) $f(\bar{x}+\bar{y}) = f(\bar{x}) + f(\bar{y})$ для любых $\bar{x}, \bar{y} \in V$;
2) $f(\alpha\bar{x}) = \alpha f(\bar{x})$ для любых $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\bar{x} \in V$;
3) $(\bar{x}, \bar{y}) = (f(\bar{x}), f(\bar{y}))$ для всех $\bar{x}, \bar{y} \in V$.

Таким образом, евклидовы пространства V и W изоморфны, если эти пространства изоморфны как векторные пространства, причем их изоморфизм сохраняет скалярное произведение векторов.

Теорема 6.4. *Конечномерные евклидовы пространства изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность. В частности, каждое евклидово пространство размерности $n \in \mathbb{N}$ изоморфно евклидову пространству $\mathbb{R}^n$.*

6.2 Примеры решения задач

Пример 6.1. Пусть $\bar{x} = (x_1, x_2), \bar{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Задает ли равенство $(\bar{x}, \bar{y}) = (x_1+x_2)(y_1+y_2)$ скалярное произведение на действительном линейном пространстве $\mathbb{R}^2$?

☐ Проверим выполнение требований к скалярному произведению.

1) $(\bar{x}, \bar{y}) = (x_1+x_2)(y_1+y_2) = x_1y_1+x_2y_1+x_1y_2+x_2y_2 = (y_1x_1+y_2x_1)+(y_1x_2+y_2x_2) = (y_1+y_2)x_1+(y_1+y_2)x_2 = (y_1+y_2)(x_1+x_2) = (\bar{y},\bar{x})$. Условие выполняется.

2) $(\bar{x}+\bar{y}, \bar{z}) = ((x_1+y_1)+(x_2+y_2))(z_1+z_2) = ((x_1+x_2)+(y_1+y_2))(z_1+z_2) = (x_1+x_2)(z_1+z_2)+(y_1+y_2)(z_1+$

ГГУ имени Ф. Скорины

$+ z_2) = (\bar{x}, \bar{z}) + (\bar{y}, \bar{z})$. Условие выполняется.

3) $(\alpha\bar{x}, \bar{y}) = (\alpha x_1 + \alpha x_2)(y_1 + y_2) = \alpha(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) = \alpha(\bar{x}, \bar{y})$. Условие выполняется.

4) $(\bar{x}, \bar{x}) = (x_1 + x_2)(x_1 + x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$. Если $\bar{x} = (-1{,}1)$, то $(\bar{x}, \bar{x}) = (-1)^2 + 1^2 + 2 \cdot (-1) \cdot 1 = 0$. Условие не выполняется для всех $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$.

Таким образом, равенство $(\bar{x}, \bar{y}) = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)$ не задает скалярное произведение на $\mathbb{R}^2$.

Ответ: нет. $\boxtimes$

Пример 6.2. Найдите угол между векторами $\bar{x} = (-1{,}4{,}2{,}1)$ и $\bar{y} = (2{,}1{,}0{,}1)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$.

$\square$ Найдем скалярное произведение векторов $\bar{x}$, $\bar{y}$:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (-1) \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 3,$$

а так же длину каждого вектора:

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})} = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{22},$$
$$\|\bar{y}\| = \sqrt{(\bar{y}, \bar{y})} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{6}.$$

Тогда

$$\cos(\widehat{\bar{x}\,\bar{y}}) = \frac{(\bar{x}, \bar{y})}{\|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|} = \frac{3}{\sqrt{22} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3}{2\sqrt{33}} = \frac{\sqrt{33}}{22},$$

откуда $\widehat{\bar{x}\,\bar{y}} = \arccos\frac{\sqrt{33}}{22}$.

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{33}}{22}$. $\boxtimes$

Пример 6.3. В евклидовом пространстве $C_{[1,2]}$ найдите норму функции $f(x) = 2x - 1$ и скалярное произведение векторов $g(x) = \frac{1}{x^2}$ и $h(x) = 1 + \sqrt{x}$.

$\square$ Найдем норму функции $f(x)$.

$$\|f\| = \sqrt{\int_1^2 (2x-1)^2 dx} =$$

ГГУ им. Ф. Скорины

$$= \sqrt{\int_1^2 (4x^2 - 4x + 1)dx} = \sqrt{\left(\frac{4x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + x\right)\Big|_1^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{32}{3} - 8 + 2\right) - \left(\frac{4}{3} - 2 + 1\right)} = \sqrt{\frac{28}{3} - 5} = \sqrt{\frac{13}{3}}.$$

Вычисляем скалярное произведение векторов $g(x)$ и $h(x)$.

$$(g, h) = \int_1^2 \frac{1}{x^2} \cdot (1 + \sqrt{x})dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{\sqrt{x}}{x^2}\right) dx =$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx + \int_1^2 \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2}dx = \int_1^2 x^{-2}dx + \int_1^2 x^{-\frac{3}{2}}dx =$$

$$= \left(\frac{x^{-1}}{-1}\right)\Big|_1^2 + \left(\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_1^2 = \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2 + \left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + 1\right) + \left(-\sqrt{2} + 2\right) = \frac{5}{2} - \sqrt{2}.$$

Ответ: $\|f\| = \sqrt{\frac{13}{3}}$, $(g, h) = \frac{5}{2} - \sqrt{2}$. ☒

Пример 6.4. Векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ образуют ортогональный базис евклидова пространства V и $\|\bar{e}_1\| = 2$, $\|\bar{e}_2\| = 1$ и $\|\bar{e}_3\| = 3$. Найдите угол между векторами $\bar{a} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 - \bar{e}_3$ и $\bar{b} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$.

☐ Так как векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ образуют ортогональную систему, то $(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = (\bar{e}_1, \bar{e}_3) = (\bar{e}_2, \bar{e}_3) = 0$. Тогда

$$(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - \bar{e}_3, \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3) = (\bar{e}_1, \bar{e}_1) +$$

$$+ (\bar{e}_1, \bar{e}_2) + (\bar{e}_1, \bar{e}_3) + (\bar{e}_2, \bar{e}_1) + (\bar{e}_2, \bar{e}_2) + (\bar{e}_2, \bar{e}_3) - (\bar{e}_3, \bar{e}_1) -$$

$$- (\bar{e}_3, \bar{e}_2) - (\bar{e}_3, \bar{e}_3) = (\bar{e}_1, \bar{e}_1) + (\bar{e}_2, \bar{e}_2) - (\bar{e}_3, \bar{e}_3) =$$

$$= \|\bar{e}_1\|^2 + \|\bar{e}_2\|^2 - \|\bar{e}_3\|^2 = 4 + 1 - 9 = -4.$$

$$\|\bar{a}\| = \sqrt{(\bar{a}, \bar{a})} = \sqrt{(\bar{e}_1, \bar{e}_1) + (\bar{e}_2, \bar{e}_2) + (\bar{e}_3, \bar{e}_3)} =$$

ГГУ имени Ф. Скорины

$$= \sqrt{\|\bar{e}_1\|^2 + \|\bar{e}_2\|^2 + \|\bar{e}_3\|^2} = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}.$$

Аналогично

$$\|\bar{b}\| = \sqrt{(\bar{b}, \bar{b})} = \sqrt{14}.$$

Теперь, если φ — угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, то

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{\|\bar{a}\| \cdot \|\bar{b}\|} = \frac{-4}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = -\frac{2}{7},$$

откуда $\varphi = \arccos(-\frac{2}{7})$.

Ответ: $\arccos(-\frac{2}{7})$. ⊠

Пример 6.5. Найдите нормированные векторы евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, ортогональные двум векторам $\bar{a}_1 = (3, 1, -2)$ и $\bar{a}_2 = (-1, 1, 4)$.

□ Пусть $\bar{c} = (x_1, x_2, x_3)$ — искомый вектор. Тогда

$$\begin{cases} (\bar{a}_1, \bar{c}) = 0, \\ (\bar{a}_2, \bar{c}) = 0, \\ \|\bar{c}\| = 1, \end{cases}$$

откуда получаем систему для нахождения x_1, x_2, x_3

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1. \end{cases}$$

Умножая второе уравнение на 3 и прибавляя к первому, получим $4x_2 + 10x_3 = 0$, откуда $x_2 = -\frac{5}{2}x_3$. Подставляя найденное x_2 во второе уравнение системы, получим $-x_1 - \frac{5}{2}x_3 + 4x_3 = 0$, откуда $x_1 = \frac{3}{2}x_3$. Подставим найденные x_1 и x_2 в третье уравнение системы.

$$\frac{9}{4}x_3^2 + \frac{25}{4}x_3^2 + x_3^2 = 1,$$

$$\frac{38}{4}x_3^2 = 1,$$

ГГУ им. Ф. Скорины

$$x_3 = \pm\sqrt{\frac{2}{19}} = \pm\frac{2}{\sqrt{38}}.$$

Таким образом, в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ есть два вектора, удовлетворяющих условиям задачи.

Ответ:
$\bar{c}_1 = \left(\frac{3}{\sqrt{38}}, -\frac{5}{\sqrt{38}}, \frac{2}{\sqrt{38}}\right)$, $\bar{c}_2 = \left(-\frac{3}{\sqrt{38}}, \frac{5}{\sqrt{38}}, -\frac{2}{\sqrt{38}}\right)$. ⊠

Пример 6.6. По заданному базису $\bar{e}_1 = (1, -2, 2)$, $\bar{e}_2 = (-1, 0, -1)$, $\bar{e}_3 = (5, -3, -7)$, применяя процесс ортогонализации Грама-Шмидта, постройте в $\mathbb{R}^3$ ортонормированный базис.

☐ Построим ортогональный базис $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$, $\bar{b}_3$ пространства $\mathbb{R}^3$. Пусть $\bar{b}_1 = \bar{e}_1 = (1, -2{,}2)$. Положим $\bar{b}_2 = \bar{e}_2 + \alpha_1\bar{b}_1$, где

$$\alpha_1 = -\frac{(\bar{b}_1, \bar{e}_2)}{(\bar{b}_1, \bar{b}_1)} = -\frac{1\cdot(-1) + (-2)\cdot 0 + 2\cdot(-1)}{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \frac{1}{3}.$$

Тогда

$$\bar{b}_2 = (-1, 0, -1) + \frac{1}{3}(1, -2{,}2) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

Положим $\bar{b}_3 = \bar{e}_3 + \alpha_1\bar{b}_1 + \alpha_2\bar{b}_2$, где

$$\alpha_1 = -\frac{(\bar{b}_1, \bar{e}_3)}{(\bar{b}_1, \bar{b}_1)} = -\frac{1\cdot 5 + (-2)\cdot(-3) + 2\cdot(-7)}{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \frac{1}{3},$$

$$\alpha_2 = -\frac{(\bar{b}_2, \bar{e}_3)}{(\bar{b}_2, \bar{b}_2)} =$$

$$= -\frac{(-\frac{2}{3})\cdot 5 + (-\frac{2}{3})\cdot(-3) + (-\frac{1}{3})\cdot(-7)}{(-\frac{2}{3})^2 + (-\frac{2}{3})^2 + (-\frac{1}{3})^2} = -1.$$

Тогда

$$\bar{b}_3 = (5, -3, -7) + \frac{1}{3}(1, -2{,}2) - \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) =$$
$$= (6, -3, -6).$$

ГГУ им. Ф. Скорины

Нормируем векторы $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$, $\bar{b}_3$.

$$\bar{a}_1 = \frac{\bar{b}_1}{\|\bar{b}_1\|} = \frac{(1,-2,2)}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} =$$
$$= \frac{1}{3}(1,-2,2) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right),$$
$$\bar{a}_2 = \frac{\bar{b}_2}{\|\bar{b}_2\|} = \frac{(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})}{\sqrt{(-\frac{2}{3})^2+(-\frac{2}{3})^2+(-\frac{1}{3})^2}} =$$
$$= \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right),$$
$$\bar{a}_3 = \frac{\bar{b}_3}{\|\bar{b}_3\|} = \frac{(6,-3,-6)}{\sqrt{6^2+(-3)^2+(-6)^2}} =$$
$$= \frac{1}{9}(6,-3,-6) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

Ответ:
$\bar{a}_1 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\bar{a}_2 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, $\bar{a}_3 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. ⊠

Пример 6.7. Постройте ортонормированный базис линейной оболочки векторов $\bar{a}_1 = (1,2,2,-1)$, $\bar{a}_2 = (1,-1,0,3)$, $\bar{a}_3 = (0,3,2,-4)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$, применяя процесс ортогонализации Грама-Шмидта.

□ Найдем базис линейной оболочки векторов $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$.

$$\begin{array}{cc}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c}\bar{a}_1\\ \bar{a}_2\\ \bar{a}_3\end{array}\end{array} \xrightarrow{II+I\cdot(-1)} \begin{array}{cc}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c}\bar{a}_1\\ \bar{a}_2\\ \bar{a}_3\end{array}\end{array} \rightarrow$$
$$\xrightarrow{III+II} \begin{array}{cc}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c}\bar{a}_1\\ \bar{a}_2\\ \bar{a}_3\end{array}\end{array}.$$

Таким образом, векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ образуют базис линейной оболочки $L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3)$.

ГГУ им. Ф. Скорины

Построим ортогональный базис $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$. Пусть $\bar{b}_1 = \bar{a}_1 = (1, 2, 2, -1)$. Положим $\bar{b_2} = \bar{a}_2 + \alpha_1 \bar{b}_1$, где

$$\alpha_1 = -\frac{(\bar{b}_1, \bar{a}_2)}{(\bar{b}_1, \bar{b}_1)} = -\frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 3}{1^2 + 2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \frac{2}{5}.$$

Тогда

$$\bar{b}_2 = (1, -1,0,3) + \frac{2}{5}(1,2,2,-1) = \left(\frac{7}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{13}{5}\right).$$

Нормируем векторы $\bar{b}_1, \bar{b}_2$.

$$\bar{e}_1 = \frac{\bar{b}_1}{\|\bar{b}_1\|} = \frac{(1,2,2,-1)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2 + (-1)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,2,-1) = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right),$$

$$\bar{e}_2 = \frac{\bar{b}_2}{\|\bar{b}_2\|} = \frac{\left(\frac{7}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{13}{5}\right)}{\sqrt{(\frac{7}{5})^2 + (-\frac{1}{5})^2 + (\frac{4}{5})^2 + (\frac{13}{5})^2}} =$$

$$= \left(\frac{7}{\sqrt{235}}, -\frac{1}{\sqrt{235}}, \frac{4}{\sqrt{235}}, \frac{13}{\sqrt{235}}\right).$$

Ответ: $\bar{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$,
$\bar{e}_2 = \left(\frac{7}{\sqrt{235}}, -\frac{1}{\sqrt{235}}, \frac{4}{\sqrt{235}}, \frac{13}{\sqrt{235}}\right)$. ⊠

6.3 Индивидуальные задания

1 В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

1.1	$\bar{a} = (1, -1,1,1)$,	$\bar{b} = (3,5,2,-1)$.
1.2	$\bar{a} = (1,0,1,2)$,	$\bar{b} = (3,-4,1,3)$.
1.3	$\bar{a} = (2,-1,0,3)$,	$\bar{b} = (-1,0,-1,1)$.
1.4	$\bar{a} = (2,2,-1,0)$,	$\bar{b} = (1,1,-1,-1)$.
1.5	$\bar{a} = (-3,1,0,2)$,	$\bar{b} = (-1,1,0,4)$.

ГГУ им. Ф. Скорины

1.6 $\bar{a} = (1, -2, -3{,}1)$, $\bar{b} = (1{,}3{,}2, -4)$.

1.7 $\bar{a} = (4, -2{,}1{,}2)$, $\bar{b} = (1{,}1{,}0{,}3)$.

1.8 $\bar{a} = (5{,}3, -1{,}1)$, $\bar{b} = (-1, -3{,}0{,}4)$.

1.9 $\bar{a} = (1{,}0, -1{,}4)$, $\bar{b} = (1{,}2, -3, -2)$.

1.10 $\bar{a} = (-3{,}1, -2{,}1)$, $\bar{b} = (1{,}2{,}0{,}5)$.

1.11 $\bar{a} = (1{,}0, -2{,}1)$, $\bar{b} = (3, -2{,}0{,}1)$.

1.12 $\bar{a} = (2, -1{,}1, -1)$, $\bar{b} = (-1{,}2{,}1{,}0)$.

1.13 $\bar{a} = (3, -4{,}1{,}1)$, $\bar{b} = (-2{,}1, -3{,}5)$.

1.14 $\bar{a} = (0{,}1{,}1, -3)$, $\bar{b} = (1, -2{,}2{,}1)$.

1.15 $\bar{a} = (4, -3{,}1{,}2)$, $\bar{b} = (1{,}1{,}1{,}1)$.

2 В евклидовом пространстве $C_{[1,2]}$ найдите норму функции $f(x)$ и скалярное произведение векторов $f(x)$ и $g(x)$.

2.1 $f(x) = x - 3$, $g(x) = \frac{1}{x}$.

2.2 $f(x) = -3x + 1$, $g(x) = 2x$.

2.3 $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^3 - 2x$.

2.4 $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}}$, $g(x) = -x^2 + 3$.

2.5 $f(x) = 2x + 4$, $g(x) = -\frac{1}{x^2}$.

2.6 $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x} + 2$.

2.7 $f(x) = -\sqrt{x} + 1$, $g(x) = \sqrt{x} + 1$.

2.8 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$, $g(x) = -\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

2.9 $f(x) = -x + 2$, $g(x) = x^2 - 3x$.

2.10 $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = -\frac{1}{x}$.

2.11 $f(x) = -3x$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$.

2.12 $f(x) = x - \frac{1}{x}$, $g(x) = x^2 + x$.

2.13 $f(x) = -2x + 3$, $g(x) = \sqrt{x}$.

2.14 $f(x) = 1 - 2\sqrt{x}$, $g(x) = x$.

2.15 $f(x) = 4x - 3$, $g(x) = x + 2$.

3 Найдите нормированные векторы евклидова про-

ГГУ им. Ф. Скорины

странства $\mathbb{R}^3$, ортогональные векторам $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$.

3.1 $\bar{a}_1 = (1{,}1{,}1)$, $\bar{a}_2 = 1, -1{,}1)$.
3.2 $\bar{a}_1 = (1, -1{,}0)$, $\bar{a}_2 = (-2{,}1{,}2)$.
3.3 $\bar{a}_1 = (2, -1{,}1)$, $\bar{a}_2 = (-3{,}1, -1)$.
3.4 $\bar{a}_1 = (0, -2{,}4)$, $\bar{a}_2 = (1{,}2, -3)$.
3.5 $\bar{a}_1 = (1{,}1, -2)$, $\bar{a}_2 = (0{,}1, -3)$.
3.6 $\bar{a}_1 = (-1{,}2{,}3)$, $\bar{a}_2 = (3{,}4{,}1)$.
3.7 $\bar{a}_1 = (-3{,}1{,}2)$, $\bar{a}_2 = (2{,}2{,}0)$.
3.8 $\bar{a}_1 = (0{,}1{,}2)$, $\bar{a}_2 = (-1, -1{,}0)$.
3.9 $\bar{a}_1 = (2, -3{,}1)$, $\bar{a}_2 = (-1{,}1{,}0)$.
3.10 $\bar{a}_1 = (1{,}0{,}2)$, $\bar{a}_2 = (-3{,}4, -6)$.
3.11 $\bar{a}_1 = (1, -1, -1)$, $\bar{a}_2 = (0{,}3{,}1)$.
3.12 $\bar{a}_1 = (2{,}1{,}1)$, $\bar{a}_2 = (1{,}1{,}0)$.
3.13 $\bar{a}_1 = (2, -1{,}4)$, $\bar{a}_2 = (-3{,}2, -4)$.
3.14 $\bar{a}_1 = (-2{,}3{,}2)$, $\bar{a}_2 = (0, -1{,}2)$.
3.15 $\bar{a}_1 = (-1{,}0{,}3)$, $\bar{a}_2 = (1{,}2, -3)$.

4 Векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ образуют ортогональный базис евклидова пространства V и $\|\bar{e}_1\| = 1$, $\|\bar{e}_2\| = 2$, $\|\bar{e}_3\| = 3$. Найдите угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

4.1 $\bar{a} = -2\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 + \bar{e}_3$, $\bar{b} = \bar{e}_1 - 2\bar{e}_3$.
4.2 $\bar{a} = 3\bar{e}_1 - \bar{e}_2 - \bar{e}_3$, $\bar{b} = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2$.
4.3 $\bar{a} = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_3$, $\bar{b} = 3\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_3$.
4.4 $\bar{a} = 3\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$, $\bar{b} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 - \bar{e}_3$.
4.5 $\bar{a} = -2\bar{e}_1 + \bar{e}_2$, $\bar{b} = -3\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + 4\bar{e}_3$.
4.6 $\bar{a} = -\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3$, $\bar{b} = 3\bar{e}_1 - \bar{e}_2$.
4.7 $\bar{a} = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_3$, $\bar{b} = -\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 + \bar{e}_3$.
4.8 $\bar{a} = 3\bar{e}_1 - \bar{e}_3$, $\bar{b} = 4\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$.
4.9 $\bar{a} = -3\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_3$, $\bar{b} = -\bar{e}_1 + 2\bar{e}_3$.
4.10 $\bar{a} = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - \bar{e}_3$, $\bar{b} = -3\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - 2\bar{e}_3$.

ГГУ им. Ф. Скорины

4.11 $\bar{a} = 3\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 + 4\bar{e}_3$, $\bar{b} = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$.
4.12 $\bar{a} = -3\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$, $\bar{b} = \bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3$.
4.13 $\bar{a} = \bar{e}_1 - 3\bar{e}_2 + \bar{e}_3$, $\bar{b} = -2\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_3$.
4.14 $\bar{a} = -4\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$, $\bar{b} = -3\bar{e}_1 + \bar{e}_3$.
4.15 $\bar{a} = 3\bar{e}_1 - \bar{e}_2 - 2\bar{e}_3$, $\bar{b} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 - \bar{e}_3$.

5 Применяя процесс ортогонализации Грама-Шмидта, по заданному базису $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ постройте ортонормированный базис.

5.1 $\bar{e}_1 = (1,1,1)$, $\bar{e}_2 = (1,2,3)$, $\bar{e}_3 = (1,1,2)$.
5.2 $\bar{e}_1 = (1,-1,3)$, $\bar{e}_2 = (2,-6,1)$, $\bar{e}_3 = (4,-4,1)$.
5.3 $\bar{e}_1 = (1,-1,1)$, $\bar{e}_2 = (1,-2,3)$, $\bar{e}_3 = (-1,1,2)$.
5.4 $\bar{e}_1 = (1,2,1)$, $\bar{e}_2 = (2,1,2)$, $\bar{e}_3 = (-4,0,-2)$.
5.5 $\bar{e}_1 = (1,4,-1)$, $\bar{e}_2 = (4,3,-2)$, $\bar{e}_3 = (-1,5,1)$.
5.6 $\bar{e}_1 = (0,1,-2)$, $\bar{e}_2 = (1,-1,2)$, $\bar{e}_3 = (1,3,-1)$.
5.7 $\bar{e}_1 = (1,0,2)$, $\bar{e}_2 = (2,-1,4)$, $\bar{e}_3 = (2,-2,1)$.
5.8 $\bar{e}_1 = (-2,3,1)$, $\bar{e}_2 = (0,2,1)$, $\bar{e}_3 = (1,2,3)$.
5.9 $\bar{e}_1 = (-1,-1,-1)$, $\bar{e}_2 = (3,2,1)$, $\bar{e}_3 = (-1,2,0)$.
5.10 $\bar{e}_1 = (2,1,-1)$, $\bar{e}_2 = (1,2,-2)$, $\bar{e}_3 = (1,1,-3)$.
5.11 $\bar{e}_1 = (2,-1,3)$, $\bar{e}_2 = (-2,0,-1)$, $\bar{e}_3 = (1,3,-2)$.
5.12 $\bar{e}_1 = (4,-1,1)$, $\bar{e}_2 = (3,-2,4)$, $\bar{e}_3 = (5,1,-1)$.
5.13 $\bar{e}_1 = (-2,1,0)$, $\bar{e}_2 = (2,-1,1)$, $\bar{e}_3 = (-1,3,1)$.
5.14 $\bar{e}_1 = (-1,2,1)$, $\bar{e}_2 = (-2,1,2)$, $\bar{e}_3 = (-3,1,1)$.
5.15 $\bar{e}_1 = (3,2,-1)$, $\bar{e}_2 = (1,2,0)$, $\bar{e}_3 = (2,1,1)$.

6 Применяя процесс ортогонализации Грама-Шмидта, постройте ортонормированный базис линейной оболочки $L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3)$ векторов евклидова пространства $\mathbb{R}^4$.

6.1 $\bar{a}_1 = (1,1,-1,1)$, $\bar{a}_2 = (-2,1,3,-4)$,
$\bar{a}_3 = (3,0,-4,5)$.

ГГУ им. Ф. Скорины

6.2 $\bar{a}_1 = (-1,0,1,3)$, $\bar{a}_2 = (3,-2,-2,-2)$,
$\bar{a}_3 = (4,-2,-3,-5)$.

6.3 $\bar{a}_1 = (-1,0,1,1)$, $\bar{a}_2 = (-2,4,0,1)$,
$\bar{a}_3 = (3,-4,-1,-2)$.

6.4 $\bar{a}_1 = (-1,2,1,-1)$, $\bar{a}_2 = (3,-1,-1,1)$,
$\bar{a}_3 = (-2,-1,0,0)$.

6.5 $\bar{a}_1 = (3,2,-1,1)$, $\bar{a}_2 = (2,4,0,1)$,
$\bar{a}_3 = (-5,-6,1,-2)$.

6.6 $\bar{a}_1 = (1,0,-2,3)$, $\bar{a}_2 = (1,-3,0,2)$,
$\bar{a}_3 = (-2,3,2,-5)$.

6.7 $\bar{a}_1 = (2,-1,-1,3)$, $\bar{a}_2 = (-3,2,1,-2)$,
$\bar{a}_3 = (5,-3,-2,5)$.

6.8 $\bar{a}_1 = (-1,2,1,2)$, $\bar{a}_2 = (-3,2,3,0)$,
$\bar{a}_3 = (4,-4,-4,-2)$.

6.9 $\bar{a}_1 = (1,-1,2,0)$, $\bar{a}_2 = (-2,1,0,4)$,
$\bar{a}_3 = (3,-2,2,-4)$.

6.10 $\bar{a}_1 = (-1,3,1,2)$, $\bar{a}_2 = (4,-2,-1,-2)$,
$\bar{a}_3 = (5,-5,-2,-4)$.

6.11 $\bar{a}_1 = (1,0,-1,1)$, $\bar{a}_2 = (-2,4,-1,-2)$,
$\bar{a}_3 = (3,-4,0,3)$.

6.12 $\bar{a}_1 = (-1,1,0,3)$, $\bar{a}_2 = (-2,6,3,1)$,
$\bar{a}_3 = (-3,7,3,4)$.

6.13 $\bar{a}_1 = (1,-3,2,1)$, $\bar{a}_2 = (-2,3,0,-4)$,
$\bar{a}_3 = (-3,6,-2,-5)$.

6.14 $\bar{a}_1 = (1,-1,1,0)$, $\bar{a}_2 = (-3,2,-1,4)$,
$\bar{a}_3 = (-4,3,-2,4)$.

6.15 $\bar{a}_1 = (-1,1,2,1)$, $\bar{a}_2 = (-3,1,1,1)$,
$\bar{a}_3 = (4,-2,-3,-2)$.

ГГУ им. Ф. Скорины

Литература

1. *Беняш-Кривец, В. В.* Лекции по алгебре: группы, кольца, поля: учебное пособие для студентов математических специальностей / В. В. Беняш-Кривец, О. В. Мельников. — Минск: БГУ, 2008.
2. *Бузланов, А. В.* Алгебра и теория чисел. Линейная алгебра : практическое пособие по выполнению лабораторных работ для студентов математических специальностей вузов / А. В. Бузланов, С. Ф. Каморников, В. С. Монахов. — Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2008.
3. *Бурдун, А. А.* Сборник задач по алгебре и геометрии / А. А. Бурдун, Е. А. Мурашко, М. М. Толкачев, А. С. Феденко. — Минск: Университетское, 1999.
4. *Кострикин, А. И.* Введение в алгебру: в 3 ч. / А. И. Кострикин. — М.: Физматлит, 2004.
5. *Милованов, М. В.* Алгебра и аналитическая геометрия / М. В. Милованов, Р. И. Тышкевич, А. С. Феденко. — Минск: Амалфея, 2001.
6. *Монахов, В. С.* Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. — Минск: Вышэйш. шк., 2006.
7. *Монахов, В. С.* Алгебра и теория чисел: практикум: учеб. пособие. В 2 ч. Ч. 1 / В. С. Монахов, А. В. Бузланов. — Минск: Изд. центр БГУ, 2007.
8. Сборник задач по алгебре / под ред. Кострикина А.И. — М.: Физматлит., 2001.
9. *Шнеперман, Л. Б.* Курс алгебры и теории чисел в задачах и упражнениях: в 2 ч. / Л. Б. Шнеперман. — Минск: Вышэйш. шк., 1986–1987.
10. *Шнеперман, Л. Б.* Сборник задач по алгебре и теории чисел / Л. Б. Шнеперман. — Минск: Вышэйш. шк., 2008.

ГГУ им. Ф. Скорины

СОДЕРЖАНИЕ

ГГУ им. Ф. Скорины

Учебное издание

Бузланов Александр Васильевич
Монахов Виктор Степанович
Подгорная Виктория Валерьевна
Сохор Ирина Леонидовна

ГЕОМЕТРИЯ И АЛГЕБРА. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

ПРАКТИКУМ

в четырех частях
для студентов математических
специальностей вузов.
Часть 3

В авторской редакции

ГГУ им. Ф. Скорины

Отпечатано с оригинала-макета на ризографе
учреждения образования
"Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины"
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104